Université de Nice-Sophia Antipolis

Mémoire de DEA
Spécialité : Mathématiques

Classification des surfaces cubiques projectives singulières

Stéphane CHAU

Encadré par André Galligo et Mohamed Elkadi

Juin 2004

Table des matières

I. Introduction

Une première classification des surfaces cubiques projectives singulières a été faite en 1864 à travers les travaux de Schläfli dans l'article « On the distribution of surfaces of the third order into species » (*Phil. Trans. Roy. Soc. 153*). Toutefois, la théorie qu'il y a derrière est assez complexe et l'apparition de la terminologie et des techniques modernes en théorie des singularités simplifie considérablement les choses. C'est dans cet optique que s'inscrivent les travaux de J.W. Bruce et C.T.C. Wall en 1979 dans l'article « On the classification of cubic surfaces » (*J. London Math. Soc. 19*). On se propose ici d'exposer cela de manière à rendre le discours le plus accessible possible et pour ce faire on donnera tous les résultats généraux et outils permettant d'aborder cette classification. De plus, pour rendre l'aspect théorique plus tangible, nous avons explicité les calculs[1] et donné des illustrations[2] des différents types de singularités rencontrées.

[1] Certains calculs fastidieux ont été fait grâce à **Maple**

[2] Certaines illustrations ont été prises sur le site http://www.cubicsurface.net et d'autres ont été tracé grâce au logiciel **Surf** disponible à l'adresse http://surf.sourceforge.net

II. Généralités

II.1. Formes quadratiques et lemme de Morse

Soit k un corps (commutatif) de caractéristique différente de 2, n un entier naturel non nul et $q : k^n \to k$ une forme quadratique de rang $r \neq 0$.

Proposition II.1.1 : on peut décomposer q sous la forme $q = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i L_i^2$ avec les $\alpha_i \in k^*$ et les L_i des formes linéaires sur k^n qui sont linéairement indépendantes.

Remarques II.1.2 :
i/ Si $k = \mathbb{C}$ alors $\forall i \in \{1,...,r\}$, $\alpha_i^{\frac{1}{2}}$ existe et donc on peut « l'introduire » dans L_i. On peut alors supposer que $\forall i \in \{1,...,r\}$, $\alpha_i = 1$.
ii/ Si $k = \mathbb{R}$ alors on peut faire le même genre de raisonnement mais le signe de α_i a une importance et donc on peut se ramener au cas où $\forall i \in \{1,...,r\}$, $\alpha_i = \pm 1$.

Lemme II.1.3 (lemme de Morse) : soit $a \in \mathbb{R}^n$ et V_a un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : \begin{pmatrix} V_a \to \mathbb{R} \\ a \mapsto 0 \end{pmatrix}$ de classe C^2. On suppose que la hessienne de f en a définit une forme quadratique non dégénérée (i.e. de rang n).
Alors il existe $\phi : U_0 \to U_a$ un difféomorphisme, avec U_0 et U_a deux voisinages ouverts respectifs de 0 et a dans $\mathbb{R}^n$, tel que $(f \circ \phi)(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \pm x_i^2$.

Remarque II.1.4 : le lemme précédent reste valable si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, C^2 par analytique et difféomorphisme par biholomorphe. Pour en savoir plus, on renvoie à [3].

II.2. Polynômes homogènes, quasi-homogènes et semi-quasi-homogènes

Dans cette partie, k désigne un corps (commutatif) et n un entier naturel non nul.

Notations : $k[x_1,...,x_n]$ désigne l'anneau des polynômes à n indéterminées et à coefficients dans k. Si $P \in k[x_1,...,x_n]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et si $i \in \{1,...,n\}$, on note $\partial_{x_i} P$ le polynôme dérivé partiel de P par rapport à x_i.

Définition II.2.1 : soit $P \in k[x_1,...,x_n]$. On dit que P est un polynôme homogène si :

$$\forall \lambda \in k,\ P(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda^{\deg(P)} P(x_1,...,x_n)$$

Remarques II.2.2 :
i/ Si $P \in k[x_0, x_1, ..., x_n]$ est un polynôme homogène, alors les racines non triviales de P (i.e. autre que le $(n+1)-$uplet $(0,0,...,0)$) peuvent être vues comme des éléments de l'espace projectif de dimension n, noté $\mathbf{P}^n(k)$.
ii/ Si P est un polynôme homogène à deux variables et à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors P peut se décomposer en produit de $\deg(P)$ facteurs (homogènes) de degré 1 (non nécessairement deux à deux distincts). On dira que P a $\deg(P)$ racines (vues comme des éléments de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$) comptées avec multiplicité.
iii/ Soit $M_1, ..., M_n \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ (non nécessairement deux à deux distincts). Alors, à un scalaire non nul près, il existe un unique polynôme homogène de degré n à deux variables ayant $M_1, ..., M_n$ pour racines.

Définition II.2.3 : soit $P \in k[x_1, ..., x_n]$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \left(\mathbb{Q}^*\right)^n$ et $d \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est un polynôme quasi-homogène (en abrégé QH) de degré d avec les poids $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ si :

$$\forall \lambda \in k,\ P(\lambda^{\alpha_1} x_1, ..., \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^d P(x_1, ..., x_n)$$

Remarques II.2.4 :
i/ Il convient de ne pas confondre l'entier d (que l'on appellera degré de quasi-homogénéité) avec $\deg(P)$. Toutefois, si P est quasi-homogène de degré d avec les poids $(\underbrace{1, ..., 1}_{n \text{ fois}})$, alors on a $d = \deg(P)$.
ii/ Si P est quasi-homogène de degré d avec les poids $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ alors P est quasi-homogène de degré 1 avec les poids $\left(\frac{\alpha_1}{d}, ..., \frac{\alpha_n}{d}\right)$. Donc on peut toujours se ramener au cas où P est quasi-homogène de degré 1. Lorsque l'on ne précise pas le degré de quasi-homogénéité, on sous entendra qu'il vaut 1.

Définition II.2.5 : soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \left(\mathbb{Q}^*\right)^n$ et soit $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$, on définit le poids par rapport à $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ du monôme $x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$ par : $\alpha_1 k_1 + ... + \alpha_n k_n$.

Définition II.2.6 : soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \left(\mathbb{Q}^*\right)^n$. Soit $P \in k[x_1, ..., x_n]$. On dit que P est *d*-filtré si tous ses monômes sont de poids strictement supérieurs à *d*. Lorsque l'on ne précise pas l'entier *d*, on sous entendra qu'il vaut 1.

Définition II.2.7 : soit $P \in k[x_1, ..., x_n]$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \left(\mathbb{Q}^*\right)^n$ et $d \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est un polynôme semi-quasi-homogène (en abrégé SQH) de degré d avec les poids $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ si $P = P_0 + P_1$ avec P_0 quasi-homogène de degré d avec les poids $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et P_1 *d*-filtré.

Exemples II.2.8 : donnons quelques exemples dans le cas $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

i/ Le polynôme $H(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xyz$ est homogène de degré 3 car $\forall\lambda\in k,\ H(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^3 H(x,y,z)$.

ii/ Le polynôme $Q(x,y,z)=x^3+xy^3+z^2$ est quasi-homogène de degré 1 avec les poids $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{1}{2}\right)$ car $\forall\lambda\in k$, $Q(\lambda^{\frac{1}{3}}x,\lambda^{\frac{2}{9}}y,\lambda^{\frac{1}{2}}z)=(\lambda^{\frac{1}{3}}x)^3+(\lambda^{\frac{1}{3}}x)(\lambda^{\frac{2}{9}}y)^3+(\lambda^{\frac{1}{2}}z)^2=\lambda Q(x,y,z)$.

iii/ Le polynôme $S(x,y,z)=x^2+y^3+xz^2+x(y^2+yz)$ est quasi-homogène de degré 1 avec les poids $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$ car :

$$\forall\lambda\in k,\ S(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda^{\frac{1}{3}}y,\lambda^{\frac{1}{4}}z)=\underbrace{(\lambda^{\frac{1}{2}}x)^2+(\lambda^{\frac{1}{3}})y^3+(\lambda^{\frac{1}{2}}x)(\lambda^{\frac{1}{4}}z)^2}_{\lambda(x^2+y^3+xz^2)}+\underbrace{(\lambda^{\frac{1}{2}}x)\left[(\lambda^{\frac{1}{3}}y)^2+(\lambda^{\frac{1}{3}}y)(\lambda^{\frac{1}{4}}z)\right]}_{\text{n'a que des monômes de poids }>1}$$

Remarque II.2.9 (identité d'Euler) : si $P\in k[x_1,...,x_n]$ est un polynôme homogène alors $P\in\left(\partial_{x_1}P,...,\partial_{x_n}P\right)$. Ainsi, les idéaux $\left(P,\partial_{x_1}P,...,\partial_{x_n}P\right)$ et $\left(\partial_{x_1}P,...,\partial_{x_n}P\right)$ sont égaux. Cela reste valable si on suppose que P est quasi-homogène.

II.3. Multiplicité et inégalité de Bézout

Dans cette section, n désigne un entier naturel non nul et k un corps (commutatif) algébriquement clos.

Notations : $k[[x_1,...,x_n]]$ désigne l'anneau des séries formelles en n indéterminées et à coefficients dans k. Si I est un idéal de cet anneau alors on muni l'anneau quotient $k[[x_1,...,x_n]]/I$ de sa structure naturelle de k-espace vecoriel.

Définition II.3.0 : soit $f\in k[x_1,...,x_n]$, la valuation de f est le plus petit degré des monômes de f.

Définition II.3.1 : soit $f\in k[x_1,...,x_n]$ et $(a_1,...,a_n)\in k^n$ tels que $f(a_1,...,a_n)=0$. On dit que $(a_1,...,a_n)$ est un zéro de f d'ordre m (ou bien que $(a_1,...,a_n)$ est une racine de f de multiplicité m) si m est la valuation de $f(x_1+a_1,...,x_n+a_n)$. On notera par la suite $m_{(a_1,...,a_n)}(f)$ l'ordre de $(a_1,...,a_n)$ en tant que zéro de f.

Remarque II.3.2 : si $(a_1,...,a_n)$ est un zéro de f, alors il est forcément d'ordre au moins 1. En effet vu que $f(a_1,...,a_n)=0$, $f(x_1+a_1,...,x_n+a_n)$ ne peut avoir de terme constant.

Définition II.3.3 : soit $f,g \in k[x_1,...,x_n]$ et $(a_1,...,a_n) \in k^n$ tels que $f(a_1,...,a_n) = g(a_1,...,a_n) = 0$. On pose : $\begin{cases} \tilde{f}(x_1,...,x_n) = f(x_1+a_1,...,x_n+a_n) \\ \tilde{g}(x_1,...,x_n) = g(x_1+a_1,...,x_n+a_n) \end{cases}$.

On définit la multiplicité d'intersection de f et g en $(a_1,...,a_n)$ comme étant la dimension du k-espace vectoriel $k[[x_1,...,x_n]] \Big/ \left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$. On notera par la suite $i_{(a_1,...,a_n)}(f,g)$ cette multiplicité.

Remarque II.3.4 : a priori la multiplicité d'intersection peut être infinie, toutefois si $\left\{P \in k^n / f(P) = 0\right\} \cap \left\{P \in k^n / g(P) = 0\right\}$ est fini alors la multiplicité d'intersection de f et g en $(a_1,...,a_n)$ est finie.

Proposition II.3.5 : soit $f,g \in k[x_1,...,x_n]$ et $P \in k^n$ un zéro de f et g. Alors on a : $i_P(f,g) \geq m_P(f)m_P(g)$.

Proposition II.3.6 : soit $f,g \in k[x,y,z]$ et $(a,b,c) \in k^3$ tels que $f(a,b,c) = g(a,b,c) = 0$. On note $S_g = \left\{P \in k^3 / g(P) = 0\right\}$. Supposons que l'on dispose d'une paramétrisation propre de la surface S_g i.e. d'une application bijective : $\begin{pmatrix} k^2 \to S_g \\ (s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \end{pmatrix}$ avec $x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t) \in k[s,t]$. Alors $i_{(a,b,c)}(f,g)$ est donné par la valuation du polynôme $f(x(s,t)+a, y(s,t)+b, z(s,t)+c)$ (vu comme élément de $k[s,t]$).

Théorème II.3.7 (inégalité de Bézout) : soit $f,g \in k[x,y]$. On suppose que $V(f,g) = \left\{P \in k^2 / f(P) = 0\right\} \cap \left\{P \in k^2 / g(P) = 0\right\}$ est fini.
Alors on a : $\sum_{P \in V(f,g)} i_P(f,g) \leq \deg(f).\deg(g)$.

II.4. Topologie de Zariski

Dans cette partie, k désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul. Lorsque l'on parlera de topologie classique sur k^n, il s'agira de la topologie issue d'une norme sur k^n.

Notation : on note $\mathbf{P}^n(k)$ l'espace projectif de dimension n sur k.

Définition II.4.1 : Soit I un idéal de $k[x_1,...,x_n]$. On appelle ensemble algébrique affine associé à I l'ensemble : $V(I) = \left\{a \in k^n / \forall P \in I,\ P(a) = 0\right\}$.

Proposition II.4.2 : tout ensemble algébrique affine (inclus dans k^n) est l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de polynômes.

Proposition-définition II.4.3 :
i/ k^n et $\varnothing$ sont des ensembles algébriques affines.
ii/ Toute réunion finie d'ensembles algébriques affines est un ensemble algébrique affine.
iii/ Toute intersection d'ensembles algébriques affines est un ensemble algébrique affine.
On peut alors munir k^n d'une topologie dite de Zariski dont les fermés sont les ensembles algébriques affines.

Proposition II.4.4 : tout ouvert de Zariski de k^n qui est non vide est dense pour la topologie classique.

A présent, on se propose d'expliquer le sens du mot générique (terme que l'on sera amené à utiliser par la suite notamment dans l'énoncé du théorème de Bertini).

Définition II.4.5 : une propriété algébrique sur k^n est la donnée d'une famille finie $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ de polynômes de $k[x_1,...,x_n]$. On dira qu'un élément $s \in k^n$ vérifie une telle propriété algébrique si $\forall i \in \{1,...,m\}, f_i(s) = 0$ i.e. si s appartient à l'ensemble algébrique affine associé à l'idéal engendré par $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ (c'est un fermé de Zariski).

Définition II.4.6 : soit $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ une propriété algébrique sur k^n (i.e. une famille finie de polynômes de $k[x_1,...,x_n]$) et soit $S \subset k^n$ le complémentaire de l'ensemble algébrique affine associé à l'idéal engendré par $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ (S est donc un ouvert de Zariski). On dit alors que les éléments de S sont génériques relativement à la propriété algébrique $(f_i)_{1\leq i\leq m}$.

Remarques II.4.7 :
i/ Le sens « intuitif » du mot générique est cohérent avec la définition II.4.6 grâce à la propriété de densité des ouverts de Zariski (proposition II.4.4).
ii/ Dans la pratique les objets que l'on considère ne sont pas forcément des éléments de k^n donc on est souvent amené à faire une identification (cf les exemples qui suivent)

Exemples II.4.8 :
i/ Les hyperplans de k^n sont donnés par des équations de la forme $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ donc on peut identifier un ensemble d'hyperplans de k^n avec l'ensemble des n-uplets de paramètres $(a_1,...,a_n)$ définissant ces hyperplans.
ii/ « Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont génériquement libres »
Donnons une interprétation d'une telle phrase. Notons E l'ensemble des couples de deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^2$ et $S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,/\, ad - bc \neq 0\}$. On dispose alors de la bijection $\begin{pmatrix} E \to S \\ ((a,b),(c,d)) \mapsto (a,b,c,d) \end{pmatrix}$ et donc on peut identifier E à S qui est une partie de $\mathbb{R}^4$.
Notons maintenant $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$ c'est un polynôme de $\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ et donc il caractérise une propriété algébrique. Par définition, S est générique pour cette propriété donc en fait lorsque l'on dit « génériquement libres », cela signifie générique relativement à la propriété f (qui caractérise des vecteurs liés).

Remarques II.4.9 :
i/ Les notions affines qui précèdent ont leurs homologues en projectif à condition que les polynômes considérés soient homogènes.
ii/ Si on se donne une famille finie de propriétés algébriques, on pourra toujours définir la notion de générique relativement à la réunion de toutes ces propriétés algébriques (qui reste une propriété algébrique)
iii/ La définition que nous avons donnée du mot générique dépend a priori d'un certain contexte (la propriété algébrique). Toutefois, dans la pratique, lorsque l'on fait appel au mot générique dans les hypothèses d'une proposition, la propriété algébrique est très souvent omise. Dans ce cas il s'agit d'interpréter le mot « générique » par « ne vérifiant pas un certain nombre fini de propriétés algébriques ». Cette commodité de langage se retrouve également dans certains raisonnements en analyse lorsque l'on énonce une proposition où l'hypothèse est de la forme « pour m suffisamment grand ».

Théorème II.4.10 (théorème de Bertini) : On suppose ici que $n \geq 3$. Soit H une hypersurface irréductible de $\mathbf{P}^n(k)$. Alors l'intersection de H avec un hyperplan générique de $\mathbf{P}^n(k)$ reste irréductible. (cf [5])

III. Théorie des singularités

III.1. Généralités sur les singularités des hypersurfaces algébriques

Dans cette section, n désigne un entier naturel non nul et $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La topologie considérée sur k^n est celle issue d'une norme sur k^n.

Définitions III.1.1 : soit S une hypersurface de k^n définie par un polynôme $P \in k[x_1,...,x_n]$ (i.e. $S = \left\{(a_1,...,a_n) \in k^n \,/\, P(a_1,...,a_n) = 0\right\}$). Un point singulier de S est un élément $(a_1,...,a_n) \in S$ tel que $\partial_{x_1} P(a_1,...,a_n) = ... = \partial_{x_n} P(a_1,...,a_n) = 0$. Une singularité a est dite isolée s'il existe un voisinage de a dans lequel tous les autres points ne sont pas singuliers. Si S n'a pas de singularité alors on dit que S est lisse.

Remarques III.1.2 :
i/ Un point de S est singulier si et seulement si c'est un zéro de P d'ordre au moins 2.
ii/ Quitte à considérer $P(x_1 + a_1,...,x_n + a_n)$ plutôt que $P(x_1,...,x_n)$, on peut toujours supposer que la singularité est en $0 \in k^n$.

Proposition III.1.3 : soit S une hypersurface de k^n définie par un polynôme $P \in k[x_1,...,x_n]$ admettant 0 comme point singulier, alors 0 est une singularité isolée si et seulement si $k[[x_1,...,x_n]] \big/ \left(P, \partial_{x_1} P,...,\partial_{x_n} P\right)$ est de dimension finie.

Remarque III.1.4 : dans la pratique on aura souvent P homogène ou quasi homogène donc (remarque II.2.9) on pourra considérer $k[[x_1,...,x_n]] \big/ \left(\partial_{x_1} P,...,\partial_{x_n} P\right)$ plutôt que $k[[x_1,...,x_n]] \big/ \left(P,\partial_{x_1} P,...,\partial_{x_n} P\right)$.

III.2. Déformations et singularités simples

Dans cette section, on introduit la notion de déformation pour pouvoir définir les singularités simples. Dans la mesure où l'on s'intéresse à des polynômes, on ne considérera que des fonctions qui sont définies sur tout $\mathbb{R}^n$ ce qui nous dispensera de nous placer sur des ouverts qu'il faudrait à chaque fois préciser.

Définition III.2.1 : soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction C^∞ au voisinage de 0, on appelle déformation de f en 0 une fonction de la forme $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^p$ (avec $l \in \mathbb{N}^*$) qui est C^∞ au voisinage de $(0,0)$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ F(x,0) = f(x)$.
L'espace $\mathbb{R}^l$ est appelé la base de la déformation et ses éléments sont appelés les paramètres de la déformation.

Définition III.2.2 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ au voisinage de 0. Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ une déformation de f en 0. On dit que F est une déformation verselle de f en 0 si toute autre déformation de f se déduit, par changement de base, d'une déformation équivalente à F. En d'autres termes, F est une déformation verselle de f en 0 si pour toute déformation $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de f en 0, il existe :

i/ $\psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \\ 0 \mapsto 0 \end{pmatrix}$ qui est C^∞ au voisinage de 0 (appelé changement de base)

ii/ $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ (0,0) \mapsto 0 \end{pmatrix}$ une déformation de l'identité de $\mathbb{R}^n$.

tels que $\forall (y,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ G(y,\mu) = F\left(\varphi(y,\mu),\psi(\mu)\right)$

Proposition III.2.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ au voisinage de 0. Supposons que l'espace quotient $\mathbb{R}[[x_1,...,x_n]] \big/ \left(f,\partial_{x_1} f,...,\partial_{x_n} f\right)$ soit de dimension finie et soit $(e_1,...,e_s)$ une base monomiale de cet espace alors

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R} \\ \left((x_1,...,x_n),(a_1,...,a_s)\right) \mapsto f(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{s} a_i e_i \end{pmatrix}$$ est une déformation verselle de f.

Définition III.2.4 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 0 \end{pmatrix}$ une fonction C^∞ au voisinage de 0.
Supposons que f ait une singularité en 0 (i.e. que $\partial_{x_1} f(0) = ... = \partial_{x_n} f(0) = 0$). Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ une déformation verselle de f en 0 et G le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui fixent 0.
On dit que deux éléments $(a_1,...,a_s)$ et $(b_1,...,b_s)$ sont dans une même strate si : $\exists \varphi \in G / \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ F\big((x_1,...,x_n),(a_1,...,a_s)\big) = F\big(\varphi(x_1,...,x_n),(b_1,...,b_s)\big)$. Cela définit une relation d'équivalence sur l'espace des paramètres et chaque classe d'équivalence définit une strate. La singularité 0 de f est dite simple s'il n'y a qu'un nombre fini de strates.

Remarque III.2.5 : tout ce qui précède reste valable si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et C^∞ par analytique.

Théorème III.2.6 : soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ (z_1,...,z_n) \mapsto f(z_1,...,z_n) \\ 0 \mapsto 0 \end{pmatrix}$ une fonction analytique admettant une singularité en 0. Alors la singularité est simple si et seulement si f est équivalente à une des formes (dites normales) suivantes :

$$A_k : z_1^{k+1} + \sum_{i=2}^{n} z_i^2 \quad \text{(pour } k \geq 1)$$

$$D_k : z_1^{k-1} + z_1 z_2^2 + \sum_{i=3}^{n} z_i^2 \quad \text{(pour } k \geq 4)$$

$$E_6 : z_1^3 + z_2^4 + \sum_{i=3}^{n} z_i^2$$

$$E_7 : z_1^3 + z_1 z_2^3 + \sum_{i=3}^{n} z_i^2$$

$$E_8 : z_1^3 + z_2^5 + \sum_{i=3}^{n} z_i^2$$

En d'autres termes, 0 est une singularité simple de f si et seulement s'il existe $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \\ 0 \mapsto 0 \end{pmatrix}$ une fonction analytique telle que $(f \circ \varphi)(z_1,...,z_n)$ soit de l'une des formes précédentes.

Remarques III.2.8 :
i/ Ce résultat est démontré par Arnol'd dans [1] et [2]
ii/ Si on ne considère pas D_k pour $k < 4$ c'est parce que D_1, D_2, D_3 sont respectivement équivalents à A_1, A_2, A_3.

III.3. Principe de reconnaissance

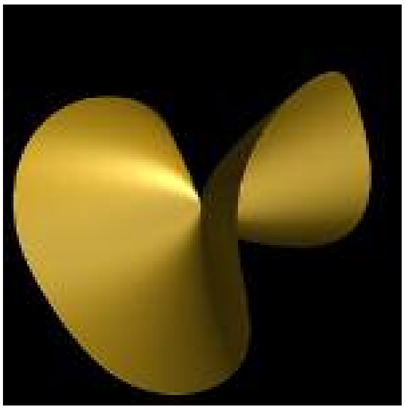
Dorénavant sauf mention explicite du contraire (notamment lorsqu'il s'agira de prendre des exemples concrets), le corps de base que l'on considérera sera toujours $\mathbb{C}$. On se limitera au cas des surfaces.

On a déjà vu (Théorème III.2.6) que les formes normales des singularités simples d'hypersurfaces en dimension 3 sont données par :

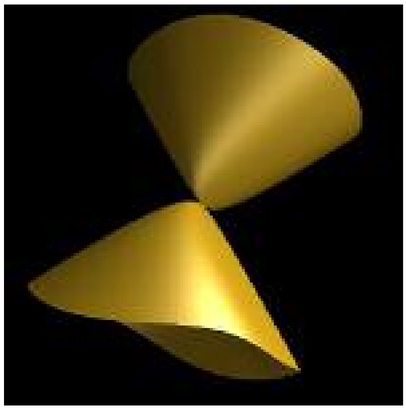
$$A_k : z_1^{k+1} + z_2^2 + z_3^2 \quad (\text{pour } k \geq 1)$$
$$D_k : z_1^{k-1} + z_1 z_2^2 + z_3^2 \quad (\text{pour } k \geq 4)$$
$$E_6 : z_1^3 + z_2^4 + z_3^2$$
$$E_7 : z_1^3 + z_1 z_2^3 + z_3^2$$
$$E_8 : z_1^3 + z_2^5 + z_3^2$$

Illustrations III.3.0 : donnons des illustrations en réel de certains types de ces singularités

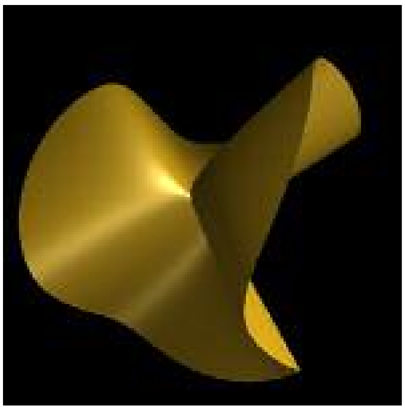
Surface $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
(singularité A_1)



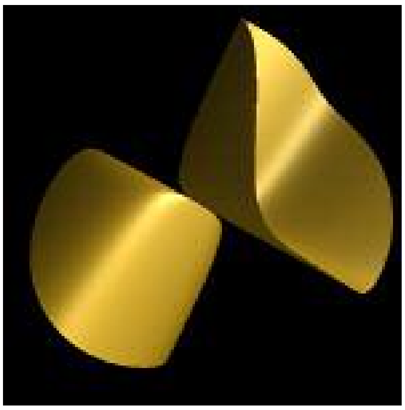
Surface $x^3 + y^2 - z^2 = 0$
(singularité A_2)



Surface $x^4 + y^2 - z^2 = 0$
(singularité A_3)

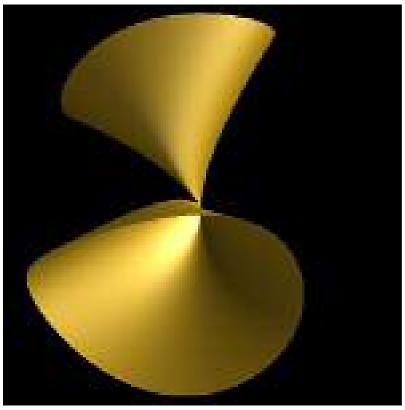


Surface $x^5 + y^2 - z^2 = 0$
(singularité A_4)

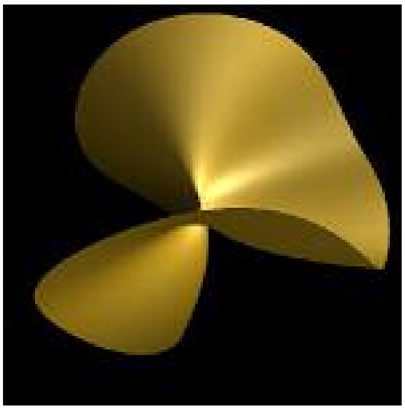


Surface $x^6 + y^2 - z^2 = 0$
(singularité A_5)

Surface $x^3 + 4xy^2 + 3z^2 = 0$
(singularité D_4)

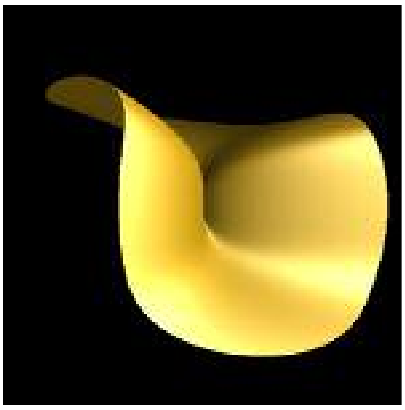


Surface $x^4 + 4xy^2 + 3z^2 = 0$
(singularité D_5)



Surface $x^3 + y^4 - z^2 = 0$
(singularité E_6)

Surface $x^3 + xy^3 - z^2 = 0$
(singularité E_7)



Surface $x^3 + y^5 - z^2 = 0$
(singularité E_8)

On se propose de donner un principe de reconnaissance pour identifier ces types de singularités lorsque l'on a affaire à des polynômes qui ne sont pas sous une des formes normales précédentes.

Remarquons pour commencer que chaque forme normale est donnée par un polynôme quasi-homogène. On donne les poids correspondant dans chaque cas de manière à avoir toujours un degré de quasi-homogénéité égal à 1. Les poids correspondants respectivement aux variables z_1, z_2, z_3 sont donnés dans le tableau qui suit.

Tableau III.3.1 :

Type de singularité simple	Poids correspondants
$A_k \quad (k \geq 1)$	$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$D_k \quad (k \geq 4)$	$\left(\frac{1}{k-1}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, \frac{1}{2}\right)$
E_6	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
E_7	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}\right)$
E_8	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$

Pour s'en convaincre, il suffit de le vérifier par le calcul. Faisons le par exemple pour D_k :
On remplace dans l'expression de D_k, z_1, z_2, z_3 respectivement par $\lambda^{\frac{1}{k-1}} z_1$, $\lambda^{\frac{(k-2)}{2(k-1)}} z_2$, $\lambda^{\frac{1}{2}} z_3$.
On obtient alors $\left(\lambda^{\frac{1}{k-1}} z_1\right)^{k-1} + \left(\lambda^{\frac{1}{k-1}} z_1\right)\left(\lambda^{\frac{(k-2)}{2(k-1)}} z_2\right)^2 + \left(\lambda^{\frac{1}{2}} z_3\right)^2 = \lambda\left(z_1^{k-1} + z_1 z_2^2 + z_3^2\right)$.

A présent, on liste tous les monômes de poids 1 en z_1, z_2, z_3 pour des triplets de poids donnés correspondants chacun à un type de singularité simple.

Tableau III.3.2 :

Type de singularité simple	Poids correspondants	Monômes de poids 1
$A_{2m} \quad (m \geq 1)$	$\left(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^{2m+1},\ z_2^2,\ z_2 z_3,\ z_3^2)$
$A_{2m-1} \quad (m \geq 1)$	$\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^{2m},\ z_2 z_1^m,\ z_3 z_1^m,\ z_2^2,\ z_2 z_3,\ z_3^2)$
$D_{2m} \quad (m \geq 2)$	$\left(\frac{1}{2m-1}, \frac{(m-1)}{(2m-1)}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^{2m-1},\ z_1 z_2^2,\ z_1^m z_2,\ z_3^2)$
$D_{2m+1} \quad (m \geq 2)$	$\left(\frac{1}{2m}, \frac{(2m-1)}{4m}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^{2m},\ z_1 z_2^2,\ z_1^m z_3,\ z_3^2)$
E_6	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^3,\ z_2^4,\ z_2^2 z_3,\ z_3^2)$
E_7	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^3,\ z_1 z_2^3,\ z_3^2)$
E_8	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$	$(z_1^3,\ z_2^5,\ z_3^2)$

Traitons par exemple le cas E_6. Un monôme en z_1, z_2, z_3 s'écrit sous la forme $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$. Les variables z_1, z_2, z_3 sont affectées respectivement des poids $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ donc le monôme $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$ est de poids 1 si et seulement si $\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{2} = 1$.
Vu que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} > 1$, on en déduit que nécessairement un des trois exposants est nul.

1$^{\text{er}}$ cas : $\alpha_1 = 0$ alors on est ramené à $\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4$ donc $(\alpha_2, \alpha_3) = (0,2)$ ou $(2,1)$ ce qui donne les monômes z_3^2 et $z_2^2 z_3$.
2$^{\text{ème}}$ cas : $\alpha_2 = 0$ alors on est ramené à $2\alpha_1 + 3\alpha_3 = 6$ donc $(\alpha_1, \alpha_3) = (0,2)$ ou $(3,0)$ ce qui donne les monômes z_3^2 et z_1^3.
3$^{\text{ème}}$ cas : $\alpha_3 = 0$ alors on est ramené à $4\alpha_1 + 3\alpha_2 = 12$ donc $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,4)$ ou $(3,0)$ ce qui donne les monômes z_2^4 et z_1^3.
Finalement $(z_1^3,\ z_2^4,\ z_2^2 z_3,\ z_3^2)$ sont les seuls monômes de poids 1.

Lemme III.3.3 :
a/ Soit $f(z_1, z_2, z_3)$ un polynôme SQH de degré 1 avec un triplet de poids du tableau III.3.2, on suppose que la partie QH f_0 de f définit une singularité isolée (en 0). Alors par un changement de coordonnées adéquat, on peut toujours se ramener à un polynôme SQH dont la partie QH est de la forme normale de poids correspondants à ceux de f_0 (i.e. après changement de coordonnées, f_0 est d'une des formes A_k, D_k, E_6, E_7, E_8) on parlera de forme normale relevée de *f*.

b/ Si $g(z_1, z_2, z_3)$ est un polynôme (QH) d'une des formes normales A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 alors $\mathbb{C}[[z_1, z_2, z_3]] \big/ (\partial_{z_1} g, \partial_{z_2} g, \partial_{z_3} g)$ admet une base (sur $\mathbb{C}$) composée de monômes de poids strictement inférieur à 1.

Démonstration

a/ On fait une démonstration explicite en construisant pour chaque cas le changement de coordonnées en question. Toutefois, les calculs sont fastidieux et répétitifs donc on ne traitera pas tous les cas.
1$^{\text{er}}$ cas : f_0 est QH de degré 1 avec les poids $\left(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Alors par le tableau III.3.2 (qui liste les monômes de poids 1 correspondants) on en peut écrire :

$$f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m+1} + a_2 z_2^2 + a_3 z_2 z_3 + a_4 z_3^2$$

Si $a_2 \neq 0$ alors on écrit : $f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m+1} + a_2 z_2^2 + a_3 z_2 z_3 + a_4 z_3^2$

$$= a_1 z_1^{2m+1} + a_2 \left(z_2 + \frac{a_3}{2a_2} z_3 \right)^2 - \frac{a_3^2}{4a_2} z_3^2 + a_4 z_3^2$$

$$= a_1 z_1^{2m+1} + a_2 \tilde{z}_2^2 + \left(a_4 - \frac{a_3^2}{4a_2} \right) z_3^2$$

avec $\tilde{z}_2 = z_2 + \frac{a_3}{2a_2} z_3$ et donc f_0 est de la forme A_{2m}. Reste à voir que tous les autres monômes de f restent de poids >1 par ce changement de coordonnées.
On a $z_2 = \tilde{z}_2 - \frac{a_3}{2a_2} z_3$ avec $\tilde{z}_2$ et z_3 de poids $\frac{1}{2}$. Comme z_2 est de poids $\frac{1}{2}$, tout monôme en z_1, z_2, z_3 de poids >1 restera de poids >1 si on remplace z_2 par $\tilde{z}_2 - \frac{a_3}{2a_2} z_3$.

Si $a_2 = 0$ alors $f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m+1} + a_3 z_2 z_3 + a_4 z_3^2$. On distingue deux sous cas : si $a_4 = 0$ alors $f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m+1} + a_3 z_2 z_3 = a_1 z_1^{2m+1} + a_3 \tilde{z}_2^2 + a_3 \tilde{z}_3^2$ avec $\begin{cases} \tilde{z}_2 = \dfrac{z_2 + z_3}{2} \\ \tilde{z}_3 = \dfrac{z_2 - z_3}{2i} \end{cases}$ donc f_0 est bien de la forme A_{2m}, sinon (si $a_4 \neq 0$) alors on écrit :

$$f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m+1} + a_3 z_2 z_3 + a_4 z_3^2 = a_1 z_1^{2m+1} + a_4 \left(z_3 + \frac{a_3}{2a_4} z_2 \right)^2 - \frac{a_3^2}{4a_4} z_2^2 = a_1 z_1^{2m+1} - \frac{a_3^2}{4a_4} z_2^2 + a_4 \tilde{z}_3^2$$

avec $\tilde{z}_3 = z_3 + \frac{a_3}{2a_4} z_2$ et donc f_0 est encore de la forme A_{2m}.
Par le même argument que dans le cas $a_2 \neq 0$, tous les autres monômes de f restent de poids >1 par les deux changements de coordonnées qui précèdent.

On fait de même pour le cas où f_0 est QH avec les poids de la forme normale A_{2m-1}.
<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : f_0 est QH de degré 1 avec les poids $\left(\frac{1}{2m}, \frac{(2m-1)}{4m}, \frac{1}{2} \right)$. Alors on peut écrire :

$$f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m} + a_2 z_1 z_2^2 + a_3 z_1^m z_3 + a_4 z_3^2$$

Si $a_4 = 0$ alors $f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^{2m} + a_2 z_1 z_2^2 + a_3 z_1^m z_3$ et on a alors :

$$\begin{cases} \partial_{z_1} f_0 = 2m a_1 z_1^{2m-1} + a_2 z_2^2 + m a_3 z_1^{m-1} z_3 \\ \partial_{z_2} f_0 = 2 a_2 z_1 z_2 \\ \partial_{z_3} f_0 = a_3 z_1^m \end{cases}$$

La variable z_3 n'apparaissant dans aucun terme de queue de ces trois polynômes dérivés, on en déduit que $\mathbb{C}[[z_1, z_2, z_3]] \big/ (\partial_{z_1} f_0, \partial_{z_2} f_0, \partial_{z_3} f_0)$ est de dimension infinie et donc f_0 ne définit plus une singularité isolée en 0 ce qui est exclu par hypothèse.
Ainsi, $a_4 \neq 0$. Ceci étant dit, on écrit :

$$\begin{aligned} f_0(z_1, z_2, z_3) &= a_1 z_1^{2m} + a_2 z_1 z_2^2 + a_3 z_1^m z_3 + a_4 z_3^2 \\ &= a_2 z_1 z_2^2 + a_4 \left(z_3 + \frac{a_3}{2a_4} z_1^m \right)^2 + \left(a_1 - \frac{a_3^2}{4a_4} \right) z_1^{2m} \\ &= \left(a_1 - \frac{a_3^2}{4a_4} \right) z_1^{2m} + a_2 z_1 z_2^2 + a_4 \tilde{z}_3^2 \end{aligned}$$

avec $\tilde{z}_3 = z_3 + \dfrac{a_3}{2a_4} z_1^m$ et donc f_0 est de la forme D_{2m+1}.

On a $z_3 = \tilde{z}_3 - \dfrac{a_3}{2a_4} z_1^m$ avec $\tilde{z}_3$ et z_1^m de poids $\dfrac{1}{2}$. Comme z_3 est de poids $\dfrac{1}{2}$, tout monôme en z_1, z_2, z_3 de poids >1 restera de poids >1 si on remplace z_3 par $\tilde{z}_3 - \dfrac{a_3}{2a_4} z_1^m$.

On fait de même pour le cas où f_0 est QH avec les poids de la forme normale D_{2m}.

3ème cas : f_0 est QH de degré 1 avec les poids $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$. Alors on peut écrire :

$$f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^3 + a_2 z_2^4 + a_3 z_2^2 z_3 + a_4 z_3^2$$

Si $a_4 = 0$ alors $f_0(z_1, z_2, z_3) = a_1 z_1^3 + a_2 z_2^4 + a_3 z_2^2 z_3$ et on a alors : $\begin{cases} \partial_{z_1} f_0 = 3a_1 z_1^2 \\ \partial_{z_2} f_0 = 4a_2 z_2^3 + 2a_3 z_2 z_3 \\ \partial_{z_3} f_0 = a_3 z_2^2 \end{cases}$

Aucun polynôme de l'idéal $(\partial_{z_1} f_0, \partial_{z_2} f_0, \partial_{z_3} f_0)$ ne peut avoir une puissance de z_3 comme monôme de queue donc $\mathbb{C}[[z_1, z_2, z_3]] \big/ (\partial_{z_1} f_0, \partial_{z_2} f_0, \partial_{z_3} f_0)$ est de dimension infinie. On en déduit donc que $a_4 \neq 0$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f_0(z_1, z_2, z_3) &= a_1 z_1^3 + a_2 z_2^4 + a_3 z_2^2 z_3 + a_4 z_3^2 \\ &= a_1 z_1^3 + \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4a_4}\right) z_2^4 + a_4 \left(z_3 + \frac{a_3}{2a_4} z_2^2\right)^2 \\ &= a_1 z_1^3 + \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4a_4}\right) z_2^4 + a_4 \tilde{z}_3^2 \end{aligned}$$

avec $\tilde{z}_3 = z_3 + \dfrac{a_3}{2a_4} z_2^2$ et donc f_0 est de la forme E_6.

Toujours par le même argument tout monôme en z_1, z_2, z_3 de poids >1 restera de poids >1 si on remplace z_3 par $\tilde{z}_3 - \dfrac{a_3}{2a_4} z_2^2$.

4ème cas : f_0 est QH de degré 1 avec les poids $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{2}\right)$ ou $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}\right)$ alors il n'y a rien à faire car f_0 est automatiquement de la forme E_7 ou E_8.

b/ Comme pour a/, on traite tous les cas.

<u>1^{er} cas</u> : $g(z_1,z_2,z_3)=z_1^{k+1}+z_2^2+z_3^2$ avec $k\geq 1$ (correspond à A_k) alors : $\begin{cases}\partial_{z_1}g=(k+1)z_1^k\\ \partial_{z_2}g=2z_2\\ \partial_{z_3}g=2z_3\end{cases}$

Donc $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]]\big/(\partial_{z_1}g,\partial_{z_2}g,\partial_{z_3}g)\;\cong\;\mathbb{C}[[z_1]]\big/(z_1^k)$ et donc on a une base formée par les éléments $\dot{1},\ \dot{z}_1,\ \dot{z}_1^2,\dots,\ \dot{z}_1^{k-1}$ qui sont des monômes de poids tous <1 à savoir respectivement $0,\ \dfrac{1}{k+1},\ \dfrac{2}{k+1},\dots,\ \dfrac{k-1}{k+1}$.

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $g(z_1,z_2,z_3)=z_1^{k-1}+z_1z_2^2+z_3^2$ avec $k\geq 4$ (correspond à D_k), alors :
$\begin{cases}\partial_{z_1}g=(k-1)z_1^{k-2}+z_2^2\\ \partial_{z_2}g=2z_1z_2\\ \partial_{z_3}g=2z_3\end{cases}$

Donc $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]]\big/(\partial_{z_1}g,\partial_{z_2}g,\partial_{z_3}g)\;\cong\;\mathbb{C}[[z_1,z_2]]\big/\left(z_1z_2,\ (k-1)z_1^{k-2}+z_2^2\right)$

Or $z_1^{k-1}\in\left(z_1z_2,\ (k-1)z_1^{k-2}+z_2^2\right)$ car $z_1^{k-1}=\dfrac{1}{1-k}\left(z_2(z_1z_2)-z_1((k-1)z_1^{k-2}+z_2^2)\right)$ et donc
$\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]]\big/(\partial_{z_1}g,\partial_{z_2}g,\partial_{z_3}g)\;\cong\;\mathbb{C}[[z_1,z_2]]\big/\left(z_1^{k-1},z_1z_2,\ (k-1)z_1^{k-2}+z_2^2\right)$ ce dernier quotient admet comme base $\dot{z}_2,\ \dot{1},\ \dot{z}_1,\ \dot{z}_1^2,\dots,\ \dot{z}_1^{k-2}$ qui sont des monômes de poids tous <1 à savoir respectivement $\dfrac{k-2}{2(k-1)},\ 0,\ \dfrac{1}{k-1},\ \dfrac{2}{k-1},\dots,\ \dfrac{k-2}{k-1}$.

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> : $g(z_1,z_2,z_3)=z_1^3+z_2^4+z_3^2$ (correspond à E_6), alors : $\begin{cases}\partial_{z_1}g=3z_1^2\\ \partial_{z_2}g=4z_2^3\\ \partial_{z_3}g=2z_3\end{cases}$

Donc $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]]\big/(\partial_{z_1}g,\partial_{z_2}g,\partial_{z_3}g)\;\cong\;\mathbb{C}[[z_1,z_2]]\big/\left(3z_1^2,4z_2^3\right)$ ce dernier quotient admet comme base $\dot{z}_2^2,\ \dot{z}_2^2\dot{z}_1,\dot{z}_2,\dot{z}_2\dot{z}_1,\ \dot{1},\ \dot{z}_1$ qui sont des monômes de poids respectifs $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{7}{12},\ 0,\ \dfrac{1}{3}$.

<u>$4^{\text{ème}}$ cas</u> : $g(z_1,z_2,z_3)=z_1^3+z_1z_2^3+z_3^2$ (correspond à E_7), alors : $\begin{cases}\partial_{z_1}g=3z_1^2+z_2^3\\ \partial_{z_2}g=3z_1z_2^2\\ \partial_{z_3}g=2z_3\end{cases}$

Donc $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]]\big/(\partial_{z_1}g,\partial_{z_2}g,\partial_{z_3}g)\;\cong\;\mathbb{C}[[z_1,z_2]]\big/\left(3z_1^2+z_2^3,z_1z_2^2\right)$

Or $z_2^5 \in \left(3z_1^2+z_2^3, z_1z_2^2\right)$ car $z_2^5 = z_2^2(3z_1^2+z_2^3) - 3z_1(z_1z_2^2)$ et donc $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]] \big/ (\partial_{z_1}g, \partial_{z_2}g, \partial_{z_3}g) \cong \mathbb{C}[[z_1,z_2]] \big/ \left(z_2^5, 3z_1^2+z_2^3, z_1z_2^2\right)$ ce dernier quotient admet comme base $\dot z_2^4,\ \dot z_2^3,\ \dot z_2^2,\ \dot z_2,\ \dot z_2\dot z_1,\ \dot 1,\ \dot z_1$ qui sont des monômes de poids respectifs $\frac{8}{9}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, 0, \frac{1}{3}$

<u>5$^{\text{ème}}$ cas</u> : $g(z_1,z_2,z_3) = z_1^3 + z_2^5 + z_3^2$ (correspond à E_8), alors : $\begin{cases} \partial_{z_1}g = 3z_1^2 \\ \partial_{z_2}g = 5z_2^4 \\ \partial_{z_3}g = 2z_3 \end{cases}$

Donc $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]] \big/ (\partial_{z_1}g, \partial_{z_2}g, \partial_{z_3}g) \cong \mathbb{C}[[z_1,z_2]] \big/ \left(z_1^2, z_2^4\right)$ ce dernier quotient admet comme base $\dot z_2^3,\ \dot z_2^3\dot z_1,\ \dot z_2^2,\ \dot z_2^2\dot z_1,\ \dot z_2,\ \dot z_2\dot z_1, \dot 1,\ \dot z_1$ qui sont des monômes de poids respectifs $\frac{3}{5}, \frac{14}{15}, \frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{1}{5}, \frac{8}{15}, 0, \frac{1}{3}$

<u>Remarques III.3.4</u> :
i/ La <u>codimension</u> d'une singularité est par définition la dimension de l'espace quotient considéré dans le b/ du lemme III.3.3. Il résulte de la démonstration de ce lemme que A_k et D_k sont de codimension k et que E_6, E_7 et E_8 sont respectivement de codimension 6, 7 et 8. Dans le cas d'une configuration où l'hypersurface considérée admet plusieurs singularités, la codimension de cette dernière configuration sera la somme des codimensions de chacune de ses singularités.
ii/ Selon la terminologie d'Arnol'd (cf [1] et [2]), les bases monomiales que l'on a construit dans le b/ du lemme III.3.3 sont dites <u>régulières</u>. Un monôme d'une telle base (qui dépend a priori de g) est dit <u>superdiagonal</u> s'il est de poids strictement supérieur au degré de quasi-homogénéité de g (qui ici vaut 1).
iii/ Théorème 9.5 d'Arnol'd (dans l'article [2]) : soit f un polynôme. On note f_0 la partie de f contenant les monômes de f de poids minimal. On suppose en outre que f_0 est quasi-homogène et définit une singularité isolée en 0. Alors, on peut construire une base régulière de $\mathbb{C}[[z_1,z_2,z_3]] \big/ (\partial_{z_1}f_0, \partial_{z_2}f_0, \partial_{z_3}f_0)$ et il existe des éléments superdiagonaux $e_1,\dots,e_s$ associés à cette base régulière et tels que, par un changement de coordonnées, f s'écrive sous la forme $f_0 + c_1e_1 + \dots + c_se_s$ avec $c_1,\dots,c_s \in \mathbb{C}$.

<u>Corollaire III.3.5</u> (principe de reconnaissance) : si $f(z_1,z_2,z_3)$ vérifie les hypothèses a/ du lemme III.3.3 alors f est équivalente à sa forme normale relevée.

<u>Démonstration</u>

Par le lemme III.3.3 a/ f est équivalente à $\tilde f_0 + f_1$ avec $\tilde f_0$ la forme normale relevée de f et f_1 la partie filtrée de f (ne contenant que des monômes de poids >1). $\tilde f_0 + f_1$ vérifie les hypothèses du théorème 9.5 d'Arnol'd, de plus par le b/ du même lemme, $\tilde{f}_0$ n'a pas d'élément superdiagonal donc on en déduit que $\tilde{f}_0 + f_1$ est équivalente à $\tilde{f}_0$. Par suite f est équivalente à $\tilde{f}_0$.

Remarque III.3.6 : le résultat qui précède (qui reste valable dans le cas à deux variables) va nous être très utile par la suite. Toutefois, même si elle est essentielle, on ne vérifiera pas systématiquement l'hypothèse sur la partie QH des polynômes que l'on considérera (elle doit définir une singularité isolée). Il faudrait à chaque fois calculer la dimension d'un espace quotient comme dans la démonstration du lemme III.3.3 b/.

On vient d'étudier un critère pour caractériser les singularités simples. Donnons également (car on la rencontrera) un autre type de singularité dont la forme normale est donnée par $\hat{E}_6 : z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3\lambda z_1 z_2 z_3$ avec $\lambda^3 \neq -1$ c'est une singularité qui caractérise la pointe d'un cône dont la base est une courbe cubique lisse (on parle de singularité elliptique simple).

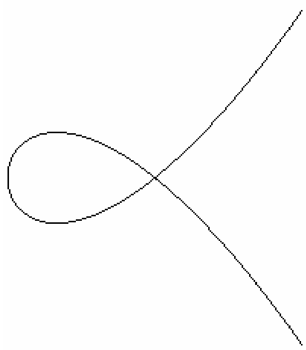
Surface $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 0$
(singularité $\hat{E}_6$)

III.4. Singularités des courbes cubiques planes

On se propose ici d'étudier tous les types de singularités isolées pour les courbes cubiques planes. Tout ce qui suit est valable sur le corps des complexes, toutefois pour les exemples on se placera dans le cas réel.

Noeud
Exemple :

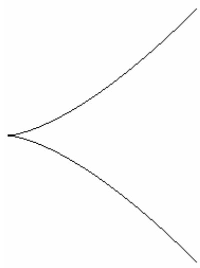
$$y^2 - x^3 - x^2 = 0$$



$y^2 - x^2$ est QH avec poids $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et x^3 est filtré (i.e. de poids >1) donc par le principe de reconnaissance, on a une singularité A_1 en (0,0).

Cusp
Exemple :

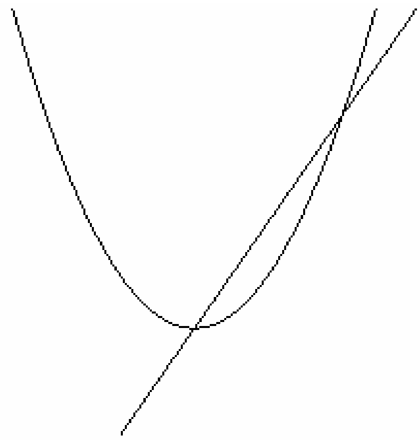
$$y^2 - x^3 = 0$$



Ici, on a déjà une forme normale et on reconnaît une singularité A_2 en $(0,0)$.

Conique et droite générique
Exemple :

$$(y-x)(y-x^2)=0$$



On a : $(y-x)(y-x^2) = y^2 - xy - x^2y + x^3$.

$y^2 - xy$ est QH avec poids $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $-x^2y + x^3$ est filtré donc par le principe de reconnaissance on a une singularité A_1 en $(0,0)$. On a également une autre singularité en $(1,1)$, pour la caractériser, on écrit :

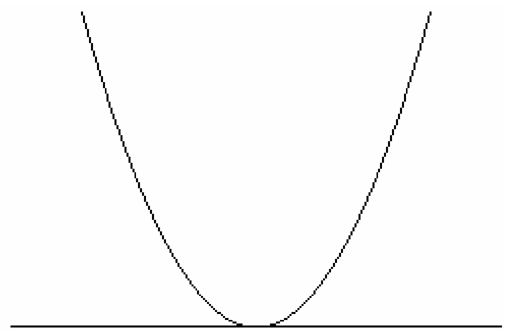
$\left[(y+1)-(x+1)\right]\left[(y+1)-(x+1)^2\right] = 2x^2 - 3xy + y^2 - x^2y + x^3$

toujours par le même argument, on reconnaît une singularité A_1 en $(1,1)$.

Finalement on obtient deux singularités A_1.

Conique et droite tangente
Exemple :

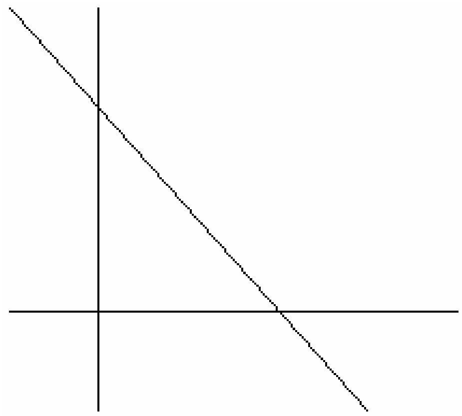
$$y(y-x^2)=0$$



On a : $y(y-x^2) = y^2 - x^2y$ et c'est QH avec poids $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ donc c'est une singularité A_3 en $(0,0)$.

Trois droites génériques
Exemple :

$$xy(y+x-1)=0$$

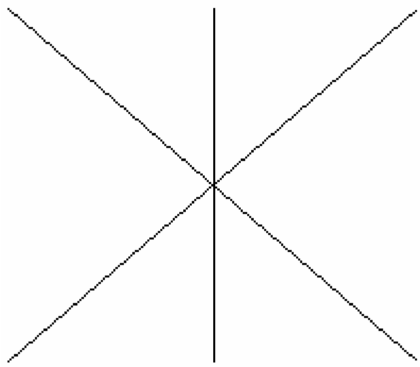


On a : $xy(y+x-1)=-xy+x^2y+xy^2$.

$-xy$ est QH avec poids $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et x^2y+xy^2 est filtré donc on a une singularité A_1 en (0,0). Il en est de même pour les deux autres singularités (0,1) et (1,0). Finalement, on obtient trois singularités A_1.

Trois droites concourantes
Exemple :

$$y(y-x)(y+x)=0$$



On a : $y(y-x)(y+x)=y^3-yx^2$

On reconnaît ici immédiatement la forme normale D_4.
On a donc une singularité D_4 en (0,0).

On va voir à présent que pour les courbes cubiques planes il n'y a pas d'autre type de singularités que ceux que l'on vient de citer. Pour la suite, $k=\mathbb{C}$, f sera un polynôme de $k[x,y]$ de degré 3 et $C_f=\left\{(x,y)\in k^2 / f(x,y)=0\right\}$.

Lemme III.4.1 : Supposons que l'on ait deux singularités distinctes P et Q de C_f. Alors, la droite (PQ) est incluse dans la cubique plane C_f.

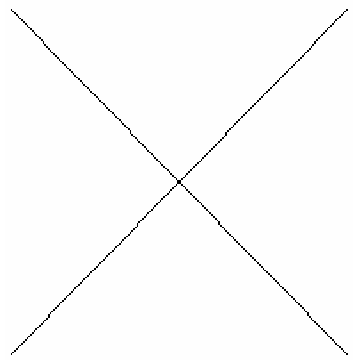
Démonstration :
(PQ) est donné par une équation de la forme $l(x,y)=0$ avec $l\in k[x,y]$ de degré 1. Notons $m_Q(f)$ (respectivement $m_Q(l)$) la multiplicité de Q en tant que racine de f (respectivement de l) et $i_Q(f,l)$ (respectivement $i_P(f,l)$) la multiplicité d'intersection de f et l en Q (respectivement en P). On a évidemment $m_Q(l)=1$ et vu que Q est une singularité de C_f, on a $m_Q(f)\geq 2$. Par suite (proposition II.3.5) $i_Q(f,l)\geq m_Q(f)m_Q(l)\geq 2$. De même $i_P(f,l)\geq 2$. Ainsi $i_P(f,l)+i_Q(f,l)\geq 4>3=\deg(f)\deg(l)$ ce qui contredirait l'inégalité de Bézout (théorème II.3.7) si $(PQ)\not\subset C_f$.

Corollaire III.4.2 : supposons que f est irréductible. Alors C_f ne peut avoir plus d'une singularité.

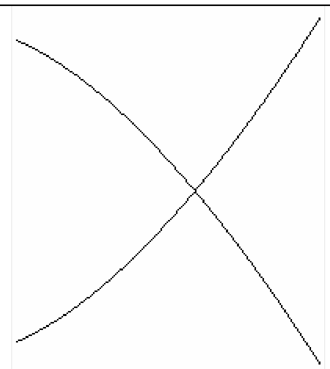
Démonstration : si C_f a au moins deux singularités alors par le lemme III.4.1 elle contient une droite et donc f admettrait un facteur de degré 1 ce qui est exclu car f est supposé irréductible.

Proposition III.4.3 : supposons que C_f soit à singularité(s) isolé(s). Alors la (ou les) singularité(s) de C_f est (ou sont) d'un des types cités en exemple précédemment.

Démonstration :
On peut toujours supposer que $(0,0)$ est une singularité de C_f.
1er cas : f est irréductible. Montrons alors que C_f est soit un cusp soit un nœud.
D'abord, $(0,0)$ est une racine d'ordre 2 de f. En effet, vu que $(0,0)$ est une singularité, c'est une racine d'ordre 2 ou 3. Par ailleurs, cette racine n'est pas d'ordre 3 car sinon f serait un polynôme homogène de degré 3 et donc il serait factorisable. Ceci étant dit, on peut poser $f(x,y) = f_3(x,y) + f_2(x,y)$ avec f_2 et f_3 deux polynômes homogènes de degrés respectifs 2 et 3. L'espace tangent de C_f en $(0,0)$ est donné par le noyau de la forme quadratique f_2. Si ce noyau est réduit à une droite alors on obtient soit un cusp soit une droite tangente à une conique mais le second cas est exclu car on suppose que f est irréductible. Maintenant si ce noyau est composé de deux droites distinctes alors cela signifie que f_2 est de rang 2 on est donc dans le cadre des hypothèses du lemme de Morse (lemme II.1.3) et donc il existe ϕ un difféomorphisme (ou une application biholomorphe) local(e) tel qu'au voisinage de $(0,0)$, $(f \circ \phi)(x,y) = x^2 - y^2$. Par suite, on a un nœud en $(0,0)$.



Allure de $f \circ \phi = 0$ au voisinage de $(0,0)$



Allure de $f = 0$ au voisinage de $(0,0)$

2ème cas : f n'est pas irréductible. Alors soit f est produit de trois facteurs de degré 1 et on obtient trois droites soit f est produit d'un facteur de degré 1 par un facteur de degré 2 et on obtient une droite et une conique.

Remarque III.4.4 : il y a certains cas particuliers qui peuvent se présenter comme par exemple trois droites confondues mais dans ce cas les singularités ne sont plus isolées.

IV. Classification des surfaces cubiques projectives singulières

IV.1. Cadre de l'étude

Nous allons ici classifier les surfaces cubiques projectives singulières. Dans toute cette section, sauf mention du contraire, le corps de base sera $\mathbb{C}$. On considère une surface cubique $V \subset \mathbf{P}^3(\mathbb{C}) = \mathbf{P}(\mathbb{C}^4)$ ayant une singularité notée P et on choisit un système de coordonnées homogènes de manière à ce que $P = (0:0:0:1)$.

Lemme IV.1.1 : dans le cadre de nos hypothèses, V a nécessairement une équation de la forme $x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2) = 0$ avec $f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogènes de degrés respectifs 2 et 3.

Démonstration :
Par définition V est donnée par une équation de la forme $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ avec $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ homogène de degré 3. Vu que $(0:0:0:1)$ est singulier, c'est un zéro de f d'ordre au moins 2 donc le polynôme $f(x_0, x_1, x_2, x_3 + 1)$ ne doit avoir que des termes de degré au moins 2. Ainsi, $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ne contient pas les monômes $x_3^3,\ x_3^2 x_0,\ x_3^2 x_1,\ x_3^2 x_2$ et donc f est bien de la forme annoncée.

Remarques IV.1.2 :
i/ Bien sûr on peut toujours considérer une carte affine contenant P pour représenter V en posant $x_3 = 1$. C'est ce que l'on fera lorsqu'il s'agira d'utiliser le principe de reconnaissance pour caractériser le type de singularité.
ii/ Vu que f_2 et f_3 sont homogènes, on pourra voir les racines de ces polynômes soit comme des éléments de $\mathbb{C}^3$ soit comme des éléments de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$.

Vu que f_2 est homogène de degré 2, ce polynôme définit une forme quadratique en les variables x_0, x_1, x_2. L'invariant que l'on va utiliser pour notre classification sera le rang de cette forme quadratique. Génériquement, ce rang est 3 donc $f_2 = 0$ sera l'équation d'une conique de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, tandis que $f_3 = 0$ sera l'équation d'une courbe cubique de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. La classification distinguera les différentes configurations possibles d'intersection de ces deux courbes. Notre présentation suivra de très près l'article [0] en précisant certains points qui nous ont parus laconiques. Nous avons notamment explicité tous les changements de coordonnées.

Dans le cadre de notre étude, on supposera d'abord que l'équation de V donnée dans le lemme IV.1.1 est irréductible et que toutes les singularités de V sont isolées, les autres cas seront (rapidement) traités à la fin.

IV.2. Cas irréductible à singularités isolées avec une forme quadratique de rang 3

Si f_2 est de rang 3 alors on dit que P est un nœud conique. Commençons par remarquer que dans ce cas, P est une singularité A_1. En effet, si f_2 est de rang 3 alors on peut, par un changement de coordonnées, écrire $f_2(x_0,x_1,x_2)=\tilde{x}_0^2+\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2$ avec les $\tilde{x}_i$ des formes linéaires en x_0,x_1,x_2 indépendantes. On réécrit alors (en affine) l'équation de V : $f_2(x_0,x_1,x_2)+f_3(x_0,x_1,x_2)=\tilde{x}_0^2+\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2+\tilde{f}_3(\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ et on applique le principe de reconnaissance pour conclure.

Remarque IV.2.1 : réciproquement si P est une singularité A_1 alors nécessairement f_2 est de rang 3.

Vu que f_2 est de rang 3, on peut toujours choisir des coordonnées homogènes telles que $f_2(x_0,x_1,x_2)=x_1^2-x_0x_2$.
(Explicitement on écrit : $x_0^2+x_1^2+x_2^2=\tilde{x}_1^2-\tilde{x}_0\tilde{x}_2$ avec $\tilde{x}_0=x_0+ix_2$, $\tilde{x}_1=x_1$ et $\tilde{x}_2=-(x_0-ix_2)$)
Ainsi, on se place dans le cas où V a pour équation $x_3(x_1^2-x_0x_2)+f_3(x_0,x_1,x_2)=0$.

On va commencer par donner deux résultats importants qui vont nous servir pour l'étude des singularités de V.

Lemme IV.2.2 : on se place ici sur la carte affine $x_3=1$.
1/ Soit $Q\in V$, alors $f_2(Q)=f_3(Q)=0$ si et seulement si $(PQ)\subset V$.
2/ Les racines communes de f_2 et f_3 sont en bijection avec les racines du polynôme à deux variables de degré 6 $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$.

Démonstration :
1/
$\boxed{\Rightarrow}$
Notons $Q=(a,b,c)$. Comme $P=(0,0,0)$, tout point de la droite (PQ) s'écrit sous la forme $(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$. On alors $\begin{cases} f_2(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=\lambda^2 f_2(a,b,c)=0 \\ f_3(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=\lambda^3 f_3(a,b,c)=0\end{cases}$ car Q est une racine commune à f_2 et f_3. Par suite $(PQ)\subset V$.
$\boxed{\Leftarrow}$
Notons $Q=(a,b,c)$. Comme $(PQ)\subset V$, on a $f_2(\lambda a,\lambda b,\lambda c)+f_3(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=0$ et ce $\forall\lambda\in\mathbb{C}$. Cette dernière équation se réécrit $\lambda^2\left(f_2(a,b,c)+\lambda f_3(a,b,c)\right)=0$.
En particulier, on en déduit que $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*, f_2(a,b,c)+\lambda f_3(a,b,c)=0$ donc finalement $f_2(a,b,c)=f_3(a,b,c)=0$.

2/ On commence par introduire une paramétrisation propre de la conique projective $\left\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) / x_1^2 - x_0x_2 = 0\right\}$ (qu'on notera de manière plus concise $\left\{x_1^2 - x_0x_2 = 0\right\}$).

Soit $\Psi : \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to \left\{x_1^2 - x_0x_2 = 0\right\} \\ (\theta : \phi) \mapsto (\theta^2 : \theta\phi : \phi^2) \end{pmatrix}$. Cette application est bien définie, montrons qu'elle est bijective.

<u>Surjectivité</u> : soit $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$ vérifiant $x_1^2 - x_0x_2 = 0$. On peut toujours trouver $(\theta, \phi) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} x_0 = \theta^2 \\ x_2 = \phi^2 \end{cases}$ et on vérifie immédiatement que $(x_0 : x_1 : x_2) = \Psi(\theta : \phi)$.

<u>Injectivité</u> : soit $(\theta_1 : \phi_1),\ (\theta_2 : \phi_2) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $\Psi(\theta_1 : \phi_1) = \Psi(\theta_2 : \phi_2)$ alors par définition, $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* / \begin{cases} \theta_1^2 = \lambda\theta_2^2 & (1) \\ \theta_1\phi_1 = \lambda\theta_2\phi_2 & (2) \\ \phi_1^2 = \lambda\phi_2^2 & (3) \end{cases}$

(1) donne $\theta_1 = \pm\lambda^{\frac{1}{2}}\theta_2$ de même que (3) donne $\phi_1 = \pm\lambda^{\frac{1}{2}}\phi_2$. Enfin, en utilisant (2), on en déduit que $\begin{cases} \theta_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}\theta_2 \Leftrightarrow \phi_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}\phi_2 \\ \theta_1 = -\lambda^{\frac{1}{2}}\theta_2 \Leftrightarrow \phi_1 = -\lambda^{\frac{1}{2}}\phi_2 \end{cases}$. Par suite $(\theta_1 : \phi_1) = (\theta_2 : \phi_2)$.

Ainsi, Ψ est une bijection et induit clairement une bijection entre les racines du polynôme $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ et les racines communes de f_2 et f_3.

<u>Remarque IV.2.3</u> : $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ est un polynôme homogène de degré 6 à deux variables donc il admet 6 racines comptées avec multiplicité donc par le lemme IV.2.2, on en déduit qu'il y a 6 droites (comptées avec multiplicité) passant par P et incluses dans V (qui correspondent aux 6 racines communes de f_2 et f_3).

<u>Définition IV.2.4</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F,\ G \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ deux polynômes homogènes, on dira que ces deux polynômes (respectivement les deux hypersurfaces projectives $\left\{F = 0\right\}$ et $\left\{G = 0\right\}$) sont <u>projectivement équivalents</u> (respectivement projectivement équivalentes) s'il existe h une homographie de $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ (qu'on appellera <u>équivalence</u>) telle que $F = G \circ h$.

<u>Lemme IV.2.5</u> : soit $\begin{cases} F = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2) \\ G = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + g_3(x_0, x_1, x_2) \end{cases}$ avec f_3 et g_3 homogènes de degré 3.

Les surfaces $\left\{F = 0\right\}$ et $\left\{G = 0\right\}$ sont projectivement équivalentes avec une équivalence qui fixe P (et qui laisse la conique $\left\{x_1^2 - x_0x_2 = 0\right\}$ globalement invariante) si et seulement si les deux polynômes $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ et $g_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ sont projectivement équivalents.

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$

Soit $h:\mathbf{P}^3(\mathbb{C})\to\mathbf{P}^3(\mathbb{C})$ une homographie telle que $\begin{cases}F=G\circ h\\ h(P)=P\end{cases}$. Alors h envoie les 6 droites passant par P et incluses dans $\{F=0\}$ sur les 6 droites passant par P et incluses dans $\{G=0\}$ tout en préservant la multiplicité de chacune d'entre elles. En d'autres termes, à toute racine de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ on peut faire correspondre de manière unique (via h) une racine de $g_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ de même multiplicité. Or à scalaire non nul près il existe un unique polynôme homogène à deux variables de degré 6 admettant 6 éléments de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ donnés comme racines (remarque II.2.2 iii/). Donc, en multipliant par un scalaire non nul adéquat, h induit une homographie $\tilde{h}:\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\to\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ vérifiant $\tilde{f}_3=\tilde{g}_3\circ\tilde{h}$ avec $\begin{cases}\tilde{f}_3(\theta,\phi)=f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)\\ \tilde{g}_3(\theta,\phi)=g_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)\end{cases}$ (i.e. $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ et $g_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ sont projectivement équivalents).

$\boxed{\Leftarrow}$

Notons $\begin{cases}\tilde{f}_3(\theta,\phi)=f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)\\ \tilde{g}_3(\theta,\phi)=g_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)\end{cases}$. On suppose que $\tilde{f}_3$ et $\tilde{g}_3$ sont projectivement équivalents, soit $\tilde{h}:\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\to\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ une homographie telle que $\tilde{f}_3=\tilde{g}_3\circ\tilde{h}$. Cette homographie induit un automorphisme de la conique $\{x_1^2-x_0x_2=0\}$, concrètement, si on reprend les mêmes notations que dans la démonstration du lemme IV.2.2, cet automorphisme est précisément $\Psi\circ\tilde{h}\circ\Psi^{-1}$.

On va commencer par construire une homographie $h:\mathbf{P}^2(\mathbb{C})\to\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ (qui préserve la conique $\{x_1^2-x_0x_2=0\}$ et) qui prolonge $\Psi\circ\tilde{h}\circ\Psi^{-1}$.

Explicitement, $\tilde{h}$ est donnée par une matrice inversible de la forme $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ i.e.

$\forall(\theta:\phi)\in\mathbf{P}^1(\mathbb{C}),\ \tilde{h}(\theta:\phi)=(\theta':\phi')$ avec $(\theta':\phi')=(a\theta+b\phi:c\theta+d\phi)$.

Vu que l'homographie h que l'on veut construire doit prolonger $\Psi\circ\tilde{h}\circ\Psi^{-1}$, il faut que $h(\theta^2:\theta\phi:\phi^2)=(\theta'^2:\theta'\phi':\phi'^2)$

ie $h(\theta^2:\theta\phi:\phi^2)=(a^2\theta^2+2ab\theta\phi+b^2\phi^2:ac\theta^2+(ad+cb)\theta\phi+bd\phi^2:c^2\theta^2+2cd\theta\phi+d^2\phi^2)$

Donc si $\begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2\\ac&ad+cb&bd\\c^2&2cd&d^2\end{pmatrix}$ est inversible alors l'homographie associée à cette matrice conviendra pour h. On vérifie que le déterminant de cette dernière matrice vaut exactement $(ad-bc)^3$ qui est non nul car $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est inversible. On dispose à présent de h. Notons que h envoie les 6 racines communes de $x_1^2-x_0x_2$ et $f_3(x_0,x_1,x_2)$ sur les 6 racines communes de $x_1^2-x_0x_2$ et $g_3(x_0,x_1,x_2)$. En effet, une racine commune à $x_1^2-x_0x_2$ et

$f_3(x_0,x_1,x_2)$ peut s'écrire sous la forme $(\theta^2:\theta\phi:\phi^2)$ et par construction, on peut écrire $h(\theta^2:\theta\phi:\phi^2)=(\theta'^2:\theta'\phi':\phi'^2)$ avec $(\theta':\phi')=\tilde{h}(\theta:\phi)$.

Ainsi, $\begin{cases}(\tilde{g}_3\circ\tilde{h})(\theta:\phi)=\tilde{g}_3(\theta':\phi')=g_3(\theta'^2:\theta'\phi':\phi'^2)\\(\tilde{g}_3\circ\tilde{h})(\theta:\phi)=\tilde{f}_3(\theta:\phi)=f_3(\theta^2:\theta\phi:\phi^2)=0\end{cases}$ et donc $g_3(\theta'^2:\theta'\phi':\phi'^2)=0$.

Par suite $h(\theta^2:\theta\phi:\phi^2)$ est une racine commune de $x_1^2-x_0x_2$ et $g_3(x_0,x_1,x_2)$.

Posons maintenant $g_3'=g_3\circ h$ et montrons que g_3' est de la forme :
$g_3'(x_0,x_1,x_2)=\lambda f_3(x_0,x_1,x_2)+l(x_0,x_1,x_2)(x_1^2-x_0x_2)$ avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$ et l une forme linéaire.

Vu la définition de g_3' et ce qui précède, on a :
$\{g_3'(x_0,x_1,x_2)=0\}\cap\{x_1^2-x_0x_2=0\}=\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}\cap\{x_1^2-x_0x_2=0\}$ i.e. les deux polynômes $g_3'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ et $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ ont les mêmes racines et donc on peut d'ores et déjà écrire $g_3'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)=\lambda f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ (avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$). Listons tous les monômes en θ,ϕ qui peuvent constituer $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ et pour chacun d'entre eux donnons le(s) monôme(s) en x_0,x_1,x_2 correspondant(s) en utilisant les identités $\begin{cases}x_0=\theta^2\\x_1=\theta\phi\\x_2=\phi^2\end{cases}$

Monôme en θ,ϕ	Monôme(s) en x_0,x_1,x_2 correspondant(s)
θ^6	x_0^3
$\theta^5\phi$	$x_0^2x_1$
$\theta^4\phi^2$	$x_0^2x_2$ ou $x_0x_1^2$
$\theta^3\phi^3$	x_1^3 ou $x_0x_1x_2$
$\theta^2\phi^4$	$x_0x_2^2$ ou $x_1^2x_2$
$\theta\phi^5$	$x_1x_2^2$
ϕ^6	x_2^3

Concrètement, par exemple, si $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)=\theta^4\phi^2$ alors cela signifie que $f_3(x_0,x_1,x_2)=x_0^2x_2$ ou bien que $f_3(x_0,x_1,x_2)=x_0x_1^2$.
Donc si $g_3'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)=\lambda f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ alors on peut toujours écrire :
$g_3'(x_0,x_1,x_2)=\lambda f_3(x_0,x_1,x_2)+\alpha(x_0x_1^2-x_0^2x_2)+\beta(x_1^3-x_0x_1x_2)+\gamma(x_1^2x_2-x_0x_2^2)$
(avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$)
Cette dernière identité se réécrit : $g_3'(x_0,x_1,x_2)=\lambda f_3(x_0,x_1,x_2)+(\alpha x_0+\beta x_1+\gamma x_2)(x_1^2-x_0x_2)$
On a donc bien la forme $g_3'(x_0,x_1,x_2)=\lambda f_3(x_0,x_1,x_2)+l(x_0,x_1,x_2)(x_1^2-x_0x_2)$ et quitte à tout multiplier par un scalaire adéquat, on peut toujours supposer que $\lambda=1$.
Ainsi $(g_3\circ h)(x_0,x_1,x_2)=f_3(x_0,x_1,x_2)+l(x_0,x_1,x_2)(x_1^2-x_0x_2)$
Montrons à présent qu'on a bien $\{F=0\}$ et $\{G=0\}$ projectivement équivalentes.

Posons $H : \left(\begin{array}{c} \mathbf{P}^3(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^3(\mathbb{C}) \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0' : x_1' : x_2' : x_3') \end{array} \right)$ avec $(x_0' : x_1' : x_2') = h(x_0 : x_1 : x_2)$ et $x_3' = x_3 - l(x_0, x_1, x_2)$. Cela définit bien une homographie car H est donnée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & 0 \\ ac & ad+cb & bd & 0 \\ c^2 & 2cd & d^2 & 0 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & 1 \end{pmatrix}$ qui est de même déterminant que la matrice définissant h donc inversible. De plus il est clair que H fixe le point P.

Ceci étant dit on a $G(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + g_3(x_0, x_1, x_2)$ et comme h préserve la conique $\{x_1^2 - x_0x_2 = 0\}$, on obtient :

$(G \circ H)(x_0, x_1, x_2, x_3) = \left(x_3 - l(x_0, x_1, x_2)\right)(x_1^2 - x_0x_2) + (g_3 \circ h)(x_0, x_1, x_2) = F(x_0, x_1, x_2, x_3)$

Finalement $\{F = 0\}$ et $\{G = 0\}$ sont projectivement équivalentes et l'équivalence fixe le point P.

Ces constatations d'ordre général étant faites, on peut passer à l'étude des singularités de notre surface cubique V d'équation $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ avec $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2)$.

Remarque IV.2.6 : quitte à considérer une surface cubique projectivement équivalente, on peut toujours supposer que f_3 est de la forme :

$f_3(x_0, x_1, x_2) = a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3$ i.e. que f_3 ne contient pas les monômes $x_0^2x_2$, $x_0x_1x_2$ et $x_0x_2^2$.

En effet, par le lemme IV.2.5, si $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2) = g_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ alors V est projectivement équivalente à $\{x_3(x_1^2 - x_0x_2) + g_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ donc en regardant le tableau de la démonstration précédente, on en déduit qu'effectivement on peut (par exemple) supposer que f_3 ne contient pas les monômes $x_0^2x_2$, $x_0x_1x_2$ et $x_0x_2^2$.

Proposition IV.2.7 :

1/ Soit Q une singularité de V autre que P. Alors $(PQ) \subset V$. On a alors une racine commune de f_2 et f_3 donc une racine de $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ et cette racine est de multiplicité supérieur (ou égale) à 2.

2/ Réciproquement, toute racine de $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ détermine une droite incluse dans V et passant par P. De plus, si une telle racine est de multiplicité ≥ 2 alors elle détermine une singularité Q (autre que P) et qui se trouve sur la droite en question. Mise à part P et Q il n'y a pas d'autre singularité sur cette droite.

3/ $\forall k \in \{2, ..., 6\}$, une racine de $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ d'ordre k correspond à une singularité A_{k-1}.

Démonstration :

1/ Soit Q une singularité de V autre que P.

On commence par se placer sur une carte affine (espace affine de dimension 3) contenant la droite (PQ).

Pour monter que $(PQ) \subset V$, on choisit un plan affine de cette carte qui contient la droite (PQ). Il s'agit alors de voir que $(PQ) \subset \tilde{V}$ (avec $\tilde{V}$ la trace de V dans ce plan).
Dans ce plan affine, $\tilde{V}$ est donné par une équation de degré $d \leq 3$ et (PQ) par une équation de degré 1. Notons $m_Q(\tilde{V})$ (respectivement $m_Q((PQ))$) la multiplicité de Q en tant que racine du polynôme qui définit $\tilde{V}$ (respectivement (PQ)) et $i_Q(\tilde{V},(PQ))$ la multiplicité d'intersection de $\tilde{V}$ et (PQ) en Q. On a évidemment $m_Q((PQ)) = 1$ et vu que Q est une singularité de $\tilde{V}$, on a $m_Q(\tilde{V}) \geq 2$. Donc (proposition II.3.5) $i_Q(\tilde{V},(PQ)) \geq 2\times 1 = 2$. De même $i_P(\tilde{V},(PQ)) \geq 2$. Ainsi $i_P(\tilde{V},(PQ)) + i_Q(\tilde{V},(PQ)) \geq 4 > 3 \geq d\times 1$ ce qui contredirait l'inégalité de Bézout (théorème II.3.7) si $(PQ) \not\subset \tilde{V}$. Par suite $(PQ) \subset V$.
Ceci étant dit, on dispose alors (lemme IV.2.2) d'une racine commune de f_2 et f_3 donc (toujours par le même lemme) d'une racine de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$.
Montrons qu'on peut toujours supposer (quitte à considérer une surface projectivement équivalente à V) que $Q = (0:0:1:0)$ sans que cela modifie la multiplicité de la racine de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ correspondante. Il suffit de choisir n'importe quelle homographie h de $\mathbf{P}^3(\mathbb{C})$ qui envoie $(0:0:1:0)$ sur Q, qui laisse la conique $\left\{x_1^2 - x_0x_2 = 0\right\}$ globalement invariante et telle que $h(P) = P$. Le lemme IV.2.5 permet alors de dire que $(F\circ h)(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + f_3\,'(x_0,x_1,x_2)$ avec $f_3\,'$ un polynôme homogène de degré 3 tel que $f_3\,'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ soit projectivement équivalent à $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ et la multiplicité de la racine de $f_3\,'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ correspondante à $(0:0:1:0)$ est la même que celle de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ correspondante à Q.
Montrons maintenant que $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ se factorise par θ^2 (on aura alors montré que $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ a une racine est de multiplicité ≥ 2). On écrit f_3 sous la forme :
$f_3(x_0,x_1,x_2) = a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3$ (remarque IV.2.6)
Vu que $Q \in V$ on a $F(0,0,1,0) = 0$ i.e. $f_3(0,0,1) = 0$ on en déduit déjà que $a_6 = 0$.
Ensuite on exploite le fait que Q est une singularité donc $F(x_0,x_1,x_2+1,x_3)$ ne doit avoir que des termes de degrés ≥ 2, on en déduit que $a_5 = 0$.
Par suite $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2) = a_0\theta^6 + a_1\theta^5\phi + a_2\theta^4\phi^2 + a_3\theta^3\phi^3 + a_4\theta^2\phi^4$ qui est bien factorisable par θ^2 et donc on a bien une racine de multiplicité ≥ 2.

2/ Soit $(\theta_0:\phi_0)$ une racine de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ de multiplicité ≥ 2. Alors (lemme IV.2.2) $(\theta_0:\phi_0)$ détermine une droite incluse dans V et passant par P.
Montrons qu'on peut toujours supposer (quitte à considérer une surface projectivement équivalente à V) que $(\theta_0:\phi_0) = (0:1)$. Il suffit de choisir une homographie $\tilde{h}$ de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ qui envoie $(0:1)$ sur $(\theta_0:\phi_0)$. Puis si $f_3\,'(x_0,x_1,x_2)$ est un polynôme homogène de degré 3 vérifiant $f_3\,'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2) = (\tilde{f}_3\circ\tilde{h})(\theta:\phi)$ avec $\tilde{f}_3(\theta,\phi) = f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$, alors la multiplicité de $(0:1)$ en tant que racine de $f_3\,'(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ est la même que celle de $(\theta_0:\phi_0)$ en tant que racine de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$. De plus (lemme IV.2.5), V est projectivement équivalente à $\left\{x_3(x_1^2 - x_0x_2) + f_3\,'(x_0,x_1,x_2) = 0\right\}$.

Soit maintenant $Q=(0:0:1:0)$. Plaçons nous sur une carte affine telle que $P=(0,0,0)$ et $Q=(0,0,1)$. Alors, dans cette carte, (PQ) est précisément la droite incluse dans V et passant par P déterminée par la racine $(0:1)$ de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$.
Montrons que Q est une singularité de V.
Posons $\tilde{f}_3(\theta,\phi)=f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)=\sum_{i=0}^{6}a_i\theta^{6-i}\phi^i$. Vu que $(0:1)$ est une racine de $\tilde{f}_3$ de multiplicité ≥ 2, $\tilde{f}_3(\theta,\phi+1)$ ne doit avoir que des termes de degrés ≥ 2, on en déduit donc que $a_6=a_5=0$. Ainsi $f_3(x_0,x_1,x_2)=a_0x_0^3+a_1x_0^2x_1+a_2x_0x_1^2+a_3x_1^3+a_4x_1^2x_2$. Par suite, $F(x_0,x_1,x_2+1,x_3)$ n'a que des termes de degrés ≥ 2 et donc Q est singulier.
Montrons à présent que P et Q sont les deux seules singularités de V sur la droite (PQ).
Un point de la droite (PQ) s'écrit sous la forme $(0:0:\lambda:\mu)$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0\}$. Si un tel point est singulier alors en particulier $\partial_{x_0}F(0,0,\lambda,\mu)=0$ or
$\partial_{x_0}F(x_0,x_1,x_2,x_3)=-x_2x_3+3a_0x_0^2+2a_1x_0x_1+a_2x_1^2$ donc $\partial_{x_0}F(0,0,\lambda,\mu)=0\Leftrightarrow\lambda\mu=0$ donc soit $\begin{cases}\lambda=0\\ \mu\neq 0\end{cases}$ et on obtient le point P soit $\begin{cases}\lambda\neq 0\\ \mu=0\end{cases}$ et on obtient le point Q.

3/ Soit $k\in\{2,...,6\}$ et $(\theta_0:\phi_0)$ une racine de $f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)$ d'ordre k. Comme cela a été vu, on peut toujours supposer que $(\theta_0:\phi_0)=(0:1)$ et la singularité correspondante est alors $(0:0:1:0)$. Vu les hypothèses, si on pose $\tilde{f}_3(\theta,\phi)=f_3(\theta^2,\theta\phi,\phi^2)=\sum_{i=0}^{6}a_i\theta^{6-i}\phi^i$ alors $\tilde{f}_3(\theta,\phi+1)$ doit être de valuation k, on en déduit donc que $\begin{cases}a_6=...=a_{7-k}=0\\ a_{6-k}\neq 0\end{cases}$.
Comme la singularité à laquelle on s'intéresse est $(0:0:1:0)$, on peut se placer sur la carte affine $x_2=1$, et comme $k\geq 2$, le polynôme qui caractérise notre surface cubique dans cette carte affine s'écrit : $x_3x_1^2-x_3x_0+a_0x_0^3+a_1x_0^2x_1+a_2x_0x_1^2+a_3x_1^3+a_4x_1^2$.
Faisons un changement de coordonnées en posant :

$$\begin{cases}\tilde{x}_0=x_0-x_1^2\\ \tilde{x}_1=x_1\\ \tilde{x}_3=x_3-a_0(x_0^2+x_0x_1^2+x_1^4)-a_1(x_0x_1+x_1^3)-a_2x_1^2\end{cases}$$

L'équation précédente s'écrit alors $-\tilde{x}_3\tilde{x}_0+a_0\tilde{x}_1^6+a_1\tilde{x}_1^5+a_2\tilde{x}_1^4+a_3\tilde{x}_1^3+a_4\tilde{x}_1^2$
On affecte les poids $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{k}\right)$ pour les variables $(\tilde{x}_0,\tilde{x}_3,\tilde{x}_1)$ et on alors $-\tilde{x}_3\tilde{x}_0$ et $a_{6-k}\tilde{x}_1^k$ de poids 1 et tout le reste est filtré (ou nul) donc par le principe de reconnaissance, on a une singularité A_{k-1}.

Il résulte de la proposition IV.2.7 que les singularités de V autres que P (qui est de type A_1) sont entièrement déterminées par les 6 racines (comptées avec multiplicité) de $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$, chaque racine de multiplicité 1 ne donne pas de singularité et chaque racine de multiplicité k ($2 \leq k \leq 6$) correspond à une singularité de type A_{k-1}. On peut ainsi dresser un tableau qui nous donne les singularités qui apparaissent en fonction des partitions de 6. Bien sûr on a toujours au moins une singularité A_1 qui correspond à P.

<u>Tableau IV.2.8</u> :

Partitions de 6	Singularité(s) de V	Exemple dans le cas réel
(1,1,1,1,1,1)	Une singularité A_1	figure 1
(2,1,1,1,1)	Deux singularités A_1	figure 2
(3,1,1,1)	Une singularité A_1 et une A_2	figure 3
(2,2,1,1)	Trois singularités A_1	figure 4
(4,1,1)	Une singularité A_1 et une A_3	figure 5
(3,2,1)	Deux singularités A_1 et une A_2	figure 6
(2,2,2)	Quatre singularités A_1	figure 7
(5,1)	Une singularité A_1 et une A_4	figure 8
(4,2)	Deux singularités A_1 et une A_3	figure 9
(3,3)	Une singularité A_1 et deux A_2	figure 10
(6)	Une singularité A_1 et une A_5	figure 11

<u>Remarque IV.2.9</u> : par exemple la partition (2,2,1,1) correspond au cas où $f_3(\theta^2, \theta\phi, \phi^2)$ a deux racines d'ordre 2 et deux d'ordre 1.

<u>Illustrations IV.2.10</u> :

figure 1

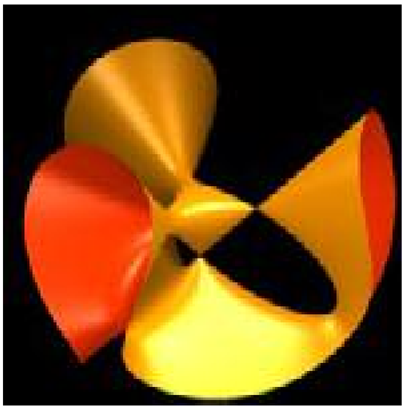


figure 2

figure 3

figure 4

figure 5

figure 6

figure 7

figure 8

figure 9

figure 10

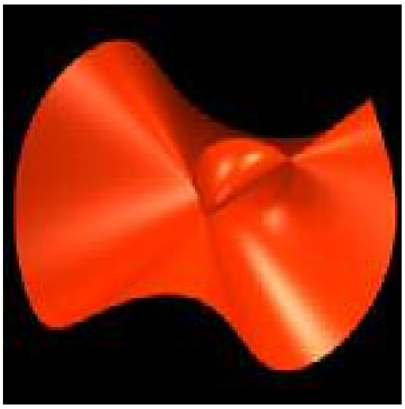


figure 11

IV.3. Cas irréductible à singularités isolées avec une forme quadratique de rang 2

Si f_2 est de rang 2 alors on dit que P est un nœud double. Plus précisément, P est une singularité de type A_k pour un certain $k \geq 2$. En effet, on peut toujours (propriété d'une forme quadratique de rang 2) choisir des coordonnées de sorte que $f_2(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1$ et donc dans la carte affine $x_3 = 1$, l'équation de V devient alors : $x_0 x_1 + f_3(x_0, x_1, x_2) = 0$. En affectant x_0 et x_1 du poids $\frac{1}{2}$ et en appliquant le principe de reconnaissance on en déduit que P ne peut être qu'une singularité de type A_k car quelque soit le poids affecté à x_2, $f_3(x_0, x_1, x_2)$ sera filtré, par ailleurs P ne peut être de type A_1 car sinon f_2 serait de rang 3 d'après le cas précédent.

Pour la suite de l'étude, on se place dans le cas où V a pour équation $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ avec $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 x_0 x_1 + f_3(x_0, x_1, x_2)$.

Lemme IV.3.1 : on peut toujours supposer que f_3 est de la forme
$f_3(x_0, x_1, x_2) = x_0(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_2^2) + x_1(a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2) + a_6 x_2^3$
(avec $\forall i \in \{0, \ldots, 6\}$, $a_i \in \mathbb{C}$)

Démonstration :
Il s'agit de voir que l'on supposer que les monômes $x_0 x_1 x_2$, $x_0 x_1^2$ et $x_0^2 x_1$ n'apparaissent pas dans l'expression de f_3. L'expression générale de f_3 est de la forme :
$f_3(x_0, x_1, x_2) = a x_0 x_1 x_2 + b x_0 x_1^2 + c x_0^2 x_1 + x_0(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_2^2) + x_1(a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2) + a_6 x_2^3$
(avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$)
On obtient donc :
$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_3 + a x_2 + b x_1 + c x_0) x_0 x_1 + x_0(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_2^2) + x_1(a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2) + a_6 x_2^3$
On pose alors $\tilde{x}_3 = x_3 + a x_2 + b x_1 + c x_0$ et le résultat suit.
Ainsi, pour la suite on supposera que

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 x_0 x_1 + \underbrace{x_0(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_2^2) + x_1(a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2) + a_6 x_2^3}_{f_3(x_0, x_1, x_2)}$$

Conséquence IV.3.2 : un point de V de la forme $(0:0:1:\delta)$ ne peut être singulier. En effet, on a : $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 x_0 x_1 + x_0(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + a_2 x_2^2) + x_1(a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2) + a_6 x_2^3$ donc

$$(*) \begin{cases} \partial_{x_0} F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 x_1 + 3a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_2 + a_2 x_2^2 & (1) \\ \partial_{x_1} F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 x_0 + 3a_3 x_1^2 + 2a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2 & (2) \\ \partial_{x_2} F(x_0, x_1, x_2, x_3) = a_1 x_0^2 + 2a_2 x_0 x_2 + a_4 x_1^2 + 2a_5 x_1 x_2 + 3a_6 x_2^2 & (3) \\ \partial_{x_3} F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 x_1 & (4) \end{cases}$$

D'abord $(0:0:1:\delta) \in V$ donc $F(0,0,1,\delta) = 0$ d'où $a_6 = 0$. Si $(0:0:1:\delta)$ était singulier alors en particulier $\partial_{x_0} F(0,0,1,\delta) = \partial_{x_1} F(0,0,1,\delta) = 0$ donc $a_2 = a_5 = 0$.
Voyons qu'alors V n'est pas à singularités isolées. On vérifie que :
$F(0,0,x_2,x_3) = \partial_{x_0} F(0,0,x_2,x_3) = \partial_{x_1} F(0,0,x_2,x_3) = \partial_{x_2} F(0,0,x_2,x_3) = \partial_{x_3} F(0,0,x_2,x_3) = 0$

Donc toute la droite projective passant par $P=(0:0:0:1)$ et $(0:0:1:0)$ est singulière ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi $(0:0:1:\delta)$ ne peut être singulier.

Lemme IV.3.3 : Soit $i \in \{0,1\}$ et (α,β,γ) une racine commune de x_i et $f_3(x_0,x_1,x_2)$. Alors (α,β,γ) est toujours de multiplicité d'intersection 1, 2, ou 3.

Démonstration :

Supposons par exemple que $i=0$. L'application $\begin{pmatrix} \mathbb{C}^2 \to \{x_0=0\} \\ (s,t) \mapsto (0,s,t) \end{pmatrix}$ est une paramétrisation propre du plan $\{x_0=0\}$. Par suite (proposition II.3.6) la multiplicité d'intersection de x_0 et $f_3(x_0,x_1,x_2)$ en (α,β,γ) est donnée par la valuation du polynôme $f_3(0,x_1+\beta,x_2+\gamma)$ et cette dernière ne peut valoir que 1, 2 ou 3. On fait de même si $i=1$.
Remarquons au passage que par homogénéité des polynômes, on peut considérer $(\alpha:\beta:\gamma)$ plutôt que (α,β,γ).

Conséquence IV.3.4 : Soit $(\alpha:\beta:\gamma)$ une racine commune de x_0x_1 et $f_3(x_0,x_1,x_2)$. Alors $(\alpha:\beta:\gamma)$ est toujours de multiplicité d'intersection 1, 2, ou 3. Si cette multiplicité vaut 2 (respectivement 3) alors on dira que $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple d'ordre 2 (respectivement 3) de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$.

Proposition IV.3.5 :
a/ Si un point $Q=(\alpha:\beta:\gamma:\delta)\in V$ distinct de P est singulier alors $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$.
b/ Réciproquement, si $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$ alors on a une singularité distincte de P de la forme $(\alpha:\beta:\gamma:\delta)$.
c/ Soit $k\in\{2,3\}$. Une intersection multiple d'ordre k de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$ correspond à une singularité de type A_{k-1}.
d/ Si $f_3(0,0,1)\neq 0$ alors P est une singularité de type A_2.
e/ Soit k_0, $k_1\in\{1,2,3\}$. Supposons que $\forall i\in\{0,1\}$, $(0:0:1)$ soit une intersection multiple d'ordre k_i de $\{x_i=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$. Si $\{k_0,k_1\}=\{1,1\}$ ou $\{1,2\}$ ou $\{1,3\}$ alors P est une singularité de type $A_{k_0+k_1+1}$, sinon (i.e. si k_0 et k_1 sont ≥ 2) alors V n'est pas à singularités isolées.

Démonstration :
a/ Soit $Q=(\alpha:\beta:\gamma:\delta)\in V$ une singularité distincte de P. Montrons que $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$.
D'abord $(\alpha:\beta:\gamma)\neq(0:0:1)$ car on a déjà vu (conséquence IV.3.2) qu'un point de la forme $(0:0:1:\delta)$ ne peut être singulier.

Par (4) (dans la conséquence IV.3.2), on a nécessairement $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. De plus $F(Q) = 0$ donc vu la forme de F on en déduit que $f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Ainsi, on a bien $(\alpha : \beta : \gamma) \in \{x_0 x_1 = 0\} \cap \{f_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$. Reste à voir que c'est bien une intersection multiple. Supposons par exemple que $\alpha = 0$ (on a alors forcément $\beta \neq 0$ car $(\alpha : \beta : \gamma) \neq (0:0:1)$) alors $F(x_0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma, x_3 + \delta)$ est de valuation ≥ 2 (car Q est singulier). Montrons alors que $f_3(0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma)$ est de valuation ≥ 2. Pour cela on traite plutôt la contraposée. Supposons que $f_3(0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma)$ admette au moins un monôme de degré 1 (remarquer que $f_3(0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma)$ n'a pas de terme constant vu que $f_3(0, \beta, \gamma) = 0$), un tel monôme ne peut être que x_1 ou x_2. Par ailleurs, on a :

$$F(x_0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma, x_3 + \delta) - f_3(0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma) = (x_3 + \delta)x_0(x_1 + \beta) + x_0\left[a_0 x_0^2 + a_1 x_0 (x_2 + \gamma) + a_2 (x_2 + \gamma)^2\right]$$

Donc dans l'expression de $F(x_0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma, x_3 + \delta) - f_3(0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma)$, les monômes x_1 et x_2 ne peuvent apparaître. Par suite $F(x_0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma, x_3 + \delta)$ a au moins un monôme de degré 1. Ainsi on a bien $f_3(0, x_1 + \beta, x_2 + \gamma)$ de valuation ≥ 2. De même si $\beta = 0$ (et $\alpha \neq 0$) alors $f_3(x_0 + \alpha, 0, x_2 + \gamma)$ est de valuation ≥ 2.

Finalement $(\alpha : \beta : \gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0 x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ distincte de $(0:0:1)$.

b/ Soit $(\alpha : \beta : \gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0 x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ distincte de $(0:0:1)$. Alors nécessairement $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

<u>1^er^ cas</u> : $\alpha = \beta = 0$ alors $\gamma = 0$ (car sinon $(\alpha : \beta : \gamma) = (0:0:1)$) ce qui est exclu car $(0:0:0) \notin \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$.

<u>2^ème^ cas</u> : $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ alors on peut toujours supposer que $\beta = 1$. On est donc dans le cas où le point $(0:1:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

En particulier $f_3(0, 1, \gamma) = 0$ i.e. $a_3 + a_4\gamma + a_5\gamma^2 + a_6\gamma^3 = 0$.

Par ailleurs, le polynôme $f_3(0, x_1 + 1, x_2 + \gamma)$ est de valuation ≥ 2. On a :

$$f_3(0, x_1 + 1, x_2 + \gamma) = (x_1 + 1)\left[a_3(x_1 + 1)^2 + a_4(x_1 + 1)(x_2 + \gamma) + a_5(x_2 + \gamma)^2\right] + a_6(x_2 + \gamma)^3$$

Dans ce polynôme, le terme en x_2 est : $(a_4 + 2a_5\gamma + 3a_6\gamma^2)x_2$ donc nécessairement $a_4 + 2a_5\gamma + 3a_6\gamma^2 = 0$ ou encore $a_4 = -2a_5\gamma - 3a_6\gamma^2$ ce qui donne dans l'identité précédente $a_3 = a_5\gamma^2 + 2a_6\gamma^3$. On vérifie alors qu'en substituant a_3 et a_4 par $a_5\gamma^2 + 2a_6\gamma^3$ et $-2a_5\gamma - 3a_6\gamma^2$ respectivement on obtient grâce aux identités (*) de la conséquence IV.3.2

$$F(0,1,\gamma,-a_2\gamma^2) = \partial_{x_0} F(0,1,\gamma,-a_2\gamma^2) = \partial_{x_1} F(0,1,\gamma,-a_2\gamma^2) = \partial_{x_2} F(0,1,\gamma,-a_2\gamma^2) = \partial_{x_3} F(0,1,\gamma,-a_2\gamma^2) = 0$$

En d'autres termes, le point $(0:1:\gamma:-a_2\gamma^2)$ est singulier (et distinct de *P*).

<u>3^ème^ cas</u> : $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$ alors on peut toujours supposer que $\alpha = 1$. On est donc dans le cas où le point $(1:0:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

Vu les rôles symétriques de x_0 avec x_1 et de a_i avec a_{i+3} pour $i \in \{0,1,2\}$ dans l'expression de F on déduit immédiatement de l'étude du 2^ème^ cas qu'on a nécessairement

$a_1 = -2a_2\gamma - 3a_6\gamma^2$ et $a_0 = a_2\gamma^2 + 2a_6\gamma^3$ et que le point $(1:0:\gamma:-a_5\gamma^2)$ est singulier (et distinct de P).

Finalement, si $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$ alors on a une singularité distincte de P de la forme $(\alpha:\beta:\gamma:\delta)$.

c/ Soit $k \in \{2,3\}$ et $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_0x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$. Supposons par exemple que $(\alpha:\beta:\gamma)$ est une intersection multiple de $\{x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distincte de $(0:0:1)$ (par symétrie, l'autre cas se traitera de la même manière). Alors on peut toujours supposer que $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Par ce qui précède, la singularité correspondante est $(1:0:\gamma:-a_5\gamma^2)$, on se place donc sur la carte affine $x_0 = 1$.

Si $k=2$ alors on sait d'ores et déjà que nécessairement $a_1 = -2a_2\gamma - 3a_6\gamma^2$ et $a_0 = a_2\gamma^2 + 2a_6\gamma^3$ (vu dans la démonstration de b/). On a :

$$F(1,x_1,x_2+\gamma,x_3-a_5\gamma^2) = x_3x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_4\gamma x_1^2 + a_5x_1x_2^2 + 2a_5\gamma x_1x_2 + a_6x_2^3 + 3a_6\gamma x_2^2$$

On affecte alors x_1, x_2 et x_3 du poids $\frac{1}{2}$ et le principe de reconnaissance assure que $(1:0:\gamma:-a_5\gamma^2)$ est une singularité A_1.

Si $k=3$ alors $f_3(x_0+1,0,x_2+\gamma)$ n'a pas de termes de degré 2. La partie de degré 2 de $f_3(x_0+1,0,x_2+\gamma)$ étant donnée par $(3a_0+a_1\gamma)x_0^2 + (2a_1+2a_2\gamma)x_0x_2 + (a_2+3a_6\gamma)x_2^2$ on en déduit que $\begin{cases} 3a_0 + a_1\gamma = 0 \\ 2a_1 + 2a_2\gamma = 0 \\ a_2 + 3a_6\gamma = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a_0 = -a_6\gamma^3 \\ a_1 = 3a_6\gamma^2 \\ a_2 = -3a_6\gamma \end{cases}$.

Par suite :

$$F(1,x_1,x_2+\gamma,x_3-a_5\gamma^2) = x_3x_1 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_4\gamma x_1^2 + a_5x_1x_2^2 + 2a_5\gamma x_1x_2 + a_6x_2^3$$

On pose alors $\tilde{x}_3 = x_3 + 2a_5\gamma x_2$ pour obtenir :

$$F(1,x_1,x_2+\gamma,x_3-a_5\gamma^2) = \tilde{x}_3x_1 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_4\gamma x_1^2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3.$$

En affectant x_1, x_2 et $\tilde{x}_3$ des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ et en appliquant le principe de reconnaissance, on en déduit que $(1:0:\gamma:-a_5\gamma^2)$ est une singularité A_2.

d/ Supposons que $f_3(0,0,1) \neq 0$ alors $a_6 \neq 0$. Plaçons nous sur la carte affine $x_3 = 1$, on a :

$$F(x_0,x_1,x_2,1) = x_0x_1 + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_2 + a_2x_0x_2^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3$$

En affectant x_0, x_1 et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et en appliquant le principe de reconnaissance, on en déduit que P est une singularité de type A_2.

e/ Supposons que $k_1 = 1$ et que $k_0 \in \{1,2,3\}$ et montrons que P est de type A_{k_0+2} (par symétrie, le cas $k_0 = 1$ et $k_1 \in \{1,2,3\}$ se traite de la même manière).

On peu d'ores et déjà dire que $a_6 = 0$ (car par hypothèse $f_3(0,0,1) = 0$). Par ailleurs, vu que $k_1 = 1$, on en déduit que $f_3(x_0, 0, x_2 + 1)$ est de valuation 1 et donc $a_2 \neq 0$.

Ceci étant dit on a : $f_3(0, x_1, x_2 + 1) = a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2^2 + 2a_5x_1x_2 + a_5x_1$

Donc $\begin{cases} k_0 = 1 \Leftrightarrow a_5 \neq 0 \\ k_0 = 2 \Leftrightarrow a_5 = 0 \text{ et } a_4 \neq 0 \\ k_0 = 3 \Leftrightarrow a_5 = a_4 = 0 \text{ et } a_3 \neq 0 \end{cases}$

On se place sur la carte affine $x_3 = 1$ on a :

$F(x_0, x_1, x_2, 1) = x_0x_1 + x_0(a_0x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_2^2) + x_1(a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2)$

On pose ensuite : $\tilde{x}_1 = x_1 + (a_0x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_2^2)$ puis on calcule $F(x_0, x_1, x_2, 1)$ en fonction de x_0, $\tilde{x}_1$ et x_2 (les calculs sont assez longs mais élémentaires).

<u>1er cas</u> : $k_0 = 1$ (alors $a_5 \neq 0$) on affecte x_0, $\tilde{x}_1$ et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

On obtient $F(x_0, x_1, x_2, 1) = (x_0\tilde{x}_1 + a_5\tilde{x}_1x_2^2 - a_2a_5x_2^4) + a(x_0, \tilde{x}_1, x_2)$ avec $a(x_0, \tilde{x}_1, x_2)$ filtré. Donc par le principe de reconnaissance, P est une singularité A_3.

<u>2ème cas</u> : $k_0 = 2$ (alors $a_5 = 0$ et $a_4 \neq 0$) on affecte x_0, $\tilde{x}_1$ et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$. On obtient $F(x_0, x_1, x_2, 1) = (x_0\tilde{x}_1 + a_2^2a_4x_2^5) + b(x_0, \tilde{x}_1, x_2)$ avec $b(x_0, \tilde{x}_1, x_2)$ filtré. Donc par le principe de reconnaissance, P est une singularité A_4.

<u>3ème cas</u> : $k_0 = 3$ (alors $a_5 = a_4 = 0$ et $a_3 \neq 0$) on affecte x_0, $\tilde{x}_1$ et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$. On obtient $F(x_0, x_1, x_2, 1) = (x_0\tilde{x}_1 - a_2^3a_3x_2^6) + c(x_0, \tilde{x}_1, x_2)$ avec $c(x_0, \tilde{x}_1, x_2)$ filtré. Donc par le principe de reconnaissance, P est une singularité A_5.

Ainsi, dans les trois cas P est de type $A_{k_0+k_1+1}$.

Montrons à présent que si k_0 et k_1 sont ≥ 2 alors V n'est pas à singularités isolées. On a déjà vu que $a_6 = 0$ et que si $k_0 \geq 2$ alors $a_5 = 0$. Par symétrie, si $k_1 \geq 2$ alors $a_2 = 0$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors

$F(x_0, x_1, x_2 + \lambda, x_3 + \mu) = (x_3 + \mu)x_0x_1 + x_0\left[a_0x_0^2 + a_1x_0(x_2 + \lambda)\right] + x_1\left[a_3x_1^2 + a_4x_1(x_2 + \lambda)\right]$

Ce dernier polynôme est de valuation ≥ 2 donc tout point de la forme $(0:0:\lambda:\mu)$ est singulier i.e. la droite projective passant par P et $(0:0:1:0)$ est singulière et donc V n'est pas à singularités isolées.

<u>Remarque IV.3.6</u> : Vu qu'il y a au plus trois intersections multiples de $\{x_0x_1 = 0\}$ avec $\{f_3(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ il résulte de la proposition IV.3.5 que V a au plus trois singularités.

Passons à l'étude des singularités de V qui peuvent apparaître en utilisant la proposition IV.3.5. D'abord par a/ et b/, on en déduit que les singularités autre que P (s'il y en a) sont données par les intersections multiples de $\{x_0=0\}$ (respectivement $\{x_1=0\}$) avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distinctes de $(0:0:1)$ (et une intersection simple ne donne pas de point singulier) et ces singularités sont caractérisées par c/. De plus, la caractérisation de P est donnée par d/ (si $f_3(0,0,1)\neq 0$) et e/ (si $f_3(0,0,1)=0$), on traite donc naturellement les deux cas.

<u>1er cas</u> : $f_3(0,0,1)\neq 0$ alors P de type A_2 et on fait une discussion sur les différentes configurations possibles d'intersection (nécessairement distinctes de $(0:0:1)$) de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ pour étudier les autres singularités éventuelles. Chaque configuration sera caractérisée par la donnée de deux partitions de 3. Par exemple la donnée des deux partitions $(1,1,1)$ et $(2,1)$ caractérise le fait que $\{x_0=0\}$ (ou $\{x_1=0\}$) intersecte $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ en trois points de multiplicité 1 et que $\{x_1=0\}$ (ou $\{x_0=0\}$) intersecte $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ en un point de multiplicité 2 et un de multiplicité 1. Une telle configuration donne (mis à part P) une singularité de type A_1 (caractérisée par le point de multiplicité 2). On peut alors dresser le tableau qui suit.

<u>Tableau IV.3.7</u> :

Doublets de partitions de 3	Singularité(s) de V	Exemple dans le cas réel
$(1,1,1)$ et $(1,1,1)$	Une singularité A_2	figure 1
$(1,1,1)$ et $(2,1)$	Une singularité A_2 et une A_1	figure 2
$(1,1,1)$ et (3)	Deux singularités A_2	figure 3
$(2,1)$ et $(2,1)$	Une singularité A_2 et deux A_1	figure 4
$(2,1)$ et (3)	Deux singularités A_2 et une A_1	figure 5
(3) et (3)	Trois singularités A_2	figure 6

<u>2ème cas</u> : $f_3(0,0,1)=0$ alors, en reprenant les mêmes notations que dans la proposition IV.3.5, on commence par discuter selon que $\{k_0,k_1\}=\{1,1\}$ ou $\{1,2\}$ ou $\{1,3\}$ pour caractériser le type de P. Puis pour les autres singularités éventuelles, comme dans le cas précédent, on fait une discussion sur les différentes configurations possibles d'intersection de $\{x_0x_1=0\}$ avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ distinctes de $(0:0:1)$. Bien sûr ici, on ne considère plus des partitions de 3 car pour $i\in\{0,1\}$, $\{x_i=0\}$ intersecte $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ en au plus deux points distincts de $(0:0:1)$, mais pour caractériser ces configurations on utilisera toujours des doublets. Par exemple la donnée de $(1,1)$ et (0) caractérisera le fait que $\{x_0=0\}$ (ou $\{x_1=0\}$) intersecte $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ en deux points distincts de $(0:0:1)$ de multiplicité 1 et que $\{x_1=0\}$ (ou $\{x_0=0\}$) n'a pas d'intersection avec $\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ autre que $(0:0:1)$ (bien sûr cela ne peut arriver que si $\{k_0,k_1\}=\{1,3\}$). On peut alors dresser le tableau qui suit.

Tableau IV.3.8 :

$\{k_0,k_1\}$	Configuration de $\{x_0x_1=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$	Singularités de V		Exemple dans le cas réel
		Type de P	Type des autres	
$\{1,1\}$	(1,1) et (1,1)	A_3	Aucune autre	figure 7
	(1,1) et (2)	A_3	A_1 (une seule)	figure 8
	(2) et (2)	A_3	A_1 (deux)	figure 9
$\{1,2\}$	(1,1) et (1)	A_4	Aucune autre	figure 10
	(2) et (1)	A_4	A_1 (une seule)	figure 11
$\{1,3\}$	(1,1) et (0)	A_5	Aucune autre	figure 12
	(2) et (0)	A_5	A_1 (une seule)	figure 13

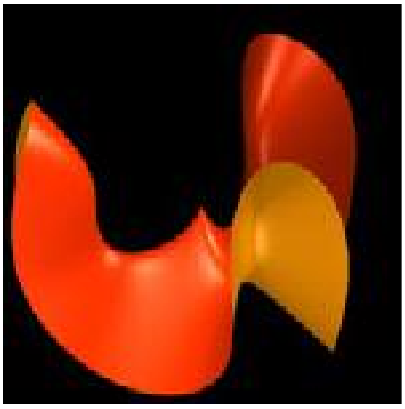


figure 1

figure 2

figure 3

figure 4

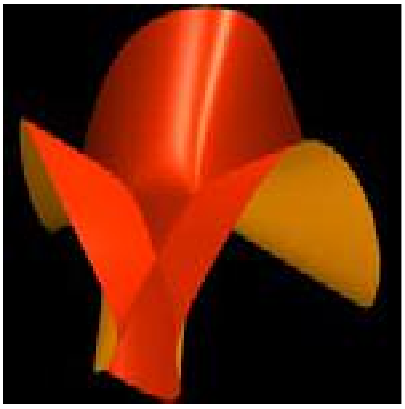


figure 5

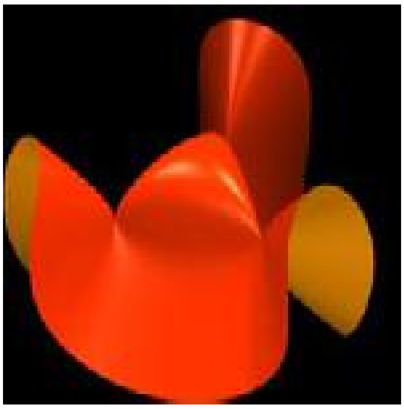


figure 6

figure 7

figure 8

figure 9

figure 10

figure 11

figure 12

figure 13

IV.4. Cas irréductible à singularités isolées avec une forme quadratique de rang 1

Si f_2 est de rang 1 alors on peut toujours choisir des coordonnées homogènes telles que $f_2(x_0,x_1,x_2)=x_0^2$, on est donc dans le cas où V a une équation de la forme : $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=0$ avec $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_3x_0^2+f_3(x_0,x_1,x_2)$.

Remarque IV.4.1 : $\{x_0=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ est fini de cardinal 1, 2 ou 3 (en tant que partie de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$). En effet, rappelons que l'on suppose que F est irréductible donc en particulier f_3 ne se factorise pas par x_0. Par conséquent, $f_3(0,x_1,x_2)$ est un polynôme (à deux variables) homogène de degré 3 et donc admet 3 racines (dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$) comptées avec multiplicité.

Proposition IV.4.2 : $P=(0:0:0:1)$ est la seule singularité de V et de plus :
i/ Si $\{x_0=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ est de cardinal 3 alors P est de type D_4.
ii/ Si $\{x_0=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ est de cardinal 2 alors P est de type D_5.
iii/ Si $\{x_0=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ est de cardinal 1 alors P est de type E_6.

Démonstration :
Commençons par remarquer qu'on peut toujours supposer (quitte à faire un changement de coordonnées) que $f_3(x_0,x_1,x_2)=x_0g_2(x_1,x_2)+g_3(x_1,x_2)$ avec $\forall i\in\{1,2\}$, g_i homogène de degré i. En effet, il s'agit de voir que l'on peut se « débarrasser » des monômes $x_1x_0^2$, $x_2x_0^2$ et x_0^3 dans l'expression de f_3.
A priori, on peut écrire $f_3(x_0,x_1,x_2)=\alpha x_1x_0^2+\beta x_2x_0^2+\gamma x_0^3+x_0g_2(x_1,x_2)+g_3(x_1,x_2)$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ et donc $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=(x_3+\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_0)x_0^2+x_0g_2(x_1,x_2)+g_3(x_1,x_2)$
Il suffit alors de poser $\tilde{x}_3=x_3+\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_0$ et le résultat suit. Ceci étant dit, posons systématiquement pour la suite $g_2(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ (avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$) et démontrons la proposition en traitant chaque cas (y compris pour démontrer que P est la seule singularité).
i/ Supposons que $\{x_0=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ est de cardinal 3. Alors, on peut toujours supposer que $g_3(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3$. En effet, dans le cadre de nos hypothèses, $g_3(x_1,x_2)$ a trois racines distinctes dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ (car $g_3(x_1,x_2)=f_3(0,x_1,x_2)$). On considère alors une homographie h de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ qui envoie $(-1:1)$, $(e^{\frac{i\pi}{3}}:1)$ et $(e^{-\frac{i\pi}{3}}:1)$ (qui sont les trois racines de $x_1^3+x_2^3$) sur les trois racines de $g_3(x_1,x_2)$ (une telle homographie existe car trois points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ forment un repère projectif). Vu qu'à scalaire non nul près, il n'existe qu'un seul polynôme homogène à deux variables de degré 3 ayant $(-1:1)$, $(e^{\frac{i\pi}{3}}:1)$ et $(e^{-\frac{i\pi}{3}}:1)$ pour racines, en multipliant h par un scalaire adéquat, on peut se ramener à $(g_3\circ h)(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3$.
Ainsi, on se place dans le cas où $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_3x_0^2+x_0(ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2)+x_1^3+x_2^3$.

Montrons que P est la seule singularité.

On a : $\begin{cases} \partial_{x_0} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = 2x_3x_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \\ \partial_{x_1} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = 2ax_0x_1 + bx_0x_2 + 3x_1^2 \\ \partial_{x_2} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + 3x_2^2 \\ \partial_{x_3} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_0^2 \end{cases}$

Donc un point singulier $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ vérifie nécessairement :

$$\begin{cases} 2x_3x_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0 \\ 2ax_0x_1 + bx_0x_2 + 3x_1^2 = 0 \\ bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + 3x_2^2 = 0 \\ x_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Par suite $(0:0:0:1)$ est la seule singularité.

Montrons maintenant que P est de type D_4.

On a : $F(x_0,x_1,x_2,1) = x_0^2 + x_0(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) + x_1^3 + x_2^3$

(on se place dans la carte affine $x_3 = 1$). Affectons x_0, x_1 et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$. On a alors $F(x_0,x_1,x_2,1) = \underbrace{x_0^2 + x_1^3 + x_2^3}_{\text{QH à singularité isolé}} + \underbrace{x_0(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)}_{\text{partie filtrée}}$. Par suite le principe de reconnaissance assure que P est type D_4.

ii/ Supposons que $\{x_0 = 0\} \cap \{f_3(x_0,x_1,x_2) = 0\}$ est de cardinal 2. Alors, par le même type de raisonnement que dans i/ on peut supposer que $g_3(x_1,x_2) = x_1^2x_2$. On se place donc dans le cas où $F(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_3x_0^2 + x_0(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) + x_1^2x_2$.

On a : $\begin{cases} \partial_{x_0} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = 2x_3x_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \\ \partial_{x_1} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = 2ax_0x_1 + bx_0x_2 + 2x_1x_2 \\ \partial_{x_2} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + x_1^2 \\ \partial_{x_3} F(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_0^2 \end{cases}$

Donc un point singulier $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ vérifie nécessairement :

$$\begin{cases} 2x_3x_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0 \\ 2ax_0x_1 + bx_0x_2 + 2x_1x_2 = 0 \\ bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + x_1^2 = 0 \\ x_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Par suite $(0:0:0:1)$ est la seule singularité.

Montrons que P est de type D_5.

On a : $F(x_0,x_1,x_2,1) = x_0^2 + x_0(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) + x_1^2x_2$. En affectant x_0, x_1 et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{4}$. On a alors $F(x_0,x_1,x_2,1) = \underbrace{x_0^2 + x_1^2x_2 + cx_0x_2^2}_{\text{QH à singularité isolé}} + \underbrace{x_0(ax_1^2 + bx_1x_2)}_{\text{partie filtrée}}$ et le principe de reconnaissance permet de conclure.

iii/ Supposons que $\{x_0=0\}\cap\{f_3(x_0,x_1,x_2)=0\}$ est de cardinal 1. Alors (toujours par le même type de raisonnement que dans i/) on peut supposer que $g_3(x_1,x_2)=x_1^3$ et donc $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_3x_0^2+x_0(ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2)+x_1^3$.

On a : $$\begin{cases}\partial_{x_0}F(x_0,x_1,x_2,x_3)=2x_3x_0+ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2\\ \partial_{x_1}F(x_0,x_1,x_2,x_3)=2ax_0x_1+bx_0x_2+3x_1^2\\ \partial_{x_2}F(x_0,x_1,x_2,x_3)=bx_0x_1+2cx_0x_2\\ \partial_{x_3}F(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_0^2\end{cases}$$

Donc un point singulier $(x_0:x_1:x_2:x_3)$ vérifie nécessairement :

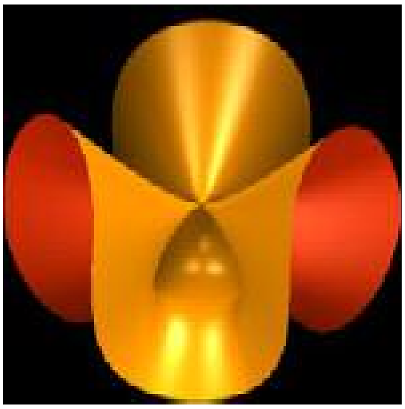
$$\begin{cases}2x_3x_0+ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2=0\\ 2ax_0x_1+bx_0x_2+3x_1^2=0\\ bx_0x_1+2cx_0x_2=0\\ x_0^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\ x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

Par suite $(0:0:0:1)$ est la seule singularité.

Montrons que P est de type E_6.

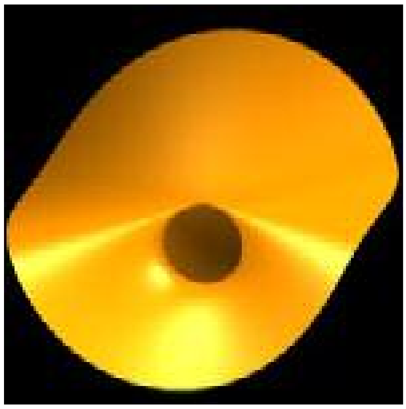
On a : $F(x_0,x_1,x_2,1)=x_0^2+x_0(ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2)+x_1^3$. En affectant x_0, x_1 et x_2 des poids respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. On a alors $F(x_0,x_1,x_2,1)=\underbrace{x_0^2+x_1^3+cx_0x_2^2}_{\text{QH à singularité isolé}}+\underbrace{x_0(ax_1^2+bx_1x_2)}_{\text{partie filtrée}}$ donc par le principe de reconnaissance, P est de type E_6.

<u>Illustrations IV.4.3</u> :



Singularité D_4

Singularité D_5



Singularité E_6

IV.5. Cas irréductible à singularités isolées avec une forme quadratique de rang 0

Si f_2 est de rang 0 i.e. si f_2 est nulle alors la surface cubique V a pour équation $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=0$ avec $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=f_3(x_0,x_1,x_2)$.

Proposition IV.5.1 : V n'admet qu'une seule singularité (à savoir P) et elle est de type $\hat{E}_6$.

Démonstration :
Montrons que la courbe projective $C=\left\{(x_0:x_1:x_2)\in\mathbf{P}^2(\mathbb{C})/\,f_3(x_0,x_1,x_2)=0\right\}$ est lisse (i.e. n'a pas de singularité)
On se place sur la carte affine $x_0=1$ et on note $\tilde{C}=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2/\,f_3(1,x_1,x_2)=0\right\}$ (courbe affine associée à C). Notons aussi $\tilde{V}=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3/\,f_3(1,x_1,x_2)=0\right\}$ (surface affine associée à V). Si $Q=(\alpha,\beta)$ était une singularité de $\tilde{C}$ alors toute la droite affine $\left\{(\alpha,\beta,x_3)/\,x_3\in\mathbb{C}\right\}$ serait singulière pour $\tilde{V}$ ce qui contredirait le fait que V est à singularité isolé. Par suite, C n'a pas de singularité sur la carte $x_0=1$ et le même raisonnement montre que C n'a pas de singularité sur les deux autres cartes $x_1=1$ et $x_2=1$ donc C est lisse.
Ceci étant dit, on en déduit immédiatement que P est la seule singularité de V et que de plus, sur la carte affine $x_3=1$, V est un cône sur une courbe cubique lisse donnée par $\left\{(x_0,x_1,x_2)\in\mathbb{C}^3/\,f_3(x_0,x_1,x_2)=0\right\}$. Ainsi, P est une singularité $\hat{E}_6$.

Singularité $\hat{E}_6$

IV.6. Cas irréductible à singularités non isolées

On se propose à présent de classifier les surfaces cubiques projectives irréductibles à singularités non isolées.

Proposition IV.6.1 : soit V une surface cubique projective irréductible à singularités non isolées. Alors le lieu singulier de V est une droite.

Démonstration :
Par le théorème de Bertini (théorème II.4.10), l'intersection de V avec un plan générique est irréductible donc la trace de V sur un tel plan a une seule singularité (corollaire III.4.2). Par suite le lieu singulier de V est une droite.

A présent faisons une étude sur les cas qui peuvent se présenter. Soit V une surface cubique projective d'équation $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=0$ et ayant toute une droite singulière. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut toujours supposer que cette droite singulières est $\{x_0=x_1=0\}$ i.e. la droite projective passant par $(0:0:1:0)$ et $(0:0:0:1)$.
Ainsi, tout point de $\mathbf{P}^3(\mathbb{C})$ de la forme $(0:0:\lambda:\mu)$ est une singularité de V et donc $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$, $F(x_0,x_1,x_2+\lambda,x_3+\mu)$ est de valuation ≥ 2. Par suite, les monômes de la forme $x_ix_2^2$ et $x_ix_3^2$ pour $i\in\{0,1,2,3\}$ et $x_1x_2x_3$ n'apparaissent pas dans F et donc F est de la forme $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=f_3(x_0,x_1)+x_2f_2(x_0,x_1)+x_3g_2(x_0,x_1)$ avec f_3 homogène de degré 3 et f_2 et g_2 homogènes de degré 2.

Lemme IV.6.2 : on peut toujours se ramener à
$(f_2,g_2)=(x_0^2,x_1^2)$ ou (x_0^2,x_0x_1) ou $(x_0x_1,0)$ ou $(x_0^2,0)$ ou $(0,0)$

Démonstration :
f_2 et g_2 définissent deux formes quadratiques donc on commence par discuter sur leurs rangs respectifs. D'abord, quitte à permuter les rôles de x_2 et x_3, on peut se contenter de regarder les doublets de rang à permutation près.
1^er^ cas : f_2 et g_2 sont de rang 0, alors $(f_2,g_2)=(0,0)$.
2^ème^ cas : f_2 est de rang 1 et g_2 est de rang 0, alors on peut réduire f_2 sous la forme $\tilde{x}_0^2$ avec $\tilde{x}_0$ une forme linéaire en x_0 et x_1 donc on peut se ramener à $(f_2,g_2)=(x_0^2,0)$.
3^ème^ cas : f_2 est de rang 2 et g_2 est de rang 0, alors on peut réduire f_2 sous la forme $\tilde{x}_0\tilde{x}_1$ avec $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}_1$ deux formes linéaires en x_0 et x_1 donc on peut se ramener à $(f_2,g_2)=(x_0x_1,0)$.
4^ème^ cas : f_2 est de rang 1 et g_2 est de rang 2, alors f_2 a une racine dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ (notons la M_1) et g_2 a deux racines distinctes dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ (notons les M_2 et M_3).
Si $M_1\in\{M_2,M_3\}$ avec par exemple $M_1=M_2$ alors on considère une homographie

$$h:\begin{pmatrix}\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\to\mathbf{P}^1(\mathbb{C})\\ (0:1)\mapsto M_1=M_2\\ (1:1)\mapsto M_3\end{pmatrix}.$$

A un scalaire non nul près, x_0^2 est l'unique polynôme homogène à deux variables admettant $(0:1)$ pour racine double. De même, à un scalaire non nul près $x_0^2 - x_0x_1$ est l'unique polynôme homogène à deux variables admettant $(0:1)$ et $(1:1)$ pour racines.
On a donc $(f_2 \circ h)(x_0,x_1) = \alpha x_0^2$ et $(g_2 \circ h)(x_0,x_1) = \beta(x_0^2 - x_0x_1)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. On pose ensuite $\tilde{x}_2 = \alpha x_2 + \beta x_3$ et $\tilde{x}_3 = -\beta x_3$ pour pouvoir se ramener à $(f_2, g_2) = (x_0^2, x_0x_1)$.
Maintenant si M_1, M_2 et M_3 sont deux à deux distincts alors on considère l'homographie

$$h : \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \\ (0:1) \mapsto M_1 \\ (-1:1) \mapsto M_2 \\ (1:1) \mapsto M_3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(f_2 \circ h)(x_0,x_1) = \alpha x_0^2$ et $(g_2 \circ h)(x_0,x_1) = \beta(x_0^2 - x_1^2)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. On pose ensuite $\tilde{x}_2 = \alpha x_2 + \beta x_3$ et $\tilde{x}_3 = -\beta x_3$ pour se ramener au cas $(f_2, g_2) = (x_0^2, x_1^2)$.
<u>5ème cas</u> : f_2 et g_2 sont de rang 1, alors on peut réduire f_2 sous la forme $\tilde{x}_0^2$ avec $\tilde{x}_0$ une forme linéaire en x_0 et x_1 et g_2 sous la forme $\tilde{x}_1^2$ avec $\tilde{x}_1$ une forme linéaire en x_0 et x_1. Si $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}_1$ sont linéairement indépendantes alors on se ramène immédiatement à $(f_2, g_2) = (x_0^2, x_1^2)$. Sinon, $\exists \alpha \in \mathbb{C}^* / \tilde{x}_1 = \alpha \tilde{x}_0$, et on pose alors $\tilde{x}_2 = x_2 + \alpha^2 x_3$ pour se ramener à $(f_2, g_2) = (x_0^2, 0)$.
<u>6ème cas</u> : f_2 et g_2 sont de rang 2, alors f_2 a deux racines distinctes dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ (notons les M_1 et M_2) de même pour g_2 (notons les M_3 et M_4).
Si $\{M_1, M_2\} = \{M_3, M_4\}$ (i.e. si f_2 et g_2 ont les mêmes racines) alors $\exists \alpha \in \mathbb{C}^* / g_2 = \alpha f_2$ et donc en posant $\tilde{x}_2 = x_2 + \alpha x_3$, on se ramène 3ème cas et donc on se ramène à $(f_2, g_2) = (x_0x_1, 0)$.
Sinon si f_2 et g_2 ont une racine commune (et une seule) avec par exemple $M_2 = M_3$

alors on considère l'homographie $h : \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \\ (1:1) \mapsto M_1 \\ (0:1) \mapsto M_2 = M_3 \\ (1:0) \mapsto M_4 \end{pmatrix}$.

On a donc $(f_2 \circ h)(x_0,x_1) = \alpha(x_0x_1 - x_0^2)$ et $(g_2 \circ h)(x_0,x_1) = \beta x_0 x_1$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. On pose ensuite $\tilde{x}_2 = -\alpha x_2$ et $\tilde{x}_3 = \alpha x_2 + \beta x_3$ pour se ramener à $(f_2, g_2) = (x_0^2, x_0x_1)$.
Enfin, si M_1, M_2, M_3 et M_4 sont deux à deux distincts alors on considère l'homographie

$$h : \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \\ (0:1) \mapsto M_1 \\ (1:0) \mapsto M_2 \\ (1:1) \mapsto M_3 \end{pmatrix}, \text{ notons } (a^2:1) = h^{-1}(M_4).$$

On a donc $(f_2 \circ h)(x_0,x_1) = \alpha x_0 x_1$ et $(g_2 \circ h)(x_0,x_1) = \beta(x_0 - x_1)(x_0 - a^2 x_1)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$.

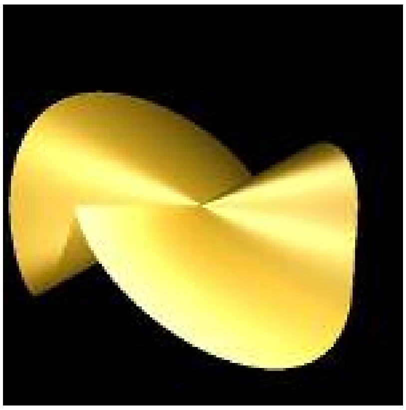
On peut réécrire $(g_2 \circ h)(x_0,x_1) = \beta\left[(x_0 + a x_1)^2 - (a+1)^2 x_0 x_1\right]$.

On pose ensuite $\tilde{x}_2 = \alpha x_2 - \beta(a+1)^2$ et $\tilde{x}_3 = \beta x_3$ pour se ramener à f_2 de rang 2 et g_2 de rang 1 qui est le cas symétrique du 4ème cas.

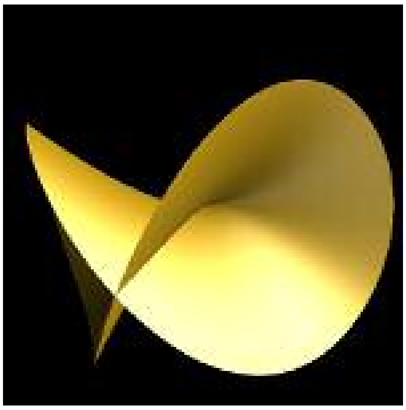
Le lemme IV.6.2 étant acquis, on va faire une étude selon les différentes formes de f_2 et g_2 énumérées.

Si $(f_2, g_2) = (x_0 x_1, 0)$ ou $(x_0^2, 0)$ ou $(0,0)$ alors $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = f_3(x_0, x_1) + x_2 f_2(x_0, x_1)$ et donc V ne dépend pas de x_3.
Ainsi, V est entièrement déterminé par $\tilde{V} = \left\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3 / f_3(x_0, x_1) + x_2 f_2(x_0, x_1) = 0\right\}$.
Or $\left\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) / f_3(x_0, x_1) + x_2 f_2(x_0, x_1) = 0\right\}$ est une courbe cubique projective singulière et irréductible (car V est une surface cubique irréductible) donc $\tilde{V}$ est un cône sur un nœud ou un cusp (on a déjà vu que ce sont les seules courbes cubiques irréductibles singulières).


Cône sur un noeud


Cône sur un cusp

Si $(f_2, g_2) = (x_0^2, x_1^2)$ alors on peut toujours se ramener à $f_3 = 0$. Pour cela on écrit F sous la forme $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \underbrace{ax_0^3 + bx_0^2 x_1 + cx_0 x_1^2 + dx_1^3}_{f_3(x_0, x_1)} + x_2 x_0^2 + x_3 x_1^2$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$.
On a donc $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ax_0 + bx_1 + x_2)x_0^2 + (cx_0 + dx_1 + x_3)x_1^2$, il suffit alors de poser $\tilde{x}_2 = ax_0 + bx_1 + x_2$ et $\tilde{x}_3 = cx_0 + dx_1 + x_3$ et le résultat suit. Ainsi, l'équation de V peut se ramener sous la forme $x_2 x_0^2 + x_3 x_1^2 = 0$.



Surface $zx^2 - y^2 = 0$

Enfin, si $(f_2, g_2) = (x_0^2, x_0x_1)$ alors on peut toujours se ramener à $f_3 = x_1^3$. Pour cela, on fait comme dans le cas précédent.
On écrit $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \underbrace{ax_0^3 + bx_0^2x_1 + cx_0x_1^2 + dx_1^3}_{f_3(x_0, x_1)} + x_2x_0^2 + x_3x_0x_1$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Vu que V est supposé irréductible on a automatiquement $d \neq 0$ (car sinon, F se factoriserait par x_0). On a donc $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = dx_1^3 + (ax_0 + bx_1 + x_2)x_0^2 + (cx_1 + x_3)x_0x_1$, il suffit alors de poser $\tilde{x}_1 = d^{\frac{1}{3}}x_1$, $\tilde{x}_2 = ax_0 + bx_1 + x_2$ et $\tilde{x}_3 = cx_1 + x_3$ pour conclure. Ainsi, l'équation de V peut se ramener sous la forme $x_1^3 + x_2x_0^2 + x_3x_0x_1 = 0$

Surface $y^3 + zx^2 + xy = 0$

IV.7. Cas réductible

A présent on étudie brièvement les surfaces cubiques réductibles. Soit V une surface cubique projective réductible associée au polynôme (homogène de degré 3) $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Il n'y a que deux cas de figures, soit F est produit d'un facteur irréductible (homogène) de degré 2 avec un facteur (homogène) de degré 1, soit F est produit de trois facteurs (homogènes) de degré 1.

Traitons d'abord le premier cas. Il s'agit du cas où V est composé d'une quadrique et d'un plan (projectifs). Donc soit la quadrique est singulière (et donc c'est un cône) et alors le plan peut la couper de trois manières différentes; il peut passer par le sommet (i.e. la singularité de la quadrique), être tangent ou générique (i.e. n'intersecte pas la quadrique d'une des deux manières précédentes). Soit la quadrique est lisse et alors le plan peut lui être tangent ou la couper de manière générique. Maintenant si on est dans le second cas alors V est composé de trois plans. On peut distinguer trois cas de figures :

<u>1^er cas</u> : ils sont tous les trois confondus et alors V est un plan.

<u>2^ème cas</u> : deux (et seulement deux) parmi les trois sont confondus et alors V est réunion de deux plans (soit transverses soit colinéaires)

<u>3^ème cas</u> : les trois plans sont deux à deux distincts et alors V est réunion de trois plans (soit tous les trois colinéaires, soit deux colinéaires et un transverse aux deux autres, soit transverses deux à deux).

V. Vers les 27 droites

L'étude que nous avons faite dans la partie IV permet de lister tous les cas de figures qui peuvent se présenter pour une surface cubique projective complexe irréductible à singularités isolées simples. En regroupant toutes les singularités que l'on a rencontrées dans les parties IV.2, IV.3 et IV.4. On peut se rendre compte qu'il y a en tout 20 configurations différentes possibles (cf le tableau qui suit).

Grâce à cette classification, on peut également calculer le nombre de droites incluses dans une surface cubique donnée. Dans le cas lisse, ce nombre s'élève à 27 mais dans le cas singulier certaines d'entre elles peuvent être multiples et donc on peut se demander combien il y en a en tout dans chaque cas. On ne fera pas l'étude détaillée ici mais on donne toutefois un résultat qui permet de répondre à la question de manière assez immédiate : Si c est la codimension d'un certain type de configuration de singularités d'une surface cubique singulière et que m est le nombre de singularités de cette configuration alors le nombre de droites distinctes incluses dans cette surface est donné par $\frac{1}{2}(8-c)(7-c)+m-1$. En utilisant ce résultat et grâce à l'étude de la partie IV sur les types de configuration au niveau des singularités et à la remarque III.3.4 i/ (qui permet de donner la codimension des différents types de singularités), on peut dresser un tableau qui donne le nombre de droites dans les 20 cas possibles.

Type de configuration	A_1	$2A_1$	A_2	$3A_1$	A_1, A_2	A_3	$4A_1$	$2A_1, A_2$	A_1, A_3
Codimension correspondante	1	2	2	3	3	3	4	4	4
Nombre de droites	21	16	15	12	11	10	9	8	7

$2A_2$	A_4	D_4	$2A_1, A_3$	$A_1, 2A_2$	A_1, A_4	A_5	D_5	$3A_2$	A_1, A_5	E_6
4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6
7	6	6	5	5	4	3	3	3	2	1

Bibliographie

[0] : J.W. Bruce and C.T.C. Wall, “On the classification of cubic surfaces”, *J. London Math. Soc. (2)* (1979) pages 245-256.

[1] : Arnol’d, “Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k , D_k and E_k and Lagrangian singularities” , *Funk. Anal. Appl. 6* (1972) pages 254-272.

[2] : Arnol’d, “Normal forms for functions near degenerate critical points” , *Russian Math. Surveys 29 (2)* (1974) pages 11-49.

[3] : Frédéric Pham, “Géométrie et calcul différentiel sur les variétés”, *Dunod*

[4] : Joël Briançon et Philippe Maisonobe, “Eléments d’algèbre commutative”, *Publication pédagogique*, Université de Nice.

[5] : Shuong Gao, “Factoring multivariate polynomials via partial differential equations”, *Mathematics Subject Classifiacation*.

[6] : http://mathworld.wolfram.com

[7] : http://www.cubicsurface.net