Récapitulatif

On a présenté les anneaux de cycles algébriques $CH(X)$ et $A(X)$ associés à une variété algébrique X. Ces anneaux peuvent être très complexes : par exemple dans le cas d'une courbe C, l'anneau $CH(C)$ contient la jacobienne de la courbe. Ces anneaux de cycles sont encore mal compris.

Si X est une variété abélienne, c'est-à-dire si elle est munie d'une loi de groupe, ces anneaux sont munis de structure supplémentaires qui permettent d'en donner une décomposition en espaces propres pour une famille d'applications $\mathbb{Q}$-linéaires.

Il est naturel de tester cette décomposition sur des variétés abéliennes déjà beaucoup étudiées : les jacobiennes de courbes. En particulier, comme C se plonge dans $Jac(C)$, on peut appliquer cette décomposition au cycle $[C]$:

$$[C] = C_{(0)} + C_{(1)} + ... + C_{(g-1)}.$$

Plusieurs auteurs ont étudié récemment cette décomposition (Beauville, Ceresa, Colombo, Fakhruddin, van der Geer, Ikeda, Kouvidakis, Polishchuk) : il est à la fois difficile de montrer la non nullité de cycles et de trouver des relations entre ces cycles.

La théorie de Brill-Noether étudie l'existence et les propriétés des morphismes des courbes dans les espaces projectifs $\mathbb{P}^r$. Suivant Colombo et van Geemen qui montrent que l'existence d'un morphisme $\Phi : C \to \mathbb{P}^1$ de degré d entraîne la nullité de $\mathbb{C}_{(i)}$ pour $i \geq d-1$, je calcule des relations entre les cycles $C_{(i)}$ lorsque C admet un morphisme $\Phi : C \to \mathbb{P}^r$ de degré d. L'étude de ces relations fait apparaître des quantités géométriques connues, comme le nombre de Castelnuovo : c'est le nombre de $\mathbb{P}^r$ qui coupent la courbe en $2r-2$ points. Il est intéressant de retrouver ces informations géométriques, dans l'optique de reconstruire la courbe à partir de l'anneau des cycles de sa jacobienne. Egalement, leur apparition suggère l'existence d'une réciproque (partielle ?) au théorème de Colombo et van Geemen.

Il est peut être possible de distinguer trois axes dans ce type de travail :

- l'obtention d'une idée géométrique (dans mon cas, utiliser le fait qu'une variété se contracte dans la jacobienne) et des vérifications techniques (des variétés se coupent transversalement, calculs des coefficents qui apparaissent dans les pullback et les pushdown).

- la comparaison des relations obtenues avec celles déjà connues (ici vérifier que les relations sont nouvelles, remarquer et interpréter l'apparition de quantités géométriques connues).

- un travail de combinatoire : les calculs font apparaître de nombreuses sommes à simplifier. La difficulté de la combinatoire qui apparaît guide le choix des méthodes.

herbaut@math.unice.fr
http://math1.unice.fr/ herbaut/