Périodes de variétés algébriques

Intégrales abéliennes en mécanique

Le pendule pesant est un système décrit par l'équation différentielle $\ddot{x} + \sin x = 0$ mais aussi par les équations de conservation de l'énergie.

En choisissant comme paramètres l'ordonnée q et $p = \dot{q}$, la conservation de l'énergie $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgq$ peut s'écrire à l'aide d'une équation de la forme

$$p^2 = P(q) = (q-a)(q-b)(q-c)$$

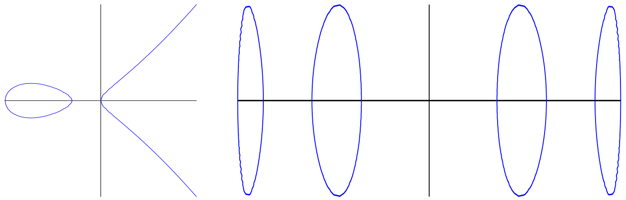
et les équations *de Hamilton*

$$\frac{dp}{dt} = P'(q) \qquad \frac{dq}{dt} = p.$$

La courbe d'équation $p^2 = P(q)$ correspond dans le plan de coordonnées (p, q) au diagramme de phase du pendule : le calcul de la période du pendule est donc ramené à une intégrale de la forme

$$\int dt = \int \frac{dp}{P'(q)} = \int \frac{dq}{p}$$

On les appelle *intégrales abéliennes*, et depuis le 19e siècle, elles sont utilisées pour décrire la géométrie des courbes algébriques, notamment avec les travaux de Riemann, Abel, Jacobi, et Torelli.



Courbes elliptique et hyperelliptique

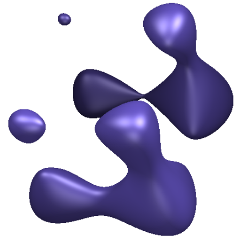
Sur une courbe hyperelliptique, on peut voir plusieurs boucles, chacune ayant sa propre période, correspondant au mouvement d'un point dans un potentiel donné par un polynôme.

Les objets dt, $\frac{dp}{P'(q)}$, $\frac{dq}{p}$ sont appelées *formes différentielles algébriques* sur la courbe.

Périodes des surfaces

Après les courbes, les surfaces sont un cadre naturel pour tenter de généraliser les propriétés des périodes de formes différentielles algébriques.

Les *surfaces K3* sont des surfaces ayant une seule forme différentielle algébrique. Une surface K3 peut être donnée par une équation de degré 4 dans l'espace, comme ci-contre.



Une surface K3 peut être donnée par une équation du type $z^2 = P(x, y)$, où P est un polynôme de degré 6, et possède alors une forme différentielle algébrique $\frac{dxdy}{z}$. Si Σ est un morceau de la surface tracée dans l'espace, on peut calculer la période $\iint_\Sigma \frac{dxdy}{z}$, qui est une variante de la superficie de Σ.

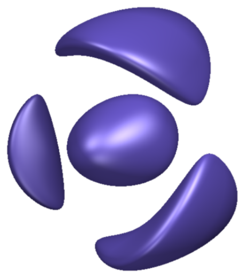
Ci-dessous, l'exemple de la surface d'équation

$$z^2+(x^2+x+y^2-1)(x^2+y^2-y-1)(x^2+y^2+y-1)+0.1 = 0.$$

Les 4 morceaux sont dans le plan (Oxy), et chacun possède une superficie

$$\iint \frac{dxdy}{z}$$

éventuellement différente.



Rémy Oudompheng

Laboratoire J.-A. Dieudonné

Université Nice Sophia Antipolis

Théorème de Torelli

Une courbe algébrique, en plus de contenir des points à coordonnées réelles, contient des points à coordonnées imaginaires, ou complexes, qui la font apparaître comme une surface *de genre g*: il y a donc sur une courbe algébrique des boucles supplémentaires à considérer.

Le **théorème de Torelli** établit que la connaissance de toutes les périodes des formes différentielles algébriques de la courbe, le long des différentes boucles existant sur la courbe (y compris celles à coordonnées imaginaires), permet de reconstituer la courbe algébrique de départ.

Théorème de Torelli des surfaces K3. Si on prend en compte les coordonnées complexes, on peut fabriquer, sur une surface K3, 22 périodes de manière indépendante (sur les figures ci-dessus, il y a quatre « boules » : il y a 18 autres telles sphères dans les coordonnées imaginaires). Un analogue du théorème de Torelli, démontré par Kodaira, Pyateckii-Shapiro, Shafarevich dans les années 70, montre qu'une surface K3 peut être entièrement reconstituée si on connaît seulement les 22 nombres correspondant aux périodes.

Perspectives

Par la suite, d'autres applications de périodes ont été étudiées : elles utilisent souvent des généralisations où la forme différentielle sous l'intégrale n'est pas seulement composée de fractions de polynômes, mais aussi de racines carrées ou cubiques (on dit aussi qu'on étudie les périodes d'un revêtement).

La variation des périodes d'une surface lorsque l'on fait varier son équation est souvent source d'information sur ses déformations possibles (ses *modules*). Les applications de périodes des surfaces aux géométries les plus simples sont maintenant bien comprises. Il s'agit maintenant de s'attaquer aux surfaces dites « de type général » , dont les propriétés sont encore mal connues.