Monades et le Lambda Calcul

Julianna Zsidó

28 septembre 2007

Définition

Une *monade* sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un triplet (R, η, μ) où $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un endofoncteur, $\eta : \mathrm{Id} \stackrel{\cdot}{\to} R$ et $\mu : R^2 \stackrel{\cdot}{\to} R$ deux transformations naturelles qui font commuter les diagrammes suivants pour tout X objet de $\mathcal{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
R^3X \arrow[r, "\mu_{RX}"] \arrow[d, "R\mu_X"'] & R^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
R^2X \arrow[r, "\mu_X"'] & RX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
RX \arrow[r, "R\eta_X"] \arrow[dr, "Id_{RX}"'] & R^2X \arrow[d, "\mu_X"] \arrow[dl, phantom, "I." near start] \arrow[dr, phantom, "II." near start] & RX \arrow[l, "\eta_{RX}"'] \arrow[dl, "Id_{RX}"] \\
& RX &
\end{tikzcd}
$$

Exemples monade

Listes

On note $\ell = [a_1, \dots, a_k]$ une liste d'éléments de $A \in$ Ens de longueur $k \in \mathbb{N}$.
L'opérateur $\mathcal{L}$ sur Ens associant à chaque ensemble A l'ensemble $\{[a_1, \dots, a_n] : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \forall i = 1, \dots, n\}$ est une monade sur Ens :

- $f : A \to B$ application,
  $\mathcal{L}f : \mathcal{L}A \to \mathcal{L}B, [a_1, \dots, a_k] \mapsto [f(a_1), \dots, f(a_k)]$
- $\eta_A : A \to \mathcal{L}A, a \mapsto [a]$
- $\mu_A : \mathcal{L}\mathcal{L}A \to \mathcal{L}A, [[a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}], \dots, [a_{m,1}, \dots, a_{m,n_m}]] \mapsto [a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,n_m}]$
- triangle I. $[a_1, \dots, a_k] \mapsto [[a_1], \dots, [a_k]] \mapsto [a_1, \dots, a_k]$
- triangle II. $[a_1, \dots, a_k] \mapsto [[a_1, \dots, a_k]] \mapsto [a_1, \dots, a_k]$
- carré : concaténation intérieur / extérieur

Exemples monade

Ensemble des parties

L'opérateur $\mathcal{P}$ associant à $X \in \mathsf{Ens}$ l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}X := \{A \in \mathsf{Ens} : A \subseteq X\}$ est une monade sur Ens :

- $f : X \to Y$ application, $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$,
  $A \subseteq X \mapsto \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$
- $\eta_X : X \to \mathcal{P}X, x \mapsto \{x\}$
- $\mu_X : \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}X, \{A_1, \ldots, A_n\} \mapsto \bigcup_{i=1}^n A_i$
- triangle I.
  $\{x_1, \ldots, x_k\} \mapsto \{\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}\} \mapsto \bigcup_{i=1}^k \{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_k\}$
- triangle II. $\{x_1, \ldots, x_k\} \mapsto \{\{x_1, \ldots, x_k\}\} \mapsto \{x_1, \ldots, x_k\}$
- carré : union intérieur / extérieur

Exemples monade

Monade derivée

Soit R une monade sur Ens. On définit la monade derivée R' par
$X \mapsto R'X := R(X^*)$ et
$f : X \to Y \mapsto R'f := R(f^*) : R(X^*) \to R(Y^*)$
où $X^* := X \amalg \{\infty_X\}$.

- $\eta'_X := R\imath_X \circ \eta_X$ où $\imath : X \hookrightarrow X^*$
- $\mu'_X := \mu_{X^*} \circ Rd_X$ où $d_X : (R'X)^* \to R'X$ tel que $d_X \mid_{R'X} = \mathrm{Id}_{R'X}$ et $d_X(\infty_{R'X}) = \eta_{X^*}(\infty_X)$
- triangle I.

$$\begin{tikzcd}
R(X^*) \arrow[r, "R((\eta'_X)^*)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{R(X^*)}"'] \arrow[dr, "R\eta_{X^*}"] & R((R(X^*))^*) \arrow[d, "Rd_X"] \\
R(X^*) & RR(X^*) \arrow[l, "\mu_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

Exemples monade

Monade derivée – suite

- triangle II.

$$\begin{tikzcd}
R((R'X)^*) \arrow[d, "Rd_X"'] & RR(X^*) \arrow[l, "R\imath_{R(X^*)}"'] \arrow[dl, "\mathrm{Id}_{RR(X^*)}"] \arrow[d, "\mu_{X^*}"] & R(X^*) \arrow[l, "\eta_{R(X^*)}"'] \arrow[dl, "\mathrm{Id}_{R(X^*)}"] \\
RR(X^*) \arrow[r, "\mu_{X^*}"'] & R(X^*) &
\end{tikzcd}$$

- carré

$$\begin{tikzcd}
R'R'R'X \arrow[r, "Rd_{R'X}"] \arrow[dd, "R((\mu'_x)^*)"'] & RR'R'X \arrow[r, "\mu_{(R'X)^*}"] \arrow[d, "RRd_X"'] & R'R'X \arrow[d, "Rd_X"] \\
& RRR'X \arrow[r, "\mu_{R'X}"] \arrow[d, "R\mu_{X^*}"'] & RR'X \arrow[d, "\mu_{X^*}"] \\
R'R'X \arrow[r, "Rd_X"'] & RR'X \arrow[r, "\mu_{X^*}"'] & R'X
\end{tikzcd}$$

... comme monoïde

Dans $(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$, la catégorie monoïdale des endofoncteurs sur une catégorie $\mathcal{C}$, une monade est un monoïde.
Les diagrammes commutent grace à l'associativité de $\circ$ et au fait que $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ est l'unité à gauche et à droite.

... et foncteurs adjoints

Soient $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction, $\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ l'unité et $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} GF$ la coünité de l'adjonction.
$(GF, \eta, G\varepsilon F)$ est une monade sur $\mathcal{C}$.
Les diagrammes commutent.

Morphisme de monades

Définition

Soient $(R, \eta^{(R)}, \mu^{(R)})$ et $(S, \eta^{(S)}, \mu^{(S)})$ deux monades sur $\mathcal{C}$. Un *morphisme de monades* τ est une transformation naturelle $R \xrightarrow{\bullet} S$ qui fait commuter les diagrammes suivants pour tout X objet de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^{(R)}_X"] \arrow[dr, "\eta^{(S)}_X"'] & RX \arrow[d, "\tau_X"] \\
& SX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& RRX \arrow[dl, "R\tau_X"'] \arrow[dr, "\tau_{RX}"] \arrow[rr, "\mu^{(R)}_X"] & & RX \arrow[dd, "\tau_X"] \\
RSX \arrow[dr, "\tau_{SX}"'] & & SRX \arrow[dl, "S\tau_X"] & \\
& SSX \arrow[rr, "\mu^{(S)}_X"'] & & SX
\end{tikzcd}$$

Catégorie des monades

Les monades sur $\mathcal{C}$ et les morphismes entre elles forment une catégorie.

Module

Définition

Soit R une monade sur $\mathcal{C}$. Un R–module est un couple (M, σ) consistant en un foncteur $M : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et une transformation naturelle $\sigma : M \circ R \stackrel{\cdot}{\to} M$ qui font commuter le diagramme suivant pour tout X objet de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} MRRX \arrow[r, "\sigma_{RX}"] \arrow[d, "M\mu_X"'] & MRX \arrow[d, "\sigma_X"] \\ MRX \arrow[r, "\sigma_X"'] & MX \end{tikzcd}$$

Module tautologique

Une monade R est un R–module : (R, μ)

Module derivé

Soit R une monade sur Ens et M : Ens $\to$ Ens un R–module. On pose

$$M'X := M(X^*)$$

et

$$\sigma'_X := \sigma_{X^*} \circ Mg_X$$

où $g : (RX)^* \to R(X^*)$ tel que $g\mid_{RX} = R\imath_X$ et
$g(\infty_{RX}) = \eta_{X^*}(\infty_X)$.
M' est un R–module.

Exemples module

Composé

Soient R une monade, M un R–module et F un foncteur composable avec M. Le composé $F \circ M$ est un R–module :

- pour tout X objet de la domaine de M, on pose $\sigma_X^{(F \circ M)} := F\sigma_X^{(M)}$
- carré commute : écrire F devant

Produit

Soient R une monade sur Ens, $(M, \sigma^{(M)})$ et $(N, \sigma^{(N)})$ deux R–modules sur Ens. Le produit (cartésien) de foncteurs $M \times N$ est aussi un R–module :

- pour tout $X \in$ Ens, on pose $\sigma_X^{(M \times N)} := \sigma_X^{(M)} \times \sigma_X^{(N)}$
- carré commute : les carrés pour chaque composante commutent

Morphisme de modules

Définition

Soient R une monade, $(M, \sigma^{(M)})$ et $(N, \sigma^{(N)})$ deux R–modules. Un *morphisme de module* F est une transformation naturelle compatible avec $\sigma^{(M)}$ et $\sigma^{(N)}$ c'est–à–dire qui fait commuter le diagramme suivant pour tout X objet de la domaine de M et N :

$$\begin{tikzcd}
MRX \arrow[r, "\sigma_X^{(M)}"] \arrow[d, "F_{RX}"'] & MX \arrow[d, "F_X"] \\
NRX \arrow[r, "\sigma_X^{(N)}"'] & NX
\end{tikzcd}$$

Monade exponentielle

Définition

Une *monade exponentielle* R est un couple (R, α) où R est une monade et α est un isomorphisme entre le module tautologique R et son derivé R'.

Catégorie des monades exponentielles

Les monades exponentielles et les morphismes de monades compatibles avec α et α^{-1} forment une catégorie.

Objet initial

Théorème

Le Lambda Calcul pur modulo $\beta\eta$–équivalence est l'objet initial dans la catégorie des monades exponentielles.

Le Lambda Calcul

Les Lambda termes

Soit $X \in$ Ens l'ensemble de variables. Les termes du Lambda Calcul, $\mathrm{LC}\,X$ sont définis inductivement :

| var : $X \to \mathrm{LC}\,X$

| app : $\mathrm{LC}\,X \times \mathrm{LC}\,X \to \mathrm{LC}\,X$ ou app : $\mathrm{LC}\,X \to \mathrm{LC}\,X \to \mathrm{LC}\,X$

| abs : $\mathrm{LC}(X^*) \to \mathrm{LC}\,X$

La substitution

- subst : $\mathrm{LC}(\mathrm{LC}\,X) \to \mathrm{LC}\,X$
- bind : $(Y \to \mathrm{LC}\,X) \to \mathrm{LC}\,Y \to \mathrm{LC}\,X$
- Notation de la substitution ponctuelle : $M[x := N]$ où $M, N \in \mathrm{LC}\,X$ et $x \in X$

Le Lambda Calcul

β–réduction

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(M), N) \to_\beta M[\infty := N]$$

où $M \in \mathsf{LC}(X^*)$ et $N \in \mathsf{LC}\,X$.

η–réduction

$$\mathsf{abs}(\mathsf{app}(M, \infty)) \to_\eta M$$

où $M \in \mathsf{LC}\,X$.

Lambda Calcul pur modulo $\beta\eta$–équivalence

La clôture réflexive, symétrique et transitive des relations β et η est une relation d'équivalence sur les termes. On quotiente.

app1

Pour tout $M \in \mathrm{LC}\,X$, on pose

$$\mathrm{app1}(M) := \mathrm{app}(M, \mathrm{var}(\infty))$$
$$\mathrm{app1} : \mathrm{LC}\,X \to \mathrm{LC}(X^*)$$

η révisée

Pour $M \in \mathrm{LC}\,X$:

- $\mathrm{abs}(\mathrm{app}(M, \mathrm{var}(\infty))) =_{\beta\eta} M$

app1

Pour tout $M \in \mathrm{LC}\, X$, on pose

$$\mathrm{app1}(M) := \mathrm{app}(M, \mathrm{var}(\infty))$$
$$\mathrm{app1} : \mathrm{LC}\, X \to \mathrm{LC}(X^*)$$

η révisée

Pour $M \in \mathrm{LC}\, X$:

- $\mathrm{abs}(\mathrm{app}(M, \mathrm{var}(\infty))) =_{\beta\eta} M$
- $\mathrm{abs}(\mathrm{app1}(M)) =_{\beta\eta} M$

app1

Pour tout $M \in \mathrm{LC}\, X$, on pose

$$\mathrm{app1}(M) := \mathrm{app}(M, \mathrm{var}(\infty))$$
$$\mathrm{app1} : \mathrm{LC}\, X \to \mathrm{LC}(X^*)$$

β révisée

Pour $N \in \mathrm{LC}\, X$ et $M \in \mathrm{LC}(X^*)$:

- $\mathrm{app}(\mathrm{abs}(M), N) =_{\beta\eta} M[\infty := N]$

Le Lambda Calcul

app1

Pour tout $M \in \mathrm{LC}\, X$, on pose

$$\mathrm{app1}(M) := \mathrm{app}(M, \mathrm{var}(\infty))$$
$$\mathrm{app1} : \mathrm{LC}\, X \to \mathrm{LC}(X^*)$$

β révisée

Pour $N \in \mathrm{LC}\, X$ et $M \in \mathrm{LC}(X^*)$:

- $\mathrm{app}(\mathrm{abs}(M), N) =_{\beta\eta} M[\infty := N]$
- $\mathrm{app1}(\mathrm{abs}(M)) = \mathrm{app}(\mathrm{abs}(M), \mathrm{var}(\infty)) =_{\beta\eta}$
  $=_{\beta\eta} M[\infty := \mathrm{var}(\infty)] = M$