Pendules et courbes elliptiques

Rémy Oudompheng – Laboratoire J.A. Dieudonné

6 mai 2009

L'équation du mouvement d'un pendule peut être déduite de la loi de conservation de l'énergie en mécanique.

On considère un pendule de masse m, accroché à une corde de longueur l, et lâché depuis la hauteur h_0. La conservation de l'énergie mécanique (énergie potentielle et énergie cinétique), s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0$$

où v est la vitesse du pendule et h la hauteur par rapport au centre du pendule. On écrit aussi

$$v^2 = 2g(h_0 - h).$$

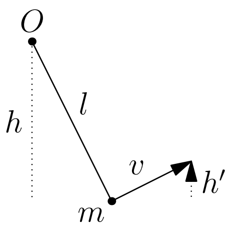

Fig. 1 – Schéma de pendule

En examinant les angles de la figure, on peut écrire une autre équation impliquant non pas v, mais la dérivée de h : c'est la partie verticale de la vitesse. On peut calculer

$$\frac{(h')^2}{v^2} = \frac{l^2 - h^2}{l^2}$$

et en remplaçant v^2 dans l'équation de tout à l'heure :

$$(h')^2 = \frac{2g}{l^2}(h - h_0)(h - l)(h + l).$$

Cela signifie que si on mesure l'ordonnée et la vitesse (verticale) d'un pendule, les points de coordonnées $(h(t), h'(t))$ se trouvent sur la courbe d'équation

$$y^2 = \frac{2g}{l^2}(x + l)(x - l)(x - h_0)$$

qu'on appelle une *courbe elliptique*. On dit que c'est le *diagramme de phase* du pendule. Le point $(h(t), h'(t))$ parcourt la petite boucle de la courbe, et la fonction décrivant h en fonction du temps porte un nom, c'est la *fonction de Weierstrass* de la courbe : elle est périodique, car le mouvement du pendule a une certaine période T.

Il est possible de voir *géométriquement* le déroulement du temps sur le diagramme de phase : c'est la *loi de la sécante*.

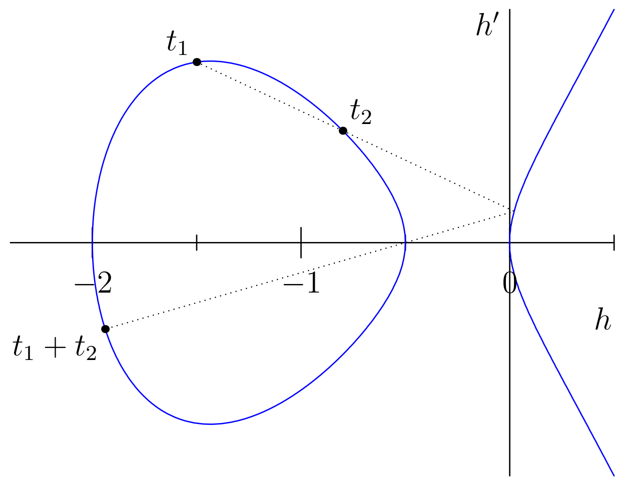

Fig. 2 – Addition des temps

On peut aussi placer l'origine des ordonnées au sommet du pendule, alors la courbe du diagramme de phase est

$$y^2 = \frac{2g}{l^2}(x)(x - 2l)(x - x_0)).$$

C'est une *courbe elliptique*. Depuis le 19e siècle, on s'intéresse aux *périodes* de ces courbes, c'est-à-dire le temps que met le point $(h, \dot{h})$ à parcourir la boucle de la courbe elliptique. Ce qu'on appelle vraiment la période de la courbe est en fait le nombre $\varpi = T/l$, qui dépend de $2l$ et de x_0.

Ce nombre vérifie en fait la propriété extraordinaire suivante : si on construit un autre pendule en remplaçant

$$x_0 \text{ par } \sqrt{2lx_0}$$
$$2l \text{ par } (\frac{\sqrt{2l} + \sqrt{x}}{2})^2$$

le nombre ϖ reste le même ! En répétant l'opération, on trouve que $2l$ et x_0 convergent vers un nombre fixe 2λ. Ce procédé fait de $\sqrt{\lambda}$ la *moyenne arithmético-géométrique* de $\sqrt{l}$ et $\sqrt{x_0/2}$.

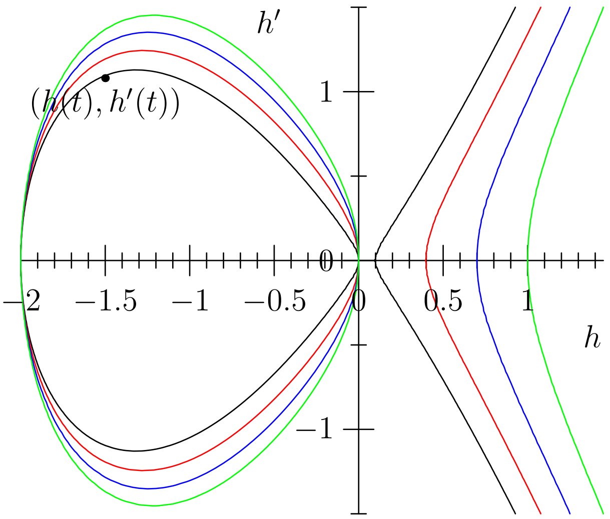

FIG. 3 – Pendules faisant des tours complets

On a alors, tout en gardant la même période, remplacé le pendule quelconque par la situation qu'on étudie habituellement en cours $x_0 \approx 2l$, où un pendule oscille très peu autour de sa position d'équilibre (et sa période est $2\pi\sqrt{\lambda/g}$). On a alors

$$\lambda\varpi = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

La période du pendule est donc très exactement

$$T = l\varpi = \frac{2\pi l}{\sqrt{\lambda g}}$$

où $\sqrt{\lambda}$ est la moyenne arithmético-géométrique de $\sqrt{l}$ et $\sqrt{(l+h_0)/2}$.

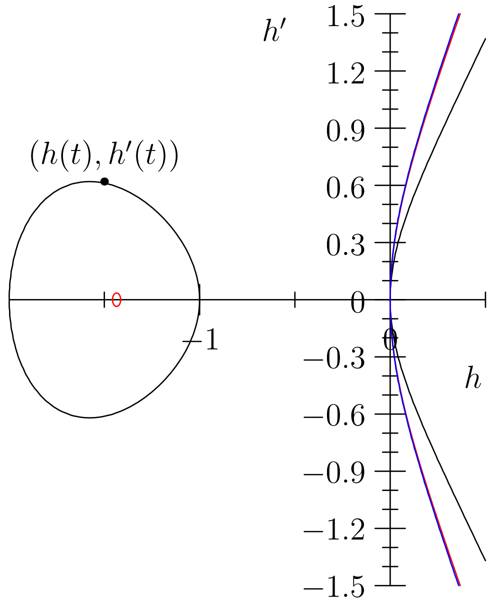

FIG. 4 – Courbes elliptiques ayant la même période

Exemple : à Paris, $g = 9.809$ m/s^2, prenons un pendule d'un mètre de long et lâchons-le de l'horizontale ($h_0 = 0$). On calcule $\sqrt{\lambda}$, qui est la moyenne arithmético-géométrique de 1 et $1/\sqrt{2}$:

Moy. arith.	Moy. géom.
1	0.70710678
0.85355339	0.84089641
0.84722490	0.84720126
0.84721308	0.84721308

On a donc $\lambda = 0.71777$ m et

$$T = 2.368 \text{ secondes}$$

En comparaison, la formule que l'on apprend habituellement nous dit

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2.006 \text{ secondes}$$

Cet algorithme est l'un des plus rapides pour ce calcul : il a été inventé par Gauss au XIXe siècle et est encore utilisé pour le calcul de ces *intégrales elliptiques*.

Deux périodes

Les courbes elliptiques ont en fait deux périodes, ce qui explique pourquoi on les représente souvent sous la forme de tores. La deuxième période se calcule en échangeant le haut et le bas (c'est-à-dire en remplaçant g par $-g$). On peut vérifier que le changement de pendule effectué ci-dessus conserve l'une des périodes mais double l'autre. On déforme ainsi progressivement la courbe elliptique pour que l'une des périodes devienne infinie, ce qui simplifie beaucoup le calcul.

En cryptographie

Les courbes elliptiques sont aussi utilisées en cryptographie, mais on ne regarde que les solutions à coordonnées entières (ou même les solutions *modulo* un certain entier) : ça n'a plus la forme d'une courbe, mais pour comprendre le fonctionnement de ces systèmes, il est indispensable de comprendre comment fonctionnent les «vraies» courbes.