SUITES SPECTRALES ET COUPLES EXACTS

RÉMY OUDOMPHENG

RÉSUMÉ. Le but de cette note est d'expliquer la construction inventée par Massey [Mas52] de suites spectrales à l'aide des *couples exacts*, et de décrire dans ce formalisme les suites spectrales usuelles.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les suites spectrales sont un des outils essentiels permettant d'obtenir, de façon relativement effective, des informations de nature quantitative sur les objets définis par l'algèbre homologique moderne (notamment les foncteurs dérivés et l'hypercohomologie).

Leur intérêt principal est de pouvoir, sous certaines conditions, exprimer des informations sur des groupes de cohomologie sans passer par l'arsenal de l'axiome du choix et des résolutions injectives.

Nos références principales seront le livre de MacLane [ML63, Chapter XI, 5], le livre de Gel'fand (fils) et Manin [GM03, III, 7], notamment l'exercice 3 sur les couples exacts, l'article original de Massey [Mas52] sur la théorie des couples exacts, et l'article de Grothendieck [Gro57] qui développe la théorie des foncteurs dérivés, en vue de ses applications à la cohomologie des faisceaux, et aux suites spectrales.

On pourra aussi consulter l'appendice du livre de Srinivas sur la K-théorie algébrique [Sri96, Appendix C], et le livre de Claire Voisin [Voi02].

1. SUITES SPECTRALES, COUPLES EXACTS

Dans cette section, on se fixe une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Date: 24 juin 2009.

1.1. Définitions.

Définition. *Une* suite spectrale *dans $\mathcal{A}$ est une famille* $(E_r^{p,q})_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ p,q\in\mathbb{Z}}}$ *d'objets de $\mathcal{A}$, et la donnée, sur la famille $(E_r^{\bullet,\bullet})$, appelée la r-*ième page *de la suite spectrale, de différentielles $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ telles que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ et*

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq \frac{\ker d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}}{\operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}}$$

Si les $E_r^{p,q}$ sont tous isomorphes pour $r >> 0$, on dit que la suite spectrale dégénère en page r à l'emplacement (p,q). Si la suite spectrale dégénère pour tous indices (p,q), on dit qu'elle *converge*, et on note $E_\infty^{p,q}$ l'objet $E_r^{p,q}$ pour $r >> 0$ (qui est bien défini à isomorphisme près).

Définition. *Un* couple exact *est la donnée de deux objets C et E, et d'un diagramme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "T"] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & E \arrow[ul, "g"] & \end{tikzcd}$$

tel que toute suite de deux flèches est exacte, i.e.

$$\ker f = \operatorname{im} T, \qquad \ker g = \operatorname{im} f, \qquad \ker T = \operatorname{im} g.$$

Proposition 1. *Soit $(C,T;E,f,g)$ un couple exact. La composée $fg : E \to E$ vérifie $(fg)^2 = 0$, et munit E d'une structure différentielle.*

Définition. *Étant donné un couple exact $(C,T;E,f,g)$ on définit son* couple dérivé *par $C' = \operatorname{im} T$, $E' = \ker(fg)/\operatorname{im}(fg)$, et les morphismes $\bar{T}$ (induit par restriction à C'), $\bar{f}$ (défini par $\bar{f}(Tx) = [f(x)]$) et $\bar{g}$ (induit par passage au quotient par $\operatorname{im}(fg)$ puisque $g(fgx) = (gf)(gx) = 0$).*

Si $\mathcal{C} = (C,T;E,f,g)$ est un couple exact, on note $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ et on définit par récurrence $\mathcal{C}_{r+1}$ comme le couple exact dérivé de $\mathcal{C}_r$, pour tout entier r.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{C} = (C,T;E,f,g)$ un couple exact. Alors $C_n = \operatorname{im} T^n = C/(\ker T^n)$, et $E_n = g^{-1}(\operatorname{im} T^n)/f(\ker T^n)$.*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[rr, "T"] & & C_n \arrow[dl, "f_n"] \\ & E_n \arrow[ul, "g_n"] & \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, g_n est induite par g sur un sous-quotient, et $f_n(T^n x) = [f(x)] \in E_n \subset E/f(\ker T^n)$

On note

$$E_\infty = \frac{g^{-1}(\bigcap \operatorname{im} T^n)}{f(\varinjlim_n (\ker T^n))}$$

qui est appelé *termes limite* de la suite dérivée du couple exact $\mathcal{C}$.

1.2. Suite spectrale dérivée d'un couple exact gradué.

Supposons que $C^{\bullet,\bullet}$ et $E^{\bullet,\bullet}$ soient des objets gradués par des indices de $\mathbb{Z}^2$, et considérons un couple exact

$$\begin{tikzcd} C^{\bullet,\bullet} \arrow[rr, "T"] & & C^{\bullet,\bullet} \arrow[dl, "f"] \\ & E^{\bullet,\bullet} \arrow[ul, "g"] & \end{tikzcd}$$

avec
$$T : C^{p+1,q} \to C^{p,q+1}, \qquad f : C^{p,q} \to E^{p,q}, \qquad g : E^{p,q} \to C^{p+1,q}$$
c'est-à-dire que pour tout p, on a une suite exacte longue
$$C^{p,q} \xrightarrow{f} E^{p,q} \xrightarrow{g} C^{p+1,q} \xrightarrow{T} [+1]_q$$

On appelle ce couple exact $\mathcal{C}_1 = (C_1, T_1; E_1, f_1, g_1)$.

Proposition 3. *Les couples exacts dérivés de $\mathcal{C}_1$ fournissent des objets gradués $E_r^{\bullet,\bullet}$ dont la différentielle $d_r = f_r g_r$ envoie $E_r^{p,q}$ dans $E_r^{p+r,q-r+1}$. En particulier, $E_\bullet^{\bullet,\bullet}$ est une suite spectrale.*

Démonstration. On calcule $d_r[x] = f_r(g_r[x]) = f_r([g(x)]) = [fT^{-(r-1)}g(x)]$. Donc si $[x] \in E_r^{p,q}$, $[g(x)] \in C_r^{p+1,q}$ et $[T^{1-r}g(x)] \in C_r^{p+r,q-r+1}$ et
$$d_r[x] = [fT^{-(r-1)}g(x)] \in E_r^{p+r,q-r+1}.$$
□

On pose
$$\Gamma^n = \varinjlim_{q\to\infty} C^{n-q,q}$$
et on définit une filtration décroissante canonique
$$F^p\Gamma^{p+q} = \mathrm{im}(C^{p,q} \to \Gamma^n).$$

Theorème 4. *Supposons la filtration $F^\bullet$ localement finie, i.e. $F^p\Gamma^n$ est Γ^n pour $p << 0$ et 0 pour $p >> 0$. On suppose de plus qu'à n fixé, $C^{p,n-p} = 0$ pour p suffisamment grand.*

Alors, pour r assez grand, $E_r^{p,q} = F^p\Gamma^{p+q}/F^{p+1}\Gamma^{p+q}$.

Démonstration. Pour r assez grand, $g_r : E_r^{p,q} \to C_r^{p+1,q}$. Or $C_r^{p+1,q} = \mathrm{im}(T^{r-1} : C^{p+r,q-r+1} \to C^{p+1,q})$ est nul pour r suffisamment grand.

En particulier, $d_r = f_r g_r$ est nul pour r assez grand, et on a une suite exacte courte
$$\xrightarrow{g_r=0} C_r^{p-r+2,q+r-2} \xrightarrow{T} C_r^{p-r+1,q+r-1} \xrightarrow{f_r} E_r^{p,q}$$

Mais $C_r^{p-r+1,q+r-1}$ est l'image par T^{r-1} de $C^{p,q}$ dans $C^{p-r+1,q+r-1}$, qui vaut $F^p\Gamma^{p+q}$ pour r assez grand, et de même $C_r^{p-r+2,q+r-2} \simeq F^{p+1}\Gamma^{p+q}$ pour r assez grand. La suite exacte devient alors
$$0 \to F^{p+1}\Gamma^{p+q} \to F^p\Gamma^{p+q} \to E_r^{p,q} \to 0$$
ce qui prouve le résultat. □

On écrira la convergence de la suite spectrale sous la forme
$$E_1^{p,q} \implies \Gamma^{p+q}.$$

2. Suite spectrale associée à un complexe filtré

2.1. Couple exact associé à un complexe filtré.

Définition. *Soit*
$$A = F^0A \supset F^1A \supset \cdots \supset F^nA \supset \cdots$$
un complexe muni d'une filtration décroissante (on posera $F^{-n}A = A$ si $n \geqslant 0$). L'objet gradué associé à A est $\mathrm{Gr}^\bullet A$, où l'on pose
$$\mathrm{Gr}^p A = F^pA/F^{p+1}A.$$

On considère, pour chaque entier p, la suite exacte longue de cohomologie
$$H^k(F^{p+1}A) \to H^k(F^pA) \to H^k(\mathrm{Gr}^p A) \to [+1]_k$$

que l'on peut réécrire en posant $q = k - p$

$$H^{p+q}(F^pA) \xrightarrow{f} H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p A) \xrightarrow{g} H^{(p+1)+q}(F^{p+1}A) \xrightarrow{T} [+1]_q$$

ce qui permet de définir un couple exact bigradué naturel avec

$$C_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pA) \qquad E_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr^pA)$$

qui permettent de constituer un triangle :

$$\begin{tikzcd} C_1 = \bigoplus_{p,q} C_1^{p,q} \arrow[rr, "T"] & & C_1 \arrow[dl, "f"] \\ & E_1 = \bigoplus_{p,q} E_1^{p,q} \arrow[ul, "g"] & \end{tikzcd}$$

La différentielle

$$d_1^{p,q} = f^{p+1,q}g^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$$

fait de E_1 *la première page de la suite spectrale associée au couple exact bigradué* (C_1, E_1).

Proposition 5. *Si la filtration de* A *est localement bornée, la suite spectrale construite ci-dessus coïncide avec la suite spectrale classique*

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr^pA) \implies H^{p+q}A$$

déduite du complexe filtré $(A, F^\bullet A)$. *On a* $E_\infty^{p,q} = F^pH^{p+q}(A)/F^{p+1}H^{p+q}(A)$, *où* $F^pH^k(A)$ *est l'image de* $H^k(F^pA)$ *dans* $H^k(A)$.

Démonstration. La théorie de la section précédente montre que $E_\infty^{p,q}$ coïncide avec $F^p\Gamma^{p+q}/F^{p+1}\Gamma^{p+q}$, où

$$\Gamma^n = \varinjlim_q C_1^{n-q,q} = \varinjlim_q H^n(F^{n-q}A) = H^n(A)$$

et $F^p\Gamma^n$ est le sous-espace provenant de $H^n(F^pA)$. □

2.2. **Suite spectrale d'un complexe double.** Soit $A^{\bullet,\bullet}$ un complexe double, muni de différentielles d_x et d_y, avec $d_x^2 = d_y^2 = d_xd_y + d_yd_x = 0$.

On note $\mathfrak{A}^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$ le complexe total associé, muni de sa filtration décroissante

$$F^p\mathfrak{A}^{p+q} = A^{p,q} \oplus A^{p+1,q-1} \oplus \cdots$$

et $\mathrm{Gr}^p \mathfrak{A}$ s'identifie au complexe simple $(A^{p,\bullet}, d_y)$.

Proposition 6. *La cohomologie de* $\mathfrak{A}$ *est l'aboutissement d'une suite spectrale*

$$E_1^{p,q} = H_y^{p,q}(A) \implies H^{p+q}(\mathfrak{A})$$

Le couple exact à l'origine de cette suite spectrale est

$$\begin{tikzcd} C_1^{p,q} = H^{p+q+1}(F^{p+1}\mathfrak{A}) \arrow[rr, "T"] & & C_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p\mathfrak{A}) \arrow[dl, "f"] \\ & E_1^{p,q} = H_y^{p,q}(A) \arrow[ul, "{[+1]_p}" near end, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Il est d'autre part facile de vérifier que la différentielle fg est de la forme

$$H_y^{p,q}(A) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}\mathfrak{A}) \to H_y^{p+1,q}(A)$$

et coïncide précisément avec la flèche induite par la différentielle d_x. Ceci permet d'en déduire la forme de la

Theorème 7. *Il existe une suite spectrale de la forme*

$$E_2^{p,q} = H_x^p H_y^q(A) \implies H^{p+q}(\mathfrak{A}).$$

2.3. **Suite spectrale d'un foncteur hyperdérivé.**

Proposition 8 (voir [Voi02]). *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche et $A^\bullet$ un complexe d'objets de $\mathcal{A}$. Si $I^\bullet$ est une résolution injective de $A^\bullet$, on note*

$$\mathbb{R}^k F(A^\bullet) = H^k(F(I^\bullet)).$$

Si $\mathcal{A}$ contient assez d'injectifs, $\mathbb{R}^k F$ est bien défini sur toute la catégorie de complexes $K\mathcal{A}$ et s'appelle le k-ième foncteur (hyper)dérivé de F.

Theorème 9 (Première suite spectrale d'hypercohomologie). *Sous les hypothèses précédentes, il existe une suite spectrale*

$$E_1^{p,q} = R^q F(A^p) \implies \mathbb{R}^{p+q} F(A^\bullet)$$

calculant les foncteurs dérivés de F sur $A^\bullet$. De plus, la différentielle $d_1 : R^q F(A^p) \to R^q F(A^{p+1})$ s'identifie à la flèche induite par $A^p \to A^{p+1}$.

Cette suite spectrale résulte des considérations suivantes.

Proposition 10 (Résolution de Cartan-Eilenberg). *Sous les hypothèses précédentes, soit (A^p) un complexe de $\mathcal{A}$. Alors il existe un complexe double $(I^{p,q}, d, \partial)$ tel que pour tout p,*

- $(I^{p,\bullet}, \partial)$ *soit une résolution injective de* A^p*;*
- $(\operatorname{im} I^{p,\bullet} \subset I^{p+1,\bullet}, \partial)$ *soit une résolution injective de* $\operatorname{im} A^p \subset A^{p+1}$*;*
- $(\ker d \subset I^{p,\bullet}, \partial)$ *soit une résolution injective de* $\ker d \subset A^p$*;*
- $(H_x^p(I^{\bullet,\bullet}), \bar{\partial})$ *soit une résolution injective de* $H^\bullet(A^\bullet)$.

Le complexe total de $I^{\bullet,\bullet}$ est alors une résolution injective de $A^\bullet$ et on reconnaît la première suite spectrale du complexe double $F(I^{\bullet,\bullet})$. La filtration induite sur $\mathbb{R}^{p+q}F(A^\bullet)$ est alors celle déduite de $\mathbb{R}^{p+q}F(A^{\leqslant p})$ ($A^{\leqslant p}$ est appelée la filtration *bête* de A).

Theorème 11 (Seconde suite spectrale d'hypercohomologie). *Il existe une suite spectrale de la forme*

$$E_2^{p,q} = R^p F(H^q(A^\bullet)) \implies \mathbb{R}^{p+q} F(A^\bullet).$$

Démonstration. Soit $I^{\bullet,\bullet}$ une résolution de Cartan-Eilenberg de $A^\bullet$. On utilise les suites spectrales associées au complexe double $F(I^{\bullet,\bullet})$. On a

$$E_1^{p,q} = H_x^{q,p}(F(I^{\bullet,\bullet})) = F(H_x^{q,p}(I^{\bullet,\bullet})) \implies \mathbb{R}^{p+q} F(A^\bullet)$$

or $H_x^{q,\bullet}(I^{\bullet,\bullet})$ est une résolution injective de $H^q(A^\bullet)$, donc la seconde suite spectrale du complexe double fournit la suite spectrale demandée. □

On peut expliciter un couple exact fournissant cette suite spectrale. Nous aurons pour cela besoin de la *filtration canonique* d'un complexe.

Définition (Filtration canonique). *Soit $A^\bullet$ un complexe. On appelle $\tau_{\leqslant p}A^\bullet$ la troncation* canonique *de $A^\bullet$ un p. Il s'agit du complexe*

$$\cdots \to A^0 \to A^1 \to \cdots \to \ker(A^p \to A^{p+1}) \to 0$$

On a $H^k(\tau_{\leqslant p}A^\bullet) = H^k(A^\bullet)$ pour $k \leqslant p$, et $H^k(\tau_{\leqslant p}A^\bullet) = 0$ pour $k > p$.

La suite exacte

$$0 \to \tau_{\leqslant q-1}A \to \tau_{\leqslant q} \to H^q(A)[-q] \to 0$$

permet de construire, pour tout q, des suites exactes longues

$$\mathbb{R}^{p+q}F(\tau_{\leqslant q-1}A) \xrightarrow{T_2} \mathbb{R}^{p+q}F(\tau_{\leqslant q}A) \xrightarrow{f_2} R^p F(H^q(A)) \xrightarrow{g_2} [+1]_p$$

On pose alors

$$E_2^{p,q} = R^p F(H^q(A))$$
$$C_2^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q} F(\tau_{\leqslant q-1} A)$$

ce qui permet d'écrire la suite exacte longue sous la forme

$$C_2^{p,q} \to C_2^{p-1,q+1} \to E_2^{p,q} \to [+1]_p$$

et on obtient un triangle

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rr, "(p,q)\to(p-1,q+1)", "T_2"'] & & C_2 \arrow[dl, "f_2"', "(p,q)\to(p+1,q-1)"] \\
& E_2 \arrow[ul, "g_2"', "p\to p+1"] &
\end{tikzcd}$$

gradué comme le couple dérivé $\mathcal{C}_2$ d'un couple exact bigradué $\mathcal{C}_1$. Un raisonnement similaire à la première section montre que la suite des couples exacts dérivés détermine une suite spectrale dont $(E_2^{p,q})$ est la deuxième page. Par exemple, $d_2 = f_2 g_2$ envoie $E_2^{p,q}$ dans $E_2^{p+2,q-1}$.

2.4. **Suite spectrale de Grothendieck.**

Theorème 12. [Gro57, Théorème 2.4.1] « *Soient* **C**, **C**$'$, **C**$''$ *trois catégories abéliennes, on suppose que tout objet de* **C** *ou* **C**$'$ *est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Considérons des foncteurs covariants* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *et* $G : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}''$, *on suppose que* G *est exact à gauche et que* F *transforme objets injectifs en objets* G*-acycliques (i.e. annulés par les* $R^q G$, $q > 0$*). Alors il existe un foncteur spectral cohomologique sur* **C**, *à valeurs* **C**$''$, *aboutissant au foncteur dérivé à droite* $\mathbb{R}(GF)$ *de* GF, *(convenablement filtré), et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(A) = R^p G(R^q F(A)). \text{ »}$$

Démonstration. Soit $I^\bullet$ une résolution injective de A. Alors $R^k(GF)(A)$ est le k-ième groupe de cohomologie du complexe $GF(I^\bullet)$. Comme $F(I^\bullet)$ est un complexe d'objets acycliques, la première suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = R^q G(F(I^p)) \implies \mathbb{R}^{p+q} G(F(I^\bullet))$$

vérifie $E_1^{p,q} = 0$ pour tout $q > 0$, ce qui implique $R^k(GF)(A) = \mathbb{R}^k G(F(I^\bullet))$.

La seconde suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = R^p G(H^q(F(I^\bullet))) \implies \mathbb{R}^{p+q} G(F(I^\bullet))$$

démontre alors le résultat demandé. □

3. Exemples et applications

3.1. **Topologie algébrique.**

La plupart des examples mentionnés ci-après sont étudiés dans [Gro57], [GM03] et [Voi02].

Theorème 13 (Suite spectrale de Leray-Serre, [Eil]). *Soit* $X \to Y$ *une application continue entre complexes simpliciaux qui est une fibration de Serre, i.e. pour tout complexe simplicial fini* P, *et un diagramme*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
P \times I \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

il existe un relèvement $P \times I \to X$. On suppose que Y est fini.

Alors les groupes d'homologie $H_n(X_y, G)$ s'organisent en un système local $\mathcal{H}_n(F, G)$ sur Y, et il existe une suite spectrale de la forme

$$E_2^{p,q} = H_{-p}(Y, \mathcal{H}_{-q}(F, G)) \implies H_{-p-q}(X, G)$$

Démonstration. On considère la filtration de Y par ses squelettes

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n = Y$$

et la filtration induite $X_\bullet$ sur X.

On en déduit une filtration sur le complexe $C_\bullet(X, G)$ qui produit des suites exactes longues

$$H_{p+q}(X_{p-1}; G) \to H_{p+q}(X_p; G) \to H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \to [-1]_q$$

soit en posant

$$C_1^{p,q} = H_{-p-q}(X_{-p}; G) \qquad E_1^{p,q} = H_{-p-q}(X_{-p}, X_{-(p-1)}; G)$$

un couple exact

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "T"] & & C_1 \arrow[dl, "f"] \\ & E_1 = \arrow[ul, "g"] & \end{tikzcd}$$

gradué de façon standard.

Alors $E_1^{p,q}$ s'identifie naturellement à $C_{-p}(Y, \mathbb{Z}) \otimes H_{-p}(F, G)$ par la fibration $(X_p, X_{p-1}) \to (Y_p, Y_{p-1})$, et

$$fg : H_{-p-q}(X_{-p}, X_{-(p-1)}) \to H_{-p-q-1}(X_{-p-1}) \to H_{-p-q-1}(X_{-(p-1)}, X_{-(p-1,p-2)})$$

s'identifie au morphisme de bord naturel

$$C_{-p}(Y, \mathbb{Z}) \otimes H_{-q}(F, G) \to C_{-p-1}(Y, \mathbb{Z}) \otimes H_{-q}(F, G).$$

On en déduit la forme du couple exact dérivé (C_2, E_2), et la suite spectrale de l'énoncé. □

Références

[Eil] Samuel Eilenberg, *La suite spectrale. II : espaces fibrés.*, Séminaire Henri Cartan, 3, 1950–1951, Exp. 9.

[GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, 2nd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR1950475 (2003m :18001)

[Gro57] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tōhoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221. MR0102537 (21 #1328)

[ML63] Saunders Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963. MR0156879 (28 #122)

[Mas52] W. S. Massey, *Exact couples in algebraic topology. I, II*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 363–396. MR0052770 (14,672a)

[Sri96] V. Srinivas, *Algebraic K-theory*, 2nd ed., Progress in Mathematics, vol. 90, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996. MR1382659 (97c :19001)

[Voi02] Claire Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002 (French). MR1988456 (2005c :32024a)