VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, SCHÉMAS

RÉMY OUDOMPHENG

Résumé. Cet exposé est une introduction au langage de la géométrie algébrique des variétés abstraites, dans l'esprit des définitions données par Weil [Wei46] et Grothendieck [GD60].

Table des matières

1. Variétés algébriques et algèbres commutatives

1.1. Variétés affines.

Définition. *Une* variété algébrique affine *sur un corps* $\mathbb{k}$ *est la donnée d'un entier* n *et d'un ensemble de polynômes en* n *variables, appelés* équations de la variété.

La variété algébrique affine définie par l'ensemble d'équations vide est appelée *espace affine de dimension* n, noté $\mathbb{A}^n$.

Définition. *Soit* V *une variété algébrique affine sur un corps* $\mathbb{k}$*, d'équations* $(P_i)_{i\in I}$ *: un* point *de* V *à valeurs dans un corps* $K \supset \mathbb{k}$ *est un élément de* K^n *satisfaisant les équations* (P_i).

Une variété affine définit ainsi un ensemble algébrique $V(K) \subset K^n$.

L'ensemble $V(K)$ des points de V à valeurs dans K ne dépend que de l'idéal engendré par les polynômes P_i. On note cet idéal $I(V)$: celui-ci est toujours engendré par un nombre fini d'éléments. Remarque : si K est un corps algébriquement clos, l'ensemble $V(K)$ détermine le *radical* de $I(V)$, c'est-à-dire l'idéal de $\mathbb{k}[X_1,\dots,X_n]$ constitué des f tels que $f^p \in I(V)$ pour un certain entier p (c'est le *Nullstellensatz*).

Si R est une $\mathbb{k}$-algèbre, on peut aussi naturellement étudier les R-points de V, définis comme les éléments de R^n satisfaisant les équations données par $I(V)$.

Définition. *L'association à une* $\mathbb{k}$*-algèbre* R *de l'ensemble* $V(R)$ *définit un foncteur* V : $\mathbf{Alg}_{\mathbb{k}} \to \mathbf{Ens}$*, représentable par la formule*

$$V(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[X_1,\dots,X_n]/I(V), R)$$

Date: 26 novembre 2009.

appelé foncteur des points *de* V. *L'algèbre* $\mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ *est l'*anneau de fonctions *de* V.

Le *lemme de Yoneda* montre que des variétés affines définissant le même foncteur de points définissent le même anneau de fonctions : il existe alors un automorphisme polynomial de l'espace affine faisant correspondre leurs équations.

1.2. **Morphismes de variétés affines.** Soit X et Y deux variétés algébriques sur un corps $\mathbb{k}$, données par leurs anneaux $A(X) = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/I$ et $A(Y) = \mathbb{k}[y_1, \ldots, y_p]/J$.

Définition. *Un* morphisme *de la variété* X *dans la variété* Y *est la donnée de* p *éléments* $f_1, \ldots, f_p$ *dans l'anneau des fonctions de* X*, tels que pour toute équation* $Q \in J$, $Q(f_1, \ldots, f_p) = 0$.

Pour toute $\mathbb{k}$*-algèbre* R*, on définit ainsi une application* $f_R : X(R) \subset R^n \to Y(R)$*, donnée par* $\boldsymbol{r} \mapsto (f_1(\boldsymbol{r}), \ldots, f_p(\boldsymbol{r}))$.

Un tel morphisme est exactement la donnée d'un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbres $A(Y) \to A(X)$. Le lemme de Yoneda montre alors :

Proposition 1. *Les morphismes* $f : X \to Y$ *sont en correspondance bijective avec les transformations naturelles associées*

$$[f_R : X(R) \to Y(R)]_{R \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{k}}}.$$

La catégorie de variétés algébriques affines sur $\mathbb{k}$ ainsi définie est ainsi exactement isomorphe à la catégorie opposée à la catégorie des $\mathbb{k}$-algèbres commutatives.

Le produit de deux variétés algébriques affines d'anneaux A et B est représenté par l'algèbre $A \otimes_{\mathbb{k}} B$, leur réunion disjointe par $A \oplus B$ (l'anneau produit). Les foncteurs de points associés sont respectivement le produit et la réunion disjointe des foncteurs de points.

1.3. **Schémas affines.** Par extension, on définit les *schémas affines* comme formant la catégorie opposée à celle des anneaux. Là où une variété algébrique affine était donnée par une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini, un schéma affine est simplement la donnée d'un anneau, ne contenant pas nécessairement un corps.

On note le schéma affine associé à un anneau A par $\operatorname{Spec} A$. Par définition l'ensemble $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A)$ est identifié à l'ensemble $\operatorname{Hom}(A, B)$ des morphismes d'anneaux.

Dans ce langage, un K-point d'une variété X sur $\mathbb{k}$ est un morphisme $\operatorname{Spec} K \to X = \operatorname{Spec} A(X)$ compatible avec les morphismes dits *structuraux* $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \mathbb{k}$ et $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{k}$.

Les propriétés des anneaux montrent que le produit et le coproduit de deux schémas affines $\operatorname{Spec} A$ et $\operatorname{Spec} B$ vus dans la catégorie de foncteurs $[\mathbf{Alg}_{\mathbb{Z}}, \mathbf{Ens}]$ sont isomorphes à $\operatorname{Spec} A \otimes B$ et $\operatorname{Spec}(A \times B)$ respectivement.

2. Variétés et schémas abstraits

2.1. **La topologie de Zariski : points fermés, points génériques.** Soit X une variété algébrique affine (ou projective) définie sur un corps $\mathbb{k}$ d'anneau une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini A. Un idéal de A définit naturellement une sous-variété algébrique $Y = \operatorname{Spec}(A/I)$ munie d'un morphisme $Y \to X$.

Si K est un corps quelconque contenant $\mathbb{k}$, les sous-ensembles algébriques $Y(K)$ de $X(K)$ définis par les différents idéaux de A forment les fermés d'une topologie dite *de Zariski.*

Proposition 2. *Soit $x \in X(K)$ un K-point de X. Alors l'idéal $I(x) \subset A$ est un idéal premier. De plus, $\overline{x}$ (son adhérence pour la topologie de Zariski donnée par les idéaux de A) est un ensemble fini si et seulement si $A/I(x)$ est de dimension finie sur $\Bbbk$: c'est alors un corps, appelé* corps résiduel *de A en x.*

Lorsque $A/I(x)$ est de degré de transcendance non nul sur $\Bbbk$, l'adhérence de x au sens de la topologie de Zariski est une sous-variété algébrique (intègre) de X : on dit que x est un point *générique* de cette sous-variété.

Example. Soit X la variété définie sur le corps $\mathbb{Q}$ par l'équation $x^2+y^2=1$. Alors le point $x = (\cos 1, \sin 1)$ est (vraisemblablement) un point générique de X : en effet, son idéal (dans l'anneau $\mathbb{Q}[x,y]$ est probablement (x^2+y^2-1)).

Étant donné $x \in X(K)$ et I un idéal de A, on voit que x appartient à la variété définie par I si et seulement si son idéal premier $I(x)$ contient I. Deux points de $X(K)$ sont donc séparés par la «topologie de Zariski» s'ils définissent des idéaux premiers différents. Ceci forme la base de la construction des schémas comme espaces topologiques.

Définition (Spectre premier)**.** *Soit A un anneau (quelconque). Le spectre premier de A est l'ensemble des idéaux premiers de A. Il est muni d'une topologie dite* de Zariski*, dont les fermés sont les parties de la forme $V(I)$ (ensemble des idéaux premiers contenant I).*

Attention : de même que deux algèbres de type fini différents peuvent définir des ensembles algébriques $X(K)$ identiques, deux anneaux distincts peuvent fournir le même spectre premier. Notamment, A et $A_{\text{red}} = A/\sqrt{0}$ ont le même spectre premier.

Pour traiter ce problème, on munit l'ensemble algébrique $X(K)$ d'un *faisceau* de fonctions : si U est un ouvert de Zariski de X, on note $\mathcal{O}(U)$ le sous-anneau de l'anneau total de fractions $\operatorname{Frac} A$ constitué des f bien définies sur U. Dans le langage des ensembles algébriques, f est bien définie sur $U(K)$ si pour tout $x \in U(K)$ il existe une écriture $f = a/b$ telle que $b(x) \neq 0$.

Le spectre premier de A est lui aussi muni d'un faisceau de fonctions : ici, f est bien définie sur U si l'idéal des dénominateurs de f définit un fermé disjoint de U. On notera également $\operatorname{Spec} A$ le spectre premier de A muni de ce faisceau de fonctions (le faisceau *structural* $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$).

Theorème 3 (Grothendieck [GD60])**.** *La définition des spectres premiers fournit un plongement pleinement fidèle de la catégorie $\mathbf{Aff} = (\mathbf{Alg}_{\mathbb{Z}})^{\text{op}}$ des schémas affines dans la catégorie des espaces topologiques munis d'un faisceau d'anneaux locaux.*

2.2. **Les variétés abstraites.**

Définition. *Une* variété de Serre *(resp. un* schéma*) est un recollement formel de variétés algébriques affines (resp. de schémas affines)*

$$\coprod_{i,j,k} U_{ijk} \xrightarrow{\partial_1,\partial_2,\partial_3} \coprod_{i,j} U_{ij} \xrightarrow{\partial_1,\partial_2} \coprod_i U_i \dashrightarrow X$$

avec des identités simpliciales :

$$\begin{array}{ccc} U_{ijk} \xrightarrow{\partial_2} U_{ik} & U_{ijk} \xrightarrow{\partial_3} U_{ij} & U_{ijk} \xrightarrow{\partial_2} U_{ik} \\ \partial_3 \downarrow \qquad \downarrow \partial_2 & \partial_1 \downarrow \qquad \downarrow \partial_1 & \partial_1 \downarrow \qquad \downarrow \partial_1 \\ U_{ij} \xrightarrow[\partial_2]{} U_i & U_{jk} \xrightarrow[\partial_2]{} U_j & U_{jk} \xrightarrow[\partial_1]{} U_i \end{array}$$

formant trois carrés cartésiens et où les morphismes $\partial_2 : U_{ij} \to U_i$ et $\partial_1 : U_{ij} \to U_j$ identifient U_{ij} à un ouvert de Zariski de U_i et U_j.

La notion de variétés abstraites permet de définir les variétés projectives à partir de cartes affines : on peut ainsi définir de façon systématique la notion d'application régulière enttre variétés projectives.

Les schémas forment naturellement une sous-catégorie du topos de Zariski $[\mathbf{Alg}_{\mathbb{Z}}, \mathbf{Ens}]_{\mathrm{zar}}$, qui est la catégorie des faisceaux sur le gros site de Zariski affine $\mathbf{Aff}_{\mathrm{Zar}}$. Ils possèdent encore un foncteur de points (ce n'est pas la réunion des foncteur de points des ouverts affines !), et une notion de produit, coproduit, produit fibré...

Références

[Die74] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, Presses universitaires de France, 1974.

[Dol] I. Dolgachev, *Introduction to algebraic geometry*, available at `http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/631.pdf`.

[56] *Séminaire H. Cartan et C. Chevalley, 8e année : 1955/1956. Géométrie algébrique*, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1956 (French). MR 0097402 (20 #3871)

[GD60] A. Grothendieck and J.-A. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 4, 228. MR 0217083 (36 #177a)

[Ser55] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278 (French). MR 0068874 (16,953c)

[Wei46] André Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946. MR 0023093 (9,303c)