

Diagrammes dans une catégorie monoïdale.

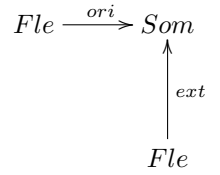
Thomas Gire

6 novembre 2006

1 Catégories

Définition 1 (Graphes) Un **graphe** \mathcal{G} est la donnée

- d'un ensemble de sommets Som ,
- d'un ensemble de flèches Fle ,
- de deux applications $ori, ext : Fle \rightarrow Som$.



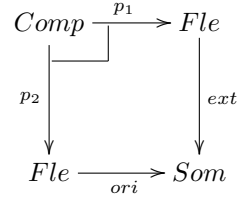
Dans un graphe, on note $a \xrightarrow{f} b$ pour $f \in Fle$, $ori(f) = a$ et $ext(f) = b$.

On note $Fle(a, b)$ pour $ori^{-1}(a) \cap ext^{-1}(b)$.

Deux flèches $a \rightrightarrows b$ sont dites parallèles.

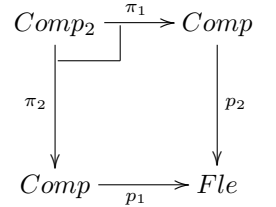
On définit l'ensemble $Comp$ des couples de flèches composables par :

$$Comp := \{(f_1, f_2) \in Fle^2 \mid ori f_2 = ext f_1\}$$



Ainsi que l'ensemble $Comp_2$ des triplets de flèches composables :

$$\begin{aligned} Comp_2 &:= \{(F_1, F_2) \in Comp^2 \mid p_2(F_1) = p_1(F_2)\} \\ &\simeq \{(f_1, f_2, f_3) \in Som^3 \mid (f_1, f_2) \in Comp, (f_2, f_3) \in Comp\} \end{aligned}$$



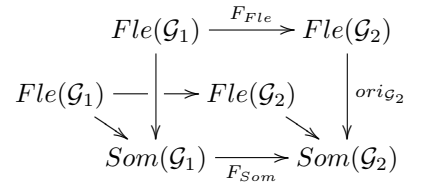
On a une notion naturelle de morphisme de graphes :

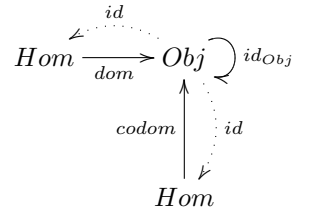
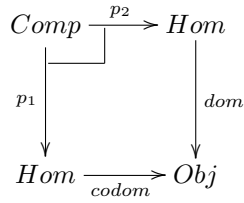
Définition 2 (Morphisme de graphes) Soient $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ deux graphes. On appelle **diagramme** dans \mathcal{G}_2 suivant le schéma \mathcal{G}_1 , $F : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un couple $(F_{Som} : Som(\mathcal{G}_1) \rightarrow Som(\mathcal{G}_2), F_{Fle} : Fle(\mathcal{G}_1) \rightarrow Fle(\mathcal{G}_2))$ tel que

$$ori_{\mathcal{G}_2} \circ F_{Fle} = F_{Som} \circ ori_{\mathcal{G}_1}$$

$$ext_{\mathcal{G}_2} \circ F_{Fle} = F_{Som} \circ ext_{\mathcal{G}_1}$$

c'est-à-dire $\boxed{a \xrightarrow{f} b \implies F_{Som}(a) \xrightarrow{F_{Fle}(f)} F_{Som}(b)}$





Définition 3 (Catégories) Une *catégorie* \mathcal{C} est la donnée

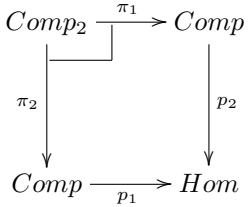
- d'un graphe $(\text{Hom}, \text{Obj}, \text{dom}, \text{codom})$,
- d'une application $\text{id} : \text{Obj} \rightarrow \text{Hom}, c \mapsto \text{id}_c$,
- d'une application $\text{comp} : \text{Comp} \rightarrow \text{Hom}, (f_1, f_2) \mapsto f_2 \circ f_1$

avec

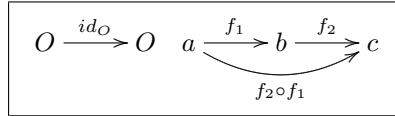
$$\text{dom} \circ \text{id} = \text{id}_{\text{Obj}} = \text{codom} \circ \text{id}$$

$$\text{dom} \circ \text{comp} = \text{dom} \circ p_1$$

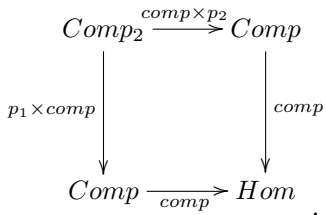
$$\text{codom} \circ \text{comp} = \text{codom} \circ p_2$$



c'est-à-dire $\forall O \in \text{Obj}, \forall (f_1, f_2) \in \text{Comp}$,



telles que

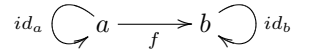
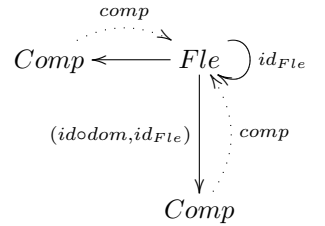
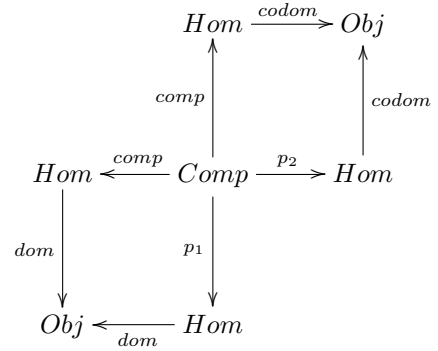


$$\text{comp} \circ (\text{id} \circ \text{dom}, \text{id}_{\text{Fle}}) = \text{id}_{\text{Fle}} = \text{comp} \circ (\text{id}_{\text{Fle}}, \text{id} \circ \text{codom})$$

$$\text{comp} \circ [(\text{comp} \times p_2)]|_{\text{Comp}_2} = \text{comp} \circ [(p_1 \times \text{comp})]|_{\text{Comp}_2}$$

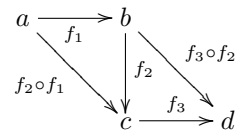
c'est-à-dire pour $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$

$$\boxed{f \circ \text{id}_a = f = \text{id}_b \circ f}$$



et pour tout triplet de flèches composables (f_1, f_2, f_3) ,

$$\boxed{f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1}$$



2 Diagrammes commutatifs

Définition 4 (Graphe des chemins) Soit \mathcal{G} , un graphe. On appelle graphe des chemins et on note $Ch(\mathcal{G})$ le graphe défini par

- $Som := Som(\mathcal{G})$
- $Fle := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \{(f_1, \dots, f_n) \in Fle(\mathcal{G})^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, (f_i, f_{i+1}) \in Comp\}$
- $ori(f_1, \dots, f_n) := ori_{\mathcal{G}}(f_1)$
- $ext(f_1, \dots, f_n) := ext_{\mathcal{G}}(f_n)$

Un morphisme de graphes $F : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ induit un morphisme entre les graphes des chemins.

Soit \mathcal{C} une catégorie et UC son graphe sous-jacent. On peut voir la composition de \mathcal{C} comme un morphisme de graphes défini par induction par

$$\begin{aligned} comp : Ch(UC) &\rightarrow \mathcal{C} \\ (f_1, \dots, f_n) &\mapsto f_n \circ comp(f_1, \dots, f_{n-1}) \end{aligned}$$

Définition 5 (Diagrammes commutatifs) Soit \mathcal{C} une catégorie et UC son graphe sous-jacent.

Soit $D : \mathcal{G} \rightarrow UC$ un diagramme dans \mathcal{C} suivant le schéma \mathcal{G} .

Soit $(s_1, s_2) \in Som^2$, D est (s_1, s_2) -**commutatif** si pour tout couple de chemins (c_1, c_2) de \mathcal{G} d'origine s_1 et d'extrémité s_2 , $comp(D(c_1)) = comp(D(c_2))$.

Soit $S \subset Som_{\mathcal{G}}^2$, D est S -commutatif si pour tout $(s_1, s_2) \in S$, D est (s_1, s_2) -commutatif.

Soit $S \subset Som_{\mathcal{G}}^2$, D est S -commutatif si pour tout $(s_1, s_2) \in S$, D est (s_1, s_2) -commutatif.

3 Foncteurs

Définition 6 (Morphisme de catégories) Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux catégories. On appelle **foncteur** $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ un morphisme entre les graphes sous-jacents tel que

$$F_{Hom} \circ id_{\mathcal{C}_1} = id_{\mathcal{C}_2} \circ F_{Obj}$$

$$\begin{array}{ccc} Obj(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow{F_{Obj}} & Obj(\mathcal{C}_2) \\ id_{\mathcal{C}_1} \downarrow & & \downarrow id_{\mathcal{C}_2} \\ Hom(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow{F_{Hom}} & Hom(\mathcal{C}_2) \end{array}$$

c'est-à-dire pour tout objet c ,

$$\boxed{F_{Hom}(id_c) = id_{F_{Obj}(c)}}$$

et

$$F_{Hom} \circ comp_{\mathcal{C}_1} = comp_{\mathcal{C}_2} \circ (F_{Hom} \times F_{Hom})$$

$$\begin{array}{ccc} Comp(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow{F_{Hom}^2} & Comp(\mathcal{C}_2) \\ comp_{\mathcal{C}_1} \downarrow & & \downarrow comp_{\mathcal{C}_2} \\ Hom(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow{F_{Hom}} & Hom(\mathcal{C}_2) \end{array}$$

c'est-à-dire pour tout couple (f_1, f_2) de flèches composables,

$$\boxed{F_{Hom}(f_2 \circ f_1) = F_{Hom}(f_2) \circ F_{Hom}(f_1)}$$

4 Transformations naturelles

Définition 7 (Transformations naturelles) Soient $F_1, F_2 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ deux foncteurs parallèles.

Une **transformation naturelle** est un élément τ de l'ensemble

$$\prod_{O \in Obj} F_1(O) \rightarrow F_2(O)$$

$$\begin{array}{ccc} Obj(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow{F_1 Obj} & Obj(\mathcal{C}_2) \\ F_2 Obj \downarrow & \searrow \tau & \uparrow dom_{\mathcal{C}_2} \\ Obj(\mathcal{C}_2) & \xleftarrow{codom_{\mathcal{C}_2}} & Hom(\mathcal{C}_2) \end{array}$$

tel que

$$comp_{\mathcal{C}_2} \circ (F_1 Hom, \tau \circ codom_{\mathcal{C}_2}) = comp_{\mathcal{C}_2} \circ (\tau \circ dom_{\mathcal{C}_2}, F_2 Hom)$$

c'est-à-dire pour tout $f \in Hom_{\mathcal{C}_1}(O_1, O_2)$

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow{(F_1 Hom, \tau \circ codom_{\mathcal{C}_2})} & Comp(\mathcal{C}_2) \\ (\tau \circ dom_{\mathcal{C}_2}, F_2 Hom) \downarrow & & \downarrow comp_{\mathcal{C}_2} \\ Comp(\mathcal{C}_2) & \xrightarrow{comp_{\mathcal{C}_2}} & Hom(\mathcal{C}_2) \end{array}$$

$$\boxed{F_2(f) \circ \tau_{O_1} = \tau_{O_2} \circ F_1(f)}$$

5 Fondements de la théorie des catégories

Un des objectifs principaux de la théorie des catégories est de fournir un langage dans lequel on puisse parler d'objets mathématiques dans leur totalité. On souhaite souvent considérer tous les ensembles munis d'une structure comme par exemple les groupes ou les espaces topologiques. Cela revient à appliquer un principe de compréhension: Etant donné une propriété $\phi(x)$ d'ensembles x , on forme l'ensemble $\{x|\phi(x)\}$ de tous les ensembles qui vérifient cette propriété. Cependant l'usage sauvage de ce principe de compréhension mène à des paradoxes tel que celui de Russel concernant l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas.

L'usage en théorie naïve des ensembles est de restreindre le principe de compréhension: Etant donné deux ensembles u, v , on permet de construire

- un ensemble infini,
- l'ensemble $\{u, v\}$,
- le couple (u, v) ,
- le produit cartésien $u \times v = \{(x, y)|x \in u, y \in v\}$,
- l'ensemble des parties $\mathcal{P}u = \{v|v \subset u\}$,
- l'union d'un ensemble d'ensembles $\bigcup_{y \in x} y$,

Finalement, étant donné un ensemble u et une propriété $\phi(x)$ exprimée à l'aide de la lettre x , la relation d'appartenance et les connecteurs logiques usuels (y compris \forall et \exists), on permet le principe de compréhension:

$$\{x|x \in u, \phi(x)\}$$

On permet pour un ensemble d'ensembles de construire le sous-ensemble formé de ses éléments qui satisfont une propriété.

La théorie des catégories est une théorie logique qui possède des termes indéfinis comme par exemple a est un objet, f est un morphisme. a est le domaine de f , g est la composée de f_1 et f_2 . On a présenté ici une interprétation de cette théorie dans la théorie des ensembles. Une catégorie est un graphe qui est un ensemble(et qui vérifie ...).

Avec cette définition, on ne peut considérer les catégories sur lesquelles on travaille habituellement, par exemples les catégories dont les objets sont les ensembles, les groupes, les espaces topologiques.

C'est pourquoi on suppose habituellement l'existence d'un univers:

Définition 8 (Univers) *Un univers est un ensemble U tel que*

- $u \in U$ et $x \in u$, $\implies x \in U$
- $u \in U$ et $v \in U$, $\implies \{u, v\} \in U$, $(u, v) \in U$, $u \times v \in U$
- $u \in U \implies \mathcal{P}u \in U$, $\bigcup_{x \in u} x \in U$
- $\omega \in U$ (où ω est l'ensemble $\{0, 1, \dots\}$ des ordinaux finis)
- si $f : a \rightarrow b$ est surjective avec $a \in U$ et $b \subset U$ alors $b \in U$

Ces propriétés de stabilité pour U garantissent que toutes les opérations standards de théorie des ensembles appliquées à des éléments de U produisent encore des éléments de U . En particulier, $\omega \in U$ garantit que des ensembles infinis tels que l'ensemble des réels sont des éléments de U . On peut alors

considérer que les mathématiques habituelles concernent les éléments de U et on va pouvoir utiliser U pour construire les catégories que l'on souhaite.

Un axiome de la théorie des ensembles affirme qu'il n'y a pas de chaîne infinie d'ensembles $\dots x_n \in x_{n-1} \in \dots \in x_0$. En particulier, aucun ensemble x ne vérifie $x \in x$.

On considère alors un univers U fixé. On appelle ses éléments les petits ensembles. U est donc l'ensemble des petits ensembles. U est donc un ensemble d'un autre type dans le sens où U n'est pas un petit ensemble car sinon $U \in U$.

Définition 9 (Classes) Une *classe* est une partie de U , c'est un ensemble de petits ensembles.

Comme tout élément d'un petit ensemble est un petit ensemble, un petit ensemble est une classe.

On appelle *classe propre*, une classe qui n'est pas un petit ensemble.

6 Exemples de catégories

Définition 10 (Catégories habituelles) On appelle catégorie habituelle une catégorie pour laquelle Obj est une classe et pour tout couple d'objets (a, b) , $Hom(a, b)$ est un petit ensemble. Si Obj est même un petit ensemble, on parle de petite catégorie

6.1 Des constructions sur les catégories

Définition 11 (Catégorie discrète) Soit E un ensemble. La catégorie discrète associée à E et la catégorie dont

- les objets sont les éléments de E ,
- les morphismes sont uniquement les identités des objets,
- la composition est la seule possible.

Elle est petite si E est un petit ensemble.

Définition 12 (Catégorie préordre) Soient E un ensemble et R une relation de préordre sur E , c'est à dire une relation réflexive et transitive. La catégorie associée à ce préordre est la catégorie dont

- les objets sont les éléments de E
- les morphismes sont les couples $(e_1, e_2) \in E^2$ tels que $e_1 R e_2$
- la composition est la seule possible.

Elle est petite si E est un petit ensemble.

Définition 13 (Produit de catégories) Soient C_1, C_2 deux catégories. On note $C_1 \times C_2$ la catégorie pour laquelle

- $Obj := Obj_{C_1} \times Obj_{C_2}$
- $Hom := Hom_{C_1} \times Hom_{C_2}$
- $dom := dom_{C_1} \times dom_{C_2}$, $codom := codom_{C_1} \times codom_{C_2}$
- $comp := comp_{C_1} \times comp_{C_2}$

Définition 14 (Catégories de foncteurs) Soient C_1, C_2 deux catégories. On note $C_2^{C_1}$ la catégorie dont

- les objets sont les foncteurs $F : C_1 \rightarrow C_2$,

- les morphismes sont les transformations naturelles entre tels foncteurs,
- la composition est $:(\tau : F_1 \rightarrow F_2, \eta : F_2 \rightarrow F_3) \mapsto (c_1 \mapsto \eta_{c_1} \circ \tau_{c_1})$.

Définition 15 (Somme de catégories) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{C}_n une catégorie. On note $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ la catégorie pour laquelle

- $\text{Obj} := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Obj}_{\mathcal{C}_n} = \{(n, c_n) | n \in \mathbb{N}, c_n \in \mathcal{C}_n\}$,
- $\text{Hom} := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{C}_n}$,
- $\text{dom}(f) := (n, \text{dom}_{\mathcal{C}_n}(f))$ et $\text{codom}(f) := (n, \text{codom}_{\mathcal{C}_n}(f))$, pour $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_n}$,
- la composition est $((n, f_1), (n, f_2)) \mapsto (n, f_2 \circ f_1)$

Définition 16 (Catégorie des petites catégories) On note **Cat** la catégorie pour laquelle:

- $\text{Obj} := \{e \in U | e \text{ est une petite catégorie}\}$

6.2 Des catégories d'objets mathématiques

Définition 17 (Catégorie des ensembles) On note **Ens** la catégorie pour laquelle:

- $\text{Obj} := U$,
- pour tout $(e_1, e_2) \in U^2$, $\text{Hom}(e_1, e_2) = \{f : e_1 \rightarrow e_2 \text{ application}\}$,
- la composition est la composition d'applications

6.3 Exemples de foncteurs

Le foncteur identité:

$$\begin{aligned} id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ c &\mapsto c \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

Le foncteur constant:

$$\begin{aligned} c_0 : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ c &\mapsto c_0 \\ f &\mapsto id_{c_0} \end{aligned}$$

Étant données trois catégories $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, on définit un iso-foncteur naturel

$$\begin{aligned} Ass_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3} : \mathcal{C}_1 \times (\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3) &\rightarrow (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \times \mathcal{C}_3 \\ (c_1, (c_2, c_3)) &\mapsto ((c_1, c_2), c_3) \\ (f_1, (f_2, f_3)) &\mapsto ((f_1, f_2), f_3) \end{aligned}$$

7 Catégories monoïdales

Définition 18 (Catégorie monoïdale stricte) Soit \mathcal{C} une catégorie.

On munit \mathcal{C} d'une structure **monoïdale stricte** par la donnée

– d'un foncteur $\square : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, c'est-à-dire

pour tout couple (c_1, c_2) d'objets de \mathcal{C} , on associe un objet noté $c_1 \square c_2$ et

pour tout couple de morphismes $(f_1 : c_1 \rightarrow c'_1, f_2 : c_2 \rightarrow c'_2)$ de \mathcal{C} , on

associe un morphisme $f_1 \square f_2 : c_1 \square c_2 \rightarrow c'_1 \square c'_2$

tels que

$$\boxed{id_{c_1 \square c_2} = id_{c_1} \square id_{c_2}}$$

$$\boxed{(f_1 \square f_2) \circ (f'_1 \square f'_2) = (f_1 \circ f'_1) \square (f_2 \circ f'_2)}$$

– d'un objet c_0 ,

telle que

– $\square \circ (id_{\mathcal{C}} \times \square) = \square \circ (\square \times id_{\mathcal{C}}) \circ Ass_{\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{C}}$,

c'est-à-dire pour tout triplet (c_1, c_2, c_3) d'objets de \mathcal{C} , on a

$$\boxed{c_1 \square (c_2 \square c_3) = (c_1 \square c_2) \square c_3}$$

et tout triplet de morphisme (f_1, f_2, f_3) de \mathcal{C} , on a

$$\boxed{f_1 \square (f_2 \square f_3) = (f_1 \square f_2) \square f_3}$$

– $c_0 \square id_{\mathcal{C}} = id_{\mathcal{C}} = id_{\mathcal{C}} \square c_0$,

c'est-à-dire pour tout objet c de \mathcal{C} , on a

$$\boxed{c \square c_0 = c = c_0 \square c}$$

et pour tout morphisme $f : c_1 \rightarrow c_2$

$$\boxed{f \square id_{c_0} = f = id_{c_0} \square f}$$

Définition 19 (Catégorie monoïdale) Une **catégorie monoïdale** est une catégorie \mathcal{C} munie

– d'un foncteur $\square : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

- d'un objet $c_0 \in \mathcal{C}$
- de trois isomorphismes naturels
 - $ass : \square \circ (id_{\mathcal{C}} \times \square) \rightarrow \square \circ (\square \times id_{\mathcal{C}}) \circ Ass_{\mathcal{C},\mathcal{C},\mathcal{C}}$,
c'est-à-dire pour tout triplet (c_1, c_2, c_3) d'objets de \mathcal{C} , on a un isomorphisme

$$ass_{c_1, c_2, c_3} : c_1 \square (c_2 \square c_3) \rightarrow (c_1 \square c_2) \square c_3$$

tel que pour tout triplet de morphismes $(f_1 : c_1 \rightarrow c'_1, f_2 : c_2 \rightarrow c'_2, f_3 : c_3 \rightarrow c'_3)$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c_1 \square (c_2 \square c_3) & \xrightarrow{ass_{c_1, c_2, c_3}} & (c_1 \square c_2) \square c_3 \\ f_1 \square (f_2 \square f_3) \downarrow & & \downarrow (f_1 \square f_2) \square f_3 \\ c'_1 \square (c'_2 \square c'_3) & \xrightarrow{ass_{c'_1, c'_2, c'_3}} & (c'_1 \square c'_2) \square c'_3 \end{array}$$

est commutatif.

- $g : c_0 \square id_{\mathcal{C}} \rightarrow id_{\mathcal{C}}$
c'est à dire pour tout objet c de \mathcal{C} , on a un isomorphisme

$$g_c : c_0 \square c \rightarrow c$$

tel que pour tout de morphisme $f : c \rightarrow c'$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c_0 \square c & \xrightarrow{g_c} & c \\ c_0 \square f \downarrow & & \downarrow f \\ c_0 \square c' & \xrightarrow{g_{c'}} & c' \end{array}$$

est commutatif.

- $d : id_{\mathcal{C}} \square c_0 \rightarrow id_{\mathcal{C}}$
c'est-à-dire pour tout objet c de \mathcal{C} , on a un isomorphisme

$$d_c : c \square c_0 \rightarrow c$$

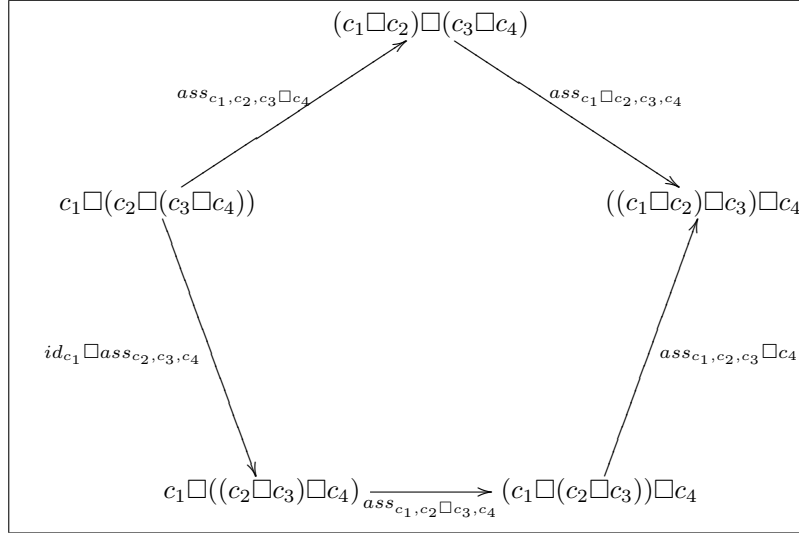
tel que pour tout de morphisme $f : c \rightarrow c'$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c \square c_0 & \xrightarrow{d_c} & c \\ c_0 \square f \downarrow & & \downarrow f \\ c' \square c_0 & \xrightarrow{d_{c'}} & c' \end{array}$$

est commutatif.

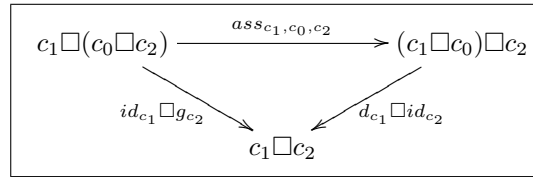
telle que

- le diagramme du pentagone:



commute,

– le diagramme triangulaire:



commute.

Remarque:

On pourrait penser que les catégories monoïdales peuvent se ramener aux catégories monoïdales strictes en passant au squelette et en remplaçant les isomorphismes respectifs d'associativité et de simplification du neutre par l'identité.

On ne peut pas faire cela car la catégorie obtenue n'a plus rien à voir avec la catégorie originale. Par exemple dans la catégorie des ensembles, on identifie par ce procédé tous les endomorphismes d'un objet entre eux d'après l'argument de Isbell qui suit:

8 Exemples de catégories monoïdales

Définition 20 (Catégorie monoïdale de foncteurs) Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale. On peut munir la catégorie $\text{Fon}(\mathcal{C}) := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^{c^n}$ de la structure monoïdale pour laquelle:

- $(n_1, F_1) \otimes (n_2, F_2) := (n_1 + n_2, \square \circ F_1 \times F_2 : \mathcal{C}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$ est le produit monoïdal,
- l'objet neutre est $(0, c_0 : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C})$

9 Théorème de commutativité de MacLane

Définition 21 (L'ensemble des mots de MacLane) Un élément de l'ensemble E de mots sur l'alphabet $\{(\ , \ - , \ m_0, \ \square\}$ défini inductivement par

$$m \in E \iff \begin{cases} m = m_0 \\ m = - \\ m = (m_1 \square m_2), (m_1, m_2) \in E \end{cases}$$

est appelé **mot de MacLane**. Les mots de MacLane **réduits** sont les mots construits sans utiliser la première règle inductive (mots où ne figurent pas m_0). On appelle mots de MacLane **totalemment réduits** les mots de MacLane réduits pour lesquels toutes les ouvertures de parenthèses sont en tête.

Définition 22 (Longueur de mots) On définit inductivement sur l'ensemble des mots de MacLane la fonction **longueur**:

$$\begin{cases} l(m_0) & = 0 \\ l(-) & = 1 \\ l((m_1 \square m_2)) & = l(m_1) + l(m_2) \end{cases}$$

Définition 23 (Rang d'un mot) On définit inductivement sur l'ensemble des mots de MacLane la fonction **rang**:

$$\begin{cases} r(m_0) & = 0 \\ r(-) & = 0 \\ r((m_1 \square m_2)) & = r(m_1) + r(m_2) + l(m_2) - 1 \end{cases}$$

Lemme 1 La longueur d'un mot de MacLane réduit est strictement positive. Le rang d'un mot de MacLane réduit est positif ou nul. Il est nul si et seulement si ce mot est totalemment réduit.

Preuve: $l(-) = 1, r(-) = 0$ et $(-)$ est totalemment réduit. Soient m_1, m_2 deux mots de MacLane réduits et soit $m = (m_1 \square m_2)$. Par hypothèse d'induction, les trois propriétés sont vraies pour m_1 et m_2 . $l(m) = l(m_1) + l(m_2)$ est strictement positif. Il s'en suit que $r(m)$ est positif.

Si m_1 ou m_2 n'est pas totalemment réduit (ce qui équivaut à $r(m_1) + r(m_2) > 0$) alors m n'est pas totalemment réduit (et $r(m) > 0$).

Si m_1 et m_2 sont totalemment réduits alors m est totalemment réduit
 \iff
 m_2 est le mot $-$
 \iff
 $l(m_2) = 1$
 \iff
 $r(m) = 0$

On définit sur l'ensemble des mots la relation R d'équivalence suivante:
 $m_1 R m_2 \iff l(m_1) = l(m_2)$

Définition 24 (La catégorie monoïdale libre à un générateur)
On appelle **catégorie monoïdale libre à un générateur** la catégorie, notée

W , associée au préordre (E, R) . Elle a donc comme objets les mots de MacLane et un seul morphisme entre deux mots de même longueur.

Elle est munie d'une structure monoïdale "naturelle" avec comme produit monoïdal $m_1, m_2 \mapsto (m_1 \square m_2)$ et avec m_0 pour unité. Les isomorphismes d'associativité et de simplification de l'élément neutre sont les uniques morphismes entre les bons objets. Comme pour toute catégorie associée à un préordre, tous les diagrammes dans W commutent.

Théorème 1 (MacLane) *Pour toute catégorie monoïdale B et tout objet $b \in B$, il existe un unique morphisme $\phi : W \rightarrow B$ de catégories monoïdales tel que $(-) \mapsto b$.*

Preuve: On note ce morphisme $m \mapsto m_b$ ce morphisme. Nécessairement pour avoir un morphisme de catégories monoïdales, on doit avoir:

$$(m_0)_b = c_0, \quad (-)_b = b, \quad (m_1 \square m_2)_b = (m_1)_b \square (m_2)_b$$

Ce qui détermine uniquement le morphisme de catégories monoïdales ϕ sur les objets. Tout le travail va être de définir ϕ sur les morphismes.

Définition 25 (Flèches basiques) *Dans une catégorie monoïdale \mathcal{C} , on définit inductivement un sous-ensemble Fle_b des **flèches basiques** de l'ensemble des morphismes par:*

Tout morphisme d'associativité et son inverse est une flèche basique.

Si β est une flèche basique alors pour tout objet c de \mathcal{C} $id_c \square \beta$ et $\beta \square id_c$ sont des flèches basiques.

Si une flèche basique fait intervenir un morphisme d'associativité, on dit qu'elle est dans le sens direct, sinon elle est dans le sens indirect. On note Fle_b^+ l'ensemble des flèches basiques directes.

Lemme 2 *Soit $\beta : m \rightarrow m'$ une flèche basique directe. $l(m) = l(m')$ et $r(m) > r(m')$*

Preuve:

– Si β est un morphisme d'associativité ass_{m_1, m_2, m_3} :

$$\begin{aligned} & l(m_1 \square (m_2 \square m_3)) - l((m_1 \square m_2) \square m_3) \\ &= l(m_1) + l(m_2) + l(m_3) - [l(m_1) + l(m_2) + l(m_3)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & r(m_1 \square (m_2 \square m_3)) - r((m_1 \square m_2) \square m_3) \\ &= r(m_1) + r(m_2 \square m_3) + l(m_2 \square m_3) - 1 - [r(m_1 \square m_2) + r(m_3) + l(m_3) - 1] \\ &= r(m_1) + r(m_2) + r(m_3) + l(m_2) + 2l(m_3) - 2 - [r(m_1) + r(m_2) + r(m_3) + l(m_2) + l(m_3) - 2] \\ &= l(m_3) > 0 \text{ car } m_3 \text{ est réduit.} \end{aligned}$$

– si $\beta = \beta' \square id_{m_1} : m \square m_1 \rightarrow m' \square m_1$

$$l(m \square m_1) - l(m' \square m_1) = l(m) - l(m') = 0 \text{ par hypothèse d'induction.}$$

$$\begin{aligned} & r(m \square m_1) - r(m' \square m_1) \\ &= r(m) + r(m_1) + l(m_1) - 1 - [r(m') + r(m_1) + l(m_1) - 1] \\ &= r(m) - r(m') > 0 \text{ par hypothèse d'induction.} \end{aligned}$$

- si $\beta = id_{m_1} \square \beta' : m_1 \square m \rightarrow m_1 \square m'$
 $l(m_1 \square m) - l(m_1 \square m')$
 $= l(m) - l(m') = 0$ par hypothèse d'induction.

$$\begin{aligned} & r(m_1 \square m) - r(m_1 \square m') \\ &= r(m_1) + r(m) + l(m) - 1 - [r(m_1) + r(m') + l(m') - 1] \text{ or l'origine et} \\ & \text{l'extrémité d'une flèche basique ont même longueur} \\ &= r(m) - r(m') > 0 \text{ par hypothèse d'induction.} \end{aligned}$$

Définition 26 (Déplacement de parenthèse) Soit d la fonction définie inductivement sur l'ensemble des flèches basiques directes de W par:

$$\begin{aligned} d(ass_{m_1, m_2, m_3}) &:= 1 + l(m_1) \\ d(id_m \square \beta) &:= l(m) + d(\beta) \\ d(\beta \square id_m) &:= 1 + d(\beta) \end{aligned}$$

La fonction d sert à indiquer qu'entre le domaine d'une flèche basique directe α et son codomaine, la $d(\alpha)$ -ième parenthèse ouvrante est déplacée. $d(\alpha)$ est strictement inférieur à la longueur du domaine de α qui est égal au nombre de parenthèses ouvrantes plus une.

Lemme 3 Soit m un mot de MacLane réduit. Soit $Fle_b(m, -)$ l'ensemble des flèches basiques d'origine m , d est injective sur $Fle_b(m, -)$

Preuve:

Soient $\beta : m \rightarrow m'$ et $\beta' : m \rightarrow m''$ deux flèches basiques distinctes.

- Si l'une, par exemple, β est un morphisme d'associativité alors β' est de la forme $id_{m_1} \square \beta''$ et $d(\beta) = 1 + l(m_1) < d(\beta'') + l(m_1) = d(\beta')$
- Si β et β' ont la même forme l'hypothèse d'induction s'applique et $d(\beta) \neq d(\beta')$
- Sinon $\beta = id_m \square \gamma'$ et $\beta = \gamma \square id_{m'}$ avec $\gamma : m \rightarrow m_1$ et $\gamma' : m' \rightarrow m'_1$, on obtient $d(\beta) = l(m) + d(\gamma') > l(m) + 1 > d(\gamma) + 1 = d(\beta')$

Définition 27 Soit G_n (resp. G_n^+) le sous-graphe de W dont les sommets sont les mots de MacLane réduits de longueur n et dont les flèches sont les flèches basiques (resp. flèches basiques directes).

Définition 28 On définit inductivement sur les flèches le diagramme

$$\begin{array}{lcl} D^+ : & G_n^+ & \rightarrow UB \\ & m & \mapsto m_b \\ & ass_{m_1, m_2, m_3} & \mapsto ass_{m_{1b}, m_{2b}, m_{3b}} \\ & id_m \square \beta & \mapsto id_{m_b} \square D(\beta) \\ & \beta \square id_m & \mapsto D(\beta) \square id_{m_b} \\ \\ D : & G_n & \rightarrow UB \\ & m & \mapsto m_b \\ & f & \mapsto \begin{array}{l} D^+(f) \quad \text{si } f \text{ est directe} \\ [D^+(f^{-1})]^{-1} \quad \text{sinon} \end{array} \end{array}$$

On souhaite montrer que ce diagramme est commutatif. Pour cela on va définir, pour tout couple de mots (m_1, m_2) de MacLane réduits de même longueur, un chemin canonique de m_1 vers m_2 .

Définition 29 (Chemin canonique) Notons $m^{(n)}$ l'unique mot de MacLane totalement réduit de longueur n .

Soit m un mot de MacLane réduit, en empruntant dans le graphe le chemin constitué des flèches basiques directes qui déplacent la parenthèse ouvrante la plus à droite possible, on définit un chemin canonique de $\gamma(m) : m \rightarrow m^{(n)}$.

En empruntant ce chemin, dans l'autre sens, on définit un chemin canonique constitué de flèches basiques indirectes noté $\gamma(m)^{-1} : m^{(n)} \rightarrow m$.

Pour tout couple de mots de MacLane réduits (m_1, m_2) , on obtient alors un **chemin canonique** $can(m_1 \rightarrow m_2)$ en faisant suivre $\gamma(m_1)$ de $\gamma(m_2)^{-1}$.

Lemme 4 Si pour tout mot de MacLane réduit m , D^+ est (m, m^n) -commutatif alors D est un diagramme commutatif.

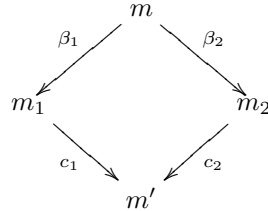
Preuve:

Soient m et m' deux mots de MacLane réduits de longueur n et soit c un chemin d'origine m et d'extrémité m' . c se décompose en c_1, \dots, c_k où $c_j = (f_{j,1}, \dots, f_{j,i_j})$ tel que les $f_{j,k}$ et les $f_{j+1,l}$ sont des flèches basiques de sens contraire.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 m = m_1 & \xrightarrow{D(c_1)} & m_2 & \xrightarrow{D(c_2)} & m_3 & \xrightarrow{D(c_3)} & \dots & \xrightarrow{D(c_{k-2})} & m_{k-1} & \xrightarrow{D(c_{k-1})} & m_k = m' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 m^n = & & m^n = & & m^n = & & & & m^n = & & m^n
 \end{array}$$

Comme pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, D^+ est (m_i, m^n) -commutatif, tous les carrés du diagramme précédent commutent et $comp(D(c)) = D(can(m \rightarrow m'))$.

Lemme 5 (Confluence) Si $\beta_1 : m \rightarrow m_1$ et $\beta_2 : m \rightarrow m_2$ sont deux flèches basiques directes, il existe un mot de MacLane réduit m' et deux chemins $c_1 : m_1 \rightarrow m', c_2 : m_2 \rightarrow m'$ de G_n^+ tels que $comp(D(c_1)) \circ D(\beta_1) = comp(D(c_2)) \circ D(\beta_2)$. Ce qui est exactement la commutativité du sous-diagramme de D de schéma



Preuve:

Montrons la propriété de confluence par récurrence sur la longueur de m .

L'origine d'une flèche basique directe est de la forme $m = p \square q$.

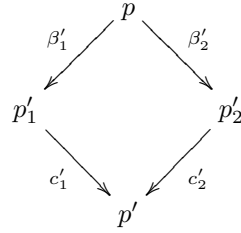
Cette flèche basique a trois formes possibles:

- $\beta \square i d_q$ auquel cas on dit qu'elle agit sur p

- $id_p \square \beta$ auquel cas on dit qu'elle agit sur q
- ass_{p,q_1,q_2} avec $q = q_1 \square q_2$

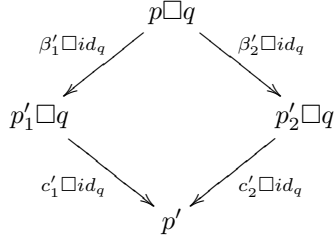
Soient $\beta_1 : m \rightarrow m_1$ $\beta_2 : m \rightarrow m_2$ deux flèches basiques directes. On distingue les cas suivants:

- Si β_1 et β_2 agissent sur p , il existe $\beta'_1 : p \rightarrow p'_1, \beta'_2 : p \rightarrow p'_2$ avec $\beta_1 = \beta'_1 \square id_q$ et $\beta_2 = \beta'_2 \square id_q$. Par hypothèse de récurrence, il existe deux chemins c'_1, c'_2 tels que le diagramme

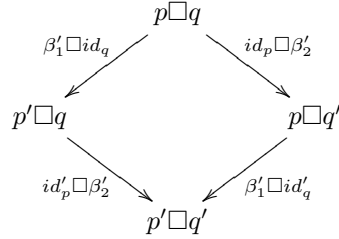


est commutatif.

On peut alors construire le diagramme commutatif suivant:

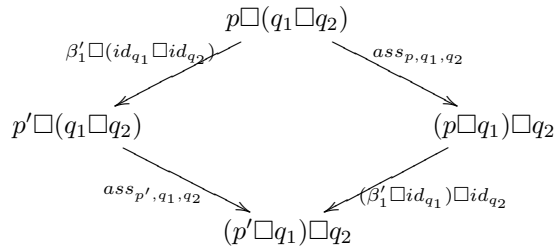


- Si β_1 agit sur p et β_2 agit sur q , par la functorialité du produit monoïdal, le diagramme

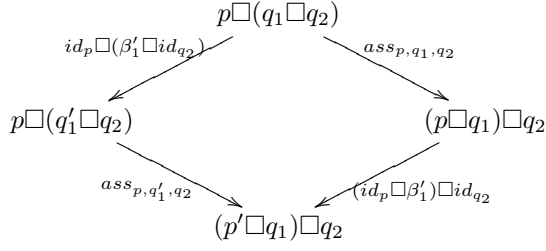


est commutatif.

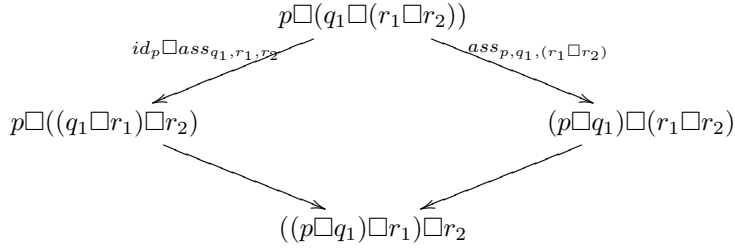
- Si β_1 agit sur p et β_2 est un morphisme d'associativité ass_{p,q_1,q_2} , la naturalité de ass fournit le diagramme commutatif suivant:



- Si β_1 agit sur q et β_2 est un morphisme d'associativité ass_{p,q_1,q_2} , on a alors deux sous-cas:
 - Si β_1 agit sur q_1 alors $\beta_1 = id_p \square (\beta'_1 \square id_{q_2})$, la naturalité de ass fournit encore un diagramme commutatif



- Si $\beta = id_p \square ass_{q_1, r_1, r_2}$ avec $q_2 = r_1 \square r_2$ alors le diagramme du pentagone donne le résultat:

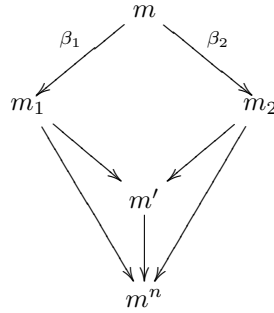


- Tous les cas "oubliés" sont analogues à l'un de ces cas.

Lemme 6 Pour tout m mot de MacLane réduit D^+ est (m, m^n) -commutatif.

Preuve: Montrons cela par récurrence sur le rang de m . Si $r(m) = 0$ alors $m = m^n$ et il n'y a pas de chemin de m^n vers m^n . Soient $(\beta_1, c_1), (\beta_2, c_2)$ deux chemins de G_n^+ de m vers m^n

Le sous-diagramme de D qui a pour schéma



est (m, m') -commutatif par confluence. Il est $\{(m_1, m^n), (m_2, m^n)\}$ -commutatif par hypothèse de récurrence. Mais alors

$$\begin{aligned}
& D(\text{can}(m_2 \rightarrow m^n) \circ D(\beta_2)) \\
&= D(\text{can}(m' \rightarrow m^n)) \circ \text{comp}(D(c_2)) \circ D(\beta_2) \\
&= D(\text{can}(m' \rightarrow m^n)) \circ \text{comp}(D(c_1)) \circ D(\beta_1) \\
&= D(\text{can}(m_1 \rightarrow m^n)) \circ D(\beta_1)
\end{aligned}$$

et D^+ est (m, m^n) -commutatif.

Définition 30 (Catégories de foncteurs) Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux catégories. On note $\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1}$ la catégorie dont

- les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$,
- les morphismes sont les transformations naturelles entre tels foncteurs,
- la composition est $(\tau : F_1 \rightarrow F_2, \eta : F_2 \rightarrow F_3) \mapsto (c_1 \mapsto \eta_{c_1} \circ \tau_{c_1})$.

Définition 31 (Somme de catégories) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{C}_n une catégorie. On note $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ la catégorie pour laquelle

- $\text{Obj} := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Obj}_{\mathcal{C}_n} = \{(n, c_n) | n \in \mathbb{N}, c_n \in \mathcal{C}_n\}$,
- $\text{Hom} := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{C}_n}$,
- $\text{dom}(f) := (n, \text{dom}_{\mathcal{C}_n}(f))$ et $\text{codom}(f) := (n, \text{codom}_{\mathcal{C}_n}(f))$, pour $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_n}$,
- la composition est $((n, f_1), (n, f_2)) \mapsto (n, f_2 \circ f_1)$

Définition 32 (Catégorie monoïdale de foncteurs) Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale. On peut munir la catégorie $\text{Fon}(\mathcal{C}) := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^{C^n}$ de la structure monoïdale pour laquelle:

- $(n_1, F_1) \square (n_2, F_2) := (n_1 + n_2, \square \circ F_1 \times F_2 : \mathcal{C}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$ est le produit monoïdal,
- l'objet neutre est $(0, c_0 : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C})$

Théorème 2 (Corollaire) Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale. Il existe un morphisme de catégories monoïdales

$$\begin{array}{ccc} \text{can} : W & \rightarrow & \text{Fon}(\mathcal{C}) \\ & - \mapsto & \text{Id}_{\mathcal{C}} \end{array}$$

$$\text{can}(m_0, m_0) = \text{Id}_{m_0}$$

$$\text{can}(-, -) = \text{id}_{\mathcal{C}}$$

$$\text{can}(- \square (- \square -), (- \square -) \square -) = \text{ass}_{\mathcal{C}}$$

$$\text{can}(m_0 \square -) = n_g$$

$$\text{can}(- \square m_0) = n_d$$

$$\text{can}(m_1 \square m_2, m'_1 \square m'_2) = \text{can}(m_1, m'_1) \square \text{can}(m_2, m'_2)$$