L'équation $\begin{cases} x^y = y^x \\ x < y \end{cases}$

Pierre Abbrugiati

Table des matières

1 Introduction

1.1 Lemmes préliminaires

Mini-scholie 1.1 *(coïncidence des définitions)*
Les deux définitions de x^y *coïncident dès que*
- $x \in \mathbb{R}_+$
- $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

Mini-scholie 1.2 *(propriété* (1) *généralisée)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3?,\ x^{y+z} = x^y.x^z$

Mini-scholie 1.3 *(propriété* (2) *généralisée)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall (x, y, z) \in ?,\ x^{yz} = (x^y)^z$

Corollaire 1.4 *(inversion)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall (x, y) \in ?,\ \frac{1}{x^y} = (\frac{1}{x})^y.$

Mini-scholie 1.5 *(propriété* (3) *généralisée)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall (x, y, z) \in ?,\ (xy)^z = x^z.y^z$

Corollaire 1.6 *(isolation de la partie négative)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}_+,\ (-x)^y = (-1)^y.x^y.$

Mini-scholie 1.7 *(injectivité en* x*)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall y \in \mathbb{R}$, *l'application* $\left\{ \begin{array}{lcl} R_+ & \rightarrow & R_+ \\ x & \mapsto & x^y \end{array} \right.$ *est injective.*

Mini-scholie 1.8 *(injectivité en* y*)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, *l'application* $\left\{ \begin{array}{lcl} R_+ & \rightarrow & R_+ \\ y & \mapsto & x^y \end{array} \right.$ *est injective.*

Mini-scholie 1.9 *(passage au module)*
Quelle que soit la définition adoptée, on a :
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z},\ |x^y| = |x|^y.$

Mini-scholie 1.10 *(égalité des arguments)*
Si deux nombres complexes sont égaux, alors leurs arguments sont égaux.
En particulier $\forall x \in R,\ e^{x.i.\pi} \in R_+ \Rightarrow x \equiv 2.i.\pi \pmod{2.i.\pi}$

Mini-scholie 1.11 *(parité)*
On se place ici dans le cadre de la définition A.
$\forall (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ (-1)^{\frac{c}{d}} \in \mathbb{R} \Rightarrow c$ *est pair.*

Lemme 1.12
Soit r un nombre rationnel positif. Supposons qu'il existe un entier n tel que r^n soit entier.
Alors r est lui-même un entier.

Preuve :

Lemme 1.13
Soient a, b, m, n des entiers avec $m \wedge n = 1$.
Si $a^n = b^m$ alors il existe deux entiers u et v tels que $a = u^m$ et $b = v^n$.

Preuve :

Utilisons les décompositions de a et b en facteurs premiers : notons $p_1, ..., p_s$ les facteurs premiers intervenant dans les décompositions de a et de b, on a

$$a = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} \qquad b = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}$$

et donc $a^n = b^m$ devient $\displaystyle\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i n} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i m}$.
Par unicité d'une décomposition en facteurs premiers, il vient :
$\forall i \in \{1, ...s\},\ \alpha_i n = \beta_i m$.

Soit $i \in \{1, ...s\}$, n divise $\beta_i m$, et comme $n \wedge m = 1$, n divise β_i selon le lemme de Gauss. De même m divise $\alpha_i n$ donc m divise α_i.
Ainsi, $\alpha_i = m\alpha'_i$ et $\beta_i = n\beta'_i$.

Par suite, $a = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m\alpha'_i} = \left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha'_i}\right)^m$ et $b = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n\beta_i} = \left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta'_i}\right)^n$.

Remarque 1.14 *(exit 0)*
Quelle que soit la définition adoptée, si $x \in \mathbb{R}$ est non nul, alors $x^0 = 1$ et $0^x = 0$; donc quel que soit $x \neq 0$, $(0, x)$ et $(x, 0)$ ne seront jamais solution de E. Cette remarque justifie que dans tout ce qui suit, on ne considère que les solutions non nulles.

2 Résolution dans $\mathbb{N}^2$

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1
Les solutions entières naturelles de (E) forment l'ensemble singleton { (2,4) } :
$S_{\mathbb{N}} := \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, (x,y) \text{ respecte } (E)\} = \{(2,4)\}$.

Il me semble que ce théorème pourrait faire l'objet d'un intéressant exercice de niveau deug. Pour rendre ma preuve la plus claire possible, je l'ai scindée en trois lemmes. Ces lemmes pourraient justement correspondre à des questions intermédiaires dans le cadre d'un exercice guidé.

Lemme 2.2 *(forme de y)*
Soit $(x,y) \in S_{\mathbb{N}}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = (k+1).x$.

<u>Preuve</u> :

Notons $c := y - x$, on a $c > 0$ et $y = x + c$.

(E) devient $x^{(x+c)} = (x+c)^x$
c'est à dire (selon 1.2) $x^x.x^c = (x+c)^x$
ou encore $x^x.x^c = (x.(1+\frac{c}{x}))^x$
soit (selon 1.5) $x^x.x^c = x^x.(1+\frac{c}{x})^x$.

Ainsi $x^c = (1+\frac{c}{x})^x$ donc en particulier $(1+\frac{c}{x})^x \in \mathbb{N}$
d'où d'après 1.12 $1+\frac{c}{x} \in \mathbb{N}$ et ainsi x divise c, c'est à dire $c = k.x,\ k \in \mathbb{Z}$.
Enfin, comme $c > 0$, on a bien $k \in \mathbb{N}^*$.
$y = x + c$ devient alors $y = (k+1).x$.

Lemme 2.3 *(forme de x)*
Soit $(x,y) \in S_{\mathbb{N}}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \sqrt[k]{k+1}$.

<u>Preuve</u> :

On vient de voir que $y = (k+1).x$.

(E) devient $x^{(k+1).x} = ((k+1).x)^x$
c'est à dire (selon 1.3) $(x^{k+1})^x = ((k+1).x)^x$
d'où (selon 1.7) $x^{k+1} = (k+1).x$
soit $x^k = k+1$, et donc $x = \sqrt[k]{k+1}$.

Lemme 2.4 *(étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n := \sqrt[n]{n+1}$
La suite u_n vérifie les trois points suivants :

- $u_1 = 2$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1$

Preuve :

- $u_1 = \sqrt[1]{1+1} = 2$

- Tout d'abord $u_2 = \sqrt[2]{2+1} = \sqrt{3} < 2$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît sur $[1,2]$

  Ensuite $\frac{\partial}{\partial n}u_n = \sqrt[n]{n+1} \times \frac{\partial}{\partial n}(\frac{\ln(n+1)}{n}) = \sqrt[n]{n+1} \times \frac{\frac{n}{n+1} - \ln(n+1)}{n^2}$
  Ainsi, la dérivée de u est du signe de $n - (n+1)\ln(n+1)$
  Pour $n \geq 2$ on a $\ln(n+1) \geq \ln(3) > \ln(e) = 1$ donc $n-(n+1)\ln(n+1) < -1$

  Et donc pour $n \geq 2$ on a $\frac{\partial}{\partial n}u_n < 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît sur $[2,+\infty[$

- $u_n = e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}$, et (croissance comparée) $\frac{\ln(n+1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  Il s'ensuit (par continuité de l'exponentielle) que $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1$

Preuve du théorème 2.1 :

D'après ce qui précède, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow 1 < u_n < 2$
Ainsi donc u_n n'est pas un entier pour $n \geq 2$.

Or x est un entier tel qu'il existe k avec $x = u_k$, donc nécessairement k doit être égal à 1.

Par suite, on a nécessairement $x = 2$ et $y = (1+1)x = 4$.

Reciproquement, $(2,4)$ est bien une solution de (E).

On a donc bien $S_{\mathbb{N}} = \{(2,4)\}$.

3 Résolution dans $\mathbb{Z}^2$

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Corollaire 3.1
Les solutions entières relatives de (E) forment la paire { (-4,-2) ; (2,4) } :
$S_{\mathbb{Z}} := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \text{ respecte } (E)\} = \{(-4, -2); (2, 4)\}$.

Une fois étudié le cas entier naturel, cette généralisation ne pose pas de problème particulier.
Pour plus de clarté, j'ai là encore décomposé la preuve en deux lemmes intermédiaires pour différencier les deux cas non encore traités : $x < 0 < y$ et $x < y < 0$.

Lemme 3.2 *(signe de xy)*
Soit $(x, y) \in S_{\mathbb{Z}}$, alors $xy > 0$
C'est à dire qu'il n'existe pas de solution $(x, y) \in S_{\mathbb{Z}}$ avec $x < 0 < y$.

Preuve :

Soit $(x, y) \in S_{\mathbb{Z}}$ avec $x < 0 < y$.
Posons $X := -x$ et $Y := y$, on a $X \in \mathbb{N}^*, Y \in \mathbb{N}^*$ et $(-X)^Y = Y^{-X}$

d'où $|(-X)^Y| = |Y^{-X}|$
c'est à dire (selon 1.9) $X^Y = \dfrac{1}{Y^X}$, mais $X^Y \geq 1$ et $\dfrac{1}{Y^X} \leq 1$.
Une égalité n'est donc possible que pour $X^Y = 1$ et $\dfrac{1}{Y^X} = 1$, soit pour $X = Y = 1$.

Ainsi, une condition nécessaire est $x = -1, y = 1$. Clairement, elle n'est pas suffisante ($(-1, 1)$ n'est pas une solution de (E)), donc il n'y a pas de solution de cette forme.

Lemme 3.3 *(solutions négatives)*
Soit $(x, y) \in S_{\mathbb{Z}}$, avec $x < y < 0$; alors $(x, y) = (-4, -2)$.

Preuve :

Soit $(x, y) \in S_{\mathbb{Z}}$ avec $x < y < 0$.
Posons $X := -x$ et $Y := -y$, on a $X \in \mathbb{N}^*, Y \in \mathbb{N}^*$ et $(-X)^{-Y} = (-Y)^{-X}$
C'est à dire $(-X)^Y = (-Y)^X$, et donc $|(-X)^Y| = |(-Y)^X|$.

Ce qui peut se réécrire (selon 1.9) $X^Y = Y^X$

Le théorème 2.1 permet de conclure $Y = 2$, $X = 4$.
Par suite, $x = -4$ et $y = -2$. Cette condition nécessaire est évidemment suffisante ($(-4, -2)$ est bien une solution de (E)), d'où le résultat annonçé.

<u>Preuve du corollaire 3.1</u> :

D'après ce qui précède, il suffit d'examiner les solutions de même signe. Pour x et y positifs, on a une seule solution, $(2, 4)$; et pour x et y négatifs, on a une seule solution, $(-4, -2)$. Les deux seules solutions sont donc $(2, 4)$ et $(-4, -2)$.

4 Résolutions dans $\mathbb{Q}^2$

Dans cette section, les deux définitions de l'exponentiation ne coincident plus nécessairement. Cette partie sera donc scindée en trois sous-sections. Dans la première, je me placerai dans ${\mathbb{Q}_+}^2$, ensemble sur lequel les définitions coincident. Dans les deux suivantes, je me placerai dans les ensembles $\mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_+$ puis ${\mathbb{Q}_-}^2$, en considérant séparément les solutions obtenues pour chaque définition. Comme annonçé, on verra que les ensembles solutions peuvent différer selon la définition adoptée.

Avant tout, voici un lemme intermédiaire qui s'avèrera utile :

Lemme 4.1

- *L'équation* $\left\{ \begin{array}{l} u^n + (2v)^n = n \\ (u,v,n) \in \mathbb{N}^{*3} \end{array} \right.$ *n'a pas de solution.*

- *L'équation* $\left\{ \begin{array}{c} u^n - v^n = n \\ (u,v,n) \in \mathbb{N}^{*3},\ u > v \end{array} \right.$ *a pour solution* $\{(v+1, v, 1); v \in \mathbb{N}^*\}$

<u>Preuve</u> :

- Soit $(u,v,n) \in \mathbb{N}^{*3}$, on a $u^n + (2v)^n \geq 2^n + 1$.
  Etudions la fonction $f : n \mapsto 2^n - n + 1$ sur $[1, +\infty[$:
  $f(1) = 2 > 0$ et $\frac{\partial f}{\partial n}(n) = \ln(2)2^n - 1 \geq 2\ln(2) - 1 > 0$, ainsi f est strictement positive en 1 et croissante, donc strictement positive sur $[1, +\infty[$.
  Par suite $u^n + (2v)^n > n$ et donc $u^n + (2v)^n = n$ est sans solution.

- Soit $(u,v,n) \in \mathbb{N}^{*3}$; $u > v \Leftrightarrow u \geq v + 1 \Rightarrow u^n \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^k$
  Pour $n \geq 2$ on a au moins trois termes dans cette somme.
  Plus exactement, on obtient : $u^n \geq 1 + nv + v^n > v^n + n$ car $v \geq 1$.
  Ainsi $n \geq 2 \Rightarrow u^n - v^n > n$ et alors $u^n - v^n = n$ n'a pas de solution.
  Pour $n = 1$, on trouve $u = v + 1$. D'où l'ensemble de solutions annonçé.

4.1 Résolution dans ${\mathbb{Q}_+}^2$

L'objectif de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2
Les solutions rationelles positives de (E) *forment* $\{((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+1}{n})^{n+1}); n \in \mathbb{N}^*\}$ *:*
$S_{\mathbb{Q}_+} := \{(x, y) \in \mathbb{Q}_+, (x, y) \textit{ respecte } (E)\} = \{((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+1}{n})^{n+1}); n \in \mathbb{N}^*\}$.

On cherche les solutions rationnelles (non nulles) de (E), c'est à dire, en utilisant l'écriture des rationnels en fraction irréductible, des entiers strictements positifs a, b, c, d tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ et $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{c}{d})^{\frac{a}{b}}$ et $a \wedge b = c \wedge d = 1$.

Dans la suite de la sous-section, a, b, c, d désignent de tels entiers, et de plus on note $\gamma := a \wedge c$; $\delta := b \wedge d$; $a' := \frac{a}{\gamma}$; $b' := \frac{b}{\delta}$; $c' := \frac{c}{\gamma}$ et $d' := \frac{d}{\delta}$.

J'ai scindé la preuve du théorème 4.2 en deux lemmes, mais ce découpage reste très artificiel et permet seulement de "souffler" un peu lors de la démonstration.

Lemme 4.3 *(formes de* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$*)*
Il existe deux entiers u *et* v*, premiers entre eux, tels que :*
$a = u^{a'.d'}$*,* $b = v^{a'.d'}$*,* $c = u^{b'.c'}$ *et* $d = v^{b'.c'}$.

<u>Preuve</u> :

Comme $a \wedge b = 1$, on a, en particulier, $a \wedge b' = 1$; par ailleurs $d' \wedge b' = 1$; on en déduit $a.d' \wedge b' = 1$.

L'équation (E) peut se réécrire $(\frac{c}{d})^{\frac{a}{b'.\delta}} = (\frac{a}{b})^{\frac{c}{d'.\delta}}$.
D'où selon 1.3 (avec $z = d'.\delta$), $(\frac{c}{d})^{\frac{a.d'}{b'}} = (\frac{a}{b})^c$.
En particulier $(\frac{c}{d})^{\frac{a.d'}{b'}} \in \mathbb{Q}$ et donc $\exists\, m, n \in \mathbb{N}^*, (\frac{c}{d})^{a.d'} = (\frac{m}{n})^{b'}$.
Mais $a.d' \wedge b' = 1$, donc (selon 1.13) $\exists\, p, q \in \mathbb{N}^*$, $\frac{c}{d} = (\frac{p}{q})^{b'}$.

L'équation (E) devient alors $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{p}{q})^{\frac{a}{\delta}}$,
d'où par 1.3 (avec $z = \delta$) $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d'}} = (\frac{p}{q})^a$.
En particulier $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d'}} \in \mathbb{Q}$ et donc $\exists\, k, l \in \mathbb{N}^*, (\frac{a}{b})^c = (\frac{k}{l})^{d'}$.
Mais $c \wedge d' = 1$, donc (selon 1.13) $\exists\, r, s \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b} = (\frac{r}{s})^{d'}$.

L'équation (E) devient alors $(\frac{r}{s})^{\frac{d'.c}{d}} = (\frac{p}{q})^{\frac{b'.a}{b}}$ ou encore $(\frac{r}{s})^{\frac{\gamma.c'}{\delta}} = (\frac{p}{q})^{\frac{\gamma.a'}{\delta}}$
D'où $(\frac{r}{s})^{c'} = (\frac{p}{q})^{a'}$. Il s'ensuit $\exists\, (u, v) \in {\mathbb{N}^*}^2$, $\frac{r}{s} = (\frac{u}{v})^{a'}$ et $\frac{p}{q} = (\frac{u}{v})^{c'}$.

Par suite, $\frac{a}{b} = (\frac{u}{v})^{a'.d'}$ et $\frac{c}{d} = (\frac{u}{v})^{b'.c'}$.

Pour u et v choisis premiers entre eux, $u^{a'.d'}$ et $v^{a'.d'}$ le sont aussi, et par unicité de la représentation en fraction irréductible, $a = u^{a'.d'}$ et $b = v^{a'.d'}$.
De même $c = u^{b'.c'}$ et $d = v^{b'.c'}$.

Lemme 4.4 *(formes de u et de v)*
Deux entiers définis par le théorème précédent vérifient $u = b'.c'$ *et* $v = a'.d'$.
De plus, on a : $b'.c' = a'.d' + 1$.

Preuve :

Tout d'abord, remarquons : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d < b.c \Leftrightarrow a'.d' < b'.c'$
Et comme a, b, c, et d sont des entiers, on a plus précisément $b'.c' - a'.d' \in \mathbb{N}^*$.
Notons $n := b'.c' - a'.d'$.

Réécrivons une fois encore l'équation (E) : on obtient $(\frac{u}{v})^{a'.d'.(\frac{u}{v})^{b'.c'}} = (\frac{u}{v})^{b'.c'.(\frac{u}{v})^{a'.d'}}$
Selon 1.8 on a donc $a'.d'.(\frac{u}{v})^{b'.c'} = b'.c'.(\frac{u}{v})^{a'.d'}$ soit $(\frac{u}{v})^{b'.c'-a'.d'} = \frac{b'.c'}{a'.d'}$
ou encore : $\frac{u^n}{v^n} = \frac{b'.c'}{a'.d'}$, mais les fractions $\frac{u^n}{v^n}$ et $\frac{b'.c'}{a'.d'}$ sont irréductibles.

On peut donc conclure : $\begin{cases} u^n = b'.c' \\ v^n = a'.d' \end{cases}$

Et donc $u^n - v^n = n$, avec de plus $u > v$ (puisque $b'.c' > a'.d'$).
Selon le lemme 4.1, on a nécessairement $n = 1$.
Il s'ensuit $u = b'.c'$, $v = a'.d'$ et $b'.c' = a'.d' + 1$.

Preuve du théorème 4.2 :

Selon les deux lemmes précédents, on peut écrire $a = (b'.\,c')^{a'.d'}$ c'est à dire $a'.\gamma = b'^{a'.d'}.\,c'^{a'.d'}$ et comme $a' \wedge b' = 1$, on a aussi $a' \wedge b'^{a'.d'} = 1$; et de même comme $a' \wedge c' = 1$, on a aussi $a' \wedge c'^{a'.d'} = 1$. Donc, finalement, $a' \wedge (b'.c')^{a'.d'} = 1$
Mais a' divise $(b'.c')^{a'.d'}$, on en conclut $\boxed{a' = 1}$

Par suite $\gamma = b'^{d'}.\,c'^{d'}$ et comme $b' \wedge \gamma = 1$, on a aussi $b'^{d'} \wedge \gamma = 1$
Mais $b'^{d'}$ divise γ, on en conclut $b'^{d'} = 1$ d'où $\boxed{b' = 1}$

Ainsi $\gamma = c'^{d'}$, et (en réécrivant $b = (a'.\,d')^{a'.d'}$) $\delta = d'^{d'}$
Par ailleurs (en réécrivant $n = 1$) on a $c' = d' + 1$. Donc finalement a, b, c et d doivent vérifier $\boxed{a = (d'+1)^{d'},\ b = d'^{d'},\ c = (d'+1)^{d'+1} \text{ et } d = d'^{d'+1}}$

Réciproquement soit $d' \in \mathbb{N}^*$, les rationnels $x := (\frac{d'+1}{d'})^{d'}$ et $y := (\frac{d'+1}{d'})^{d'+1}$ respectent bien (E), c'est à dire que notre condition nécessaire est suffisante, ou encore que $S_{\mathbb{Q}_+} = \{((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+1}{n})^{n+1}); n \in \mathbb{N}\}$.

4.2 Résolution dans $\mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_+$

Dans cette sous-section, comme annoncé, on note (E_A) l'équation (E) pour la première définition de l'exponentiation et (E_B) l'équation (E) pour la seconde définition. On va voir que dans chacun des deux cas, il n'y a pas de solution, c'est à dire :

Théorème 4.5

- $\{(x,y) \in \mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_+,\ (x,y) \textit{ respecte } E_A\} = \emptyset$
- $\{(x,y) \in \mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_+,\ (x,y) \textit{ respecte } E_B\} = \emptyset$

Utilisons l'écriture des rationnels en fraction irréductible. On cherche des entiers strictements positifs a, b, c, d tels que $a \wedge b = c \wedge d = 1$ et $(-\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{c}{d})^{\frac{a}{b}}$ pour l'une ou l'autre des définitions.

Dans la suite de la sous-section, a, b, c, d désignent de tels entiers, et de plus on note $\gamma := a \wedge c$; $\delta := b \wedge d$; $a' := \frac{a}{\gamma}$; $b' := \frac{b}{\delta}$; $c' := \frac{c}{\gamma}$ et $d' := \frac{d}{\delta}$.

Lemme 4.6 *(équation (E_A) : formes de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$)*
On est dans le cadre où $(\frac{-a}{b}, \frac{c}{d})$ respecte (E_A)
Alors il existe deux entiers u et v tels que :
$\frac{a}{b} = (\frac{u}{2v})^{a'.d'}$ *et* $\frac{c}{d} = (\frac{2v}{u})^{b'.c'}$.

<u>Preuve</u> :

Tout d'abord, remarquons que c est nécessairement pair.
En effet selon 1.3 (x, y) respecte (E_A) implique $(-\frac{a}{b})^c = (\frac{c}{d})^{-\frac{a.d}{b}}$ et donc en particulier $(-\frac{a}{b})^c \in \mathbb{R}_+$ et donc $\exists\ c_0 \in \mathbb{N}^*,\ c = 2.c_0$.

(E_A) se réécrit $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{d}{2.c_0})^{\frac{a}{b}}$ et donc (par 1.7 ou 1.3) $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d'}} = (\frac{d}{2.c_0})^{\frac{a}{b'}}$ d'où (toujours par 1.7 ou 1.3) $(\frac{d}{2.c_0})^{\frac{a.d'}{b'}} = (\frac{a}{b})^c \in \mathbb{Q}$.

Comme $a.d' \wedge b' = 1$, il résulte que $\exists\ (p, q) \in \mathbb{N}^*,\ d = q^{b'}$ et $2.c_0 = p^{b'}$. Ainsi $p^{b'}$ est pair, et donc $\exists\ p_0,\ c = (2.p_0)^{b'}$.

Réécrivons (E_A), on obtient $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{q}{2.p_0})^{\frac{a}{\delta}}$, et donc $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d'}} = (\frac{q}{2.p_0})^{a} \in \mathbb{Q}$. Comme $c \wedge d' = 1$ on obtient $\exists\ (r, s) \in \mathbb{N}^*,\ \frac{a}{b} = (\frac{r}{s})^{d'}$

En réécrivant une fois encore (E_A) on trouve $(\frac{r}{s})^{\frac{c}{\delta}} = (\frac{q}{2.p_0})^{\frac{a}{\delta}}$ d'où $(\frac{r}{s})^{c'} = (\frac{q}{2.p_0})^{a'}$. Comme $a' \wedge c' = 1$, il s'ensuit $\frac{a}{b} = (\frac{u}{2.v})^{a'.d'}$ et $\frac{c}{d} = (\frac{2.v}{u})^{b'.c'}$, pour deux entiers u et v qu'on peut choisir premiers entre eux.

Preuve de la première partie du théorème 4.5 :

D'après ce qui précède, (E_A) peut se réécrire $(\frac{u}{2v})^{a'.d'.(\frac{2v}{u})^{b'.c'}} = (\frac{u}{2v})^{b'.c'.(\frac{u}{2v})^{a'.d'}}$ et donc (par 1.8) $a'.d'.(\frac{2v}{u})^{b'.c'} = b'.c'.(\frac{u}{2v})^{a'.d'}$, ou encore $\frac{a'.d'}{b'.c'} = (\frac{u}{2v})^{a'.d'+b'.c'}$.

Posons $n := a'.d' + b'.c'$, on a bien $n \in \mathbb{N}^*$, et pour u et v effectivement choisis premiers entre eux, on remarque $\begin{cases} u^n = a'.d' \\ (2v)^n = b'.c' \end{cases}$

En particulier, u et v vérifient $u^n + (2v)^n = n$, ce qui, d'áprès le lemme 4.1, est impossible. L'ensemble des solutions est donc bien vide.

Preuve de la seconde partie du théorème 4.5 :

On est dans le cadre où $(\frac{-a}{b}, \frac{c}{d})$ respecte (E_B)
On a $(-\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{c}{d})^{\frac{a}{b}} \in \mathbb{R}_+$
Or d'après 1.6 on a aussi $(-\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (-1)^{\frac{c}{d}}.(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}}$, on en déduit $(-1)^{\frac{c}{d}} \in \mathbb{R}_+$ c'est à dire, pour cette définition de l'exponentiation, $e^{\frac{c}{d}.i.\pi} \in \mathbb{R}_+$ et donc (selon 1.10) $\frac{c}{d}.i.\pi \equiv 2.i.\pi\ (mod\ i.\pi)$ ou encore $\exists\ k \in \mathbb{Z},\ \frac{c}{d} = 2k$.

(E_B) peut se réécrire $(\frac{a}{b})^{2k} = (\frac{1}{2k})^{\frac{a}{b}}$ et donc en particulier $(\frac{1}{2k})^{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$, puis comme $a \wedge b = 1$, $\exists\ l \in \mathbb{N}^*,\ 2k = l^b$, et par partité $\exists t \in \mathbb{N}^*,\ l = 2t$ c'est à dire $2k = (2t)^b$

(E_B)devient $(\frac{a}{b})^{(2t)^b} = (\frac{1}{2t})^a$, et par unicité de l'écriture en fraction irréductible, on a $\begin{cases} a^{(2.t)^b} = 1 \quad (1) \\ b^{(2.t)^b} = 2t \quad (2) \end{cases}$

Selon (2), on a nécessairement b pair, donc en particulier $b \geq 2$; mais alors $b^{(2.t)^b} \geq 2^{4.t^2} \geq 2^{4.t} = 4^{2.t} > 2t$ ce qui rend (2) impossible ! L'ensemble des solutions est donc bien vide.

4.3 Résolution dans ${\mathbb{Q}_-}^2$

Dans cette sous-section on continue à noter (E_A) l'équation (E) pour la première définition de l'exponentiation et (E_B) l'équation (E) pour la seconde définition. L'ensemble des solutions rationnelles négatives diffère pour la définition adoptée !

Théorème 4.7

- $\{(x,y) \in {\mathbb{Q}_-}^2$ *respectant* $E_A\} = \{((-\frac{2k}{2k-1})^{2k}, (-\frac{2k}{2k-1})^{2k-1}),\ k \in \mathbb{N}^*\}$
- $\{(x,y) \in {\mathbb{Q}_-}^2$ *respectant* $E_B\} = \{(-4,-2\}$

Utilisons l'écriture des rationnels en fraction irréductible. On cherche des entiers strictements positifs a,b,c,d tels que $a \wedge b = c \wedge d = 1$, $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ et $(-\frac{a}{b})^{-\frac{c}{d}} = (-\frac{c}{d})^{-\frac{a}{b}}$ pour l'une ou l'autre des définitions.

Dans la suite de la sous-section, a,b,c,d désignent de tels entiers, et on note (r_b, b') et (r_d, d') les décompositions pair/impair respectives de b et de d (c'est à dire définis par $b = 2^{r_b}.(2b'+1)$ et $d = 2^{r_d}.(2d'+1)$).

Lemme 4.8 *(équation (E_A) : formes de a et c)*
On est dans le cadre où $(-\frac{a}{b}, -\frac{c}{d})$ respecte (E_A)
Alors a et c sont tous deux pairs.

<u>Preuve</u> :

Réécrivons (E_A) : on a $(-\frac{a}{b})^{-\frac{c}{d}} = (-\frac{c}{d})^{-\frac{a}{b}}$ soit par définition $(-\frac{b}{a})^{\frac{c}{d}} = (-\frac{d}{c})^{-\frac{b}{a}}$. Selon 1.6 on a donc $(-1)^{\frac{c}{d}}.(\frac{b}{a})^{\frac{c}{d}} = (-1)^{\frac{a}{b}}.(\frac{d}{c})^{-\frac{b}{a}}$

Supposons a impair, alors selon **??** on a $(-1)^{\frac{a}{b}} = i_{r_b}$, donc selon **??** $(-1)^{\frac{c}{d}} = i_{r_b}$ également ; c'est à dire c impair et $r_b = r_d =: r$. (E_A) se réécrit $i_r(\frac{b}{a})^{\frac{c}{d}} = i_r(\frac{d}{c})^{\frac{a}{b}}$ donc $(\frac{b}{a})^{\frac{c}{d}} = (\frac{d}{c})^{\frac{a}{b}}$ dòu (par 1.4) $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{c}{d})^{\frac{a}{b}}$. Du théorème 4.2 s'ensuit $\exists\ n \in \mathbb{N}^*,\ a = (n+1)^{n+1},\ b = n^{n+1},\ d = n^n$ en particulier $2^r(2b'+1) = n^{n+1}$ et $2^r(2d'+1) = n^n$ et donc $n = \frac{2^r(2b'+1)}{2^r(2d'+1)} = \frac{2b'+1}{2d'+1}$. n étant quotient de deux nombres impairs, il est impair et donc $n+1$ est pair, et $a = (n+1)^{n+1}$ donc a est pair, mais par hypothèse a est impair ! On a donc démontré par l'absurde que a doit être pair. Il s'ensuit que $(-1)^{\frac{c}{d}}.(\frac{b}{a})^{\frac{c}{d}}$ est réel positif, et donc (selon 1.11), que c est également pair.

Preuve de la première partie du théorème 4.7 :

D'après ce qui précède, (E_A) peut se réécrire $(\frac{b}{a})^{\frac{c}{d}} = (\frac{d}{c})^{\frac{a}{b}}$, d'où (selon 1.4) $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = (\frac{c}{d})^{\frac{a}{b}}$ et donc le théorème 4.2 permet de conclure :

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} \\ \frac{c}{d} = (\frac{n+1}{n})^{n} \end{cases}.$$

Comme de plus a et c sont pairs, n doit être de la forme $2k-1$ et donc on doit avoir $x = -\frac{a}{b} = (-\frac{2k}{2k-1})^{2k}$ et $y = -\frac{c}{d} = (-\frac{2k}{2k-1})^{2k-1}$.

Réciproquement tout couple $((-\frac{2k}{2k-1})^{2k}, (-\frac{2k}{2k-1})^{2k-1})$ vérifie (E_A) donc cette condition nécessaire est bien suffisante. Ce qui achève la preuve de ce théorème.

Preuve de la seconde partie du théorème 4.7 :

On est dans le cadre où $(\frac{-a}{b}, \frac{c}{d})$ respecte (E_B)

Par définition, (E_B) peut se réécrire $e^{-\frac{c}{d}\cdot\ln(\frac{a}{b})}.e^{-\frac{c}{d}.i.\pi} = e^{-\frac{a}{b}\cdot\ln(\frac{c}{d})}.e^{-\frac{a}{b}.i.\pi}$, et par égalité des arguments, il s'ensuit que $-\frac{c}{d}.i.\pi \equiv -\frac{a}{b}.i.\pi \quad (mod\ i.\pi)$, c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, (E_B) se réécrit $(\frac{-a}{b})^{\frac{-a+2kb}{b}} = (\frac{-a+2kb}{b})^{\frac{-a}{b}}$
D'où $(\frac{-a}{b})^{-a+2kb} = (\frac{-a+2kb}{b})^{-a}$
Et donc selon 1.4 $(\frac{-b}{a})^{a-2kb} = (\frac{-b}{a-2kb})^{a}$
C'est à dire selon 1.5 et 1.4 $\frac{(-b)^{a-2kb}}{a^{a-2kb}} = \frac{(-b)^a}{(a-2kb)^a}$.

$a = \frac{bc}{d} + 2kb > 2kb$ donc $a - 2kb \in \mathbb{N}^*$ et par suite $(-b)^{a-2kb} \in \mathbb{N}$ et $a^{a-2kb} \in \mathbb{N}$.

De plus, comme $a \wedge b = 1$ et que b divise $2kb$, on a aussi $b \wedge a - 2kb$. Ainsi, les deux fractions précédentes sont déjà sous forme irréductible, et on déduit

$$\begin{cases} (-b)^{a-2kb} = (-b)^a \\ a^{a-2kb} = (a-2kb)^a \end{cases}$$

Donc en particulier $b^{a-2kb} = b^a$ d'où $b^{2kb} = 1$ et comme par hypothèse on a : $k > 0$ et $b > 0$, on a ainsi $2kb > 2$

$b^{2kb} = 1$ implique donc $b = 1$.

Par suite $x = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Z}^-$ et $y = \frac{-a+2kb}{b} \in \mathbb{Z}^-$, il ne reste plus qu'à utiliser le lemme 3.3 pour conclure $x = -4$; $y = -2$, ce qui achève la preuve de ce théorème.

5 Résolution dans ${\mathbb{R}_+^*}^2$

C'est dans cet ensemble que l'équation est la plus facile à résoudre. Le théorème 5.2 établit justement une paramétrisation des solutions (qui généralise très agréablement celles obtenues en 2.1 et en 4.2). Mais avant cela, étudions un peu la gueule qu'auront les solutions de $(E_1) : x^y = y^x$.

Lemme 5.1
La relation "vérifier (E_1)" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve :

- Réflexivité : il est bien évident que (x, x) est une solution de (E_1) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Symétrie : (E_1) étant symétrique en x et y, si (x, y) vérifie (E_1), on a évidemment (y, x) vérifie (E_1).
- Transitivité : Procédons par équivalences :
  (x, y) vérifie $(E1) \Leftrightarrow x^y = y^x$
  $\Leftrightarrow e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)}$ (par définition)
  $\Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y)$ (ce point est plus délicat et justifie ma restriction à ${\mathbb{R}_+^*}^2$: pour $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ on a $y\ln(x) \in \mathbb{R}$ et $x\ln(y) \in \mathbb{R}$, or sur $\mathbb{R}$ l'exponentielle est injective)
  $\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}$ (puisque x et y sont non nuls)
  De même, (y, z) vérifie $(E1) \Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{y} = \frac{\ln(z)}{z}$

  Ainsi (x, y) et (y, z) vérifient $(E1) \Rightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(z)}{z} \Leftrightarrow (x, z)$ vérifie (E_1).

Théorème 5.2
Les solutions réelles positives de (E) forment $\{((\frac{t+1}{t})^t, (\frac{t+1}{t})^{t+1}); t \in \mathbb{R}_+^*\}$:
$S_{\mathbb{R}_+} := \{(x, y) \in \mathbb{Q}_+, (x, y) \text{ respecte } (E)\} = \{((\frac{t+1}{t})^t, (\frac{t+1}{t})^{t+1}); t \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Preuve :

Soit $(x, y) \in S_{\mathbb{R}_+}$ Posons $s := \frac{y}{x}$; comme $x < y$, on a $s > 1$.
On procède alors comme en 2.3 : (E) peut se réécrire $x^{sx} = (sx)^x$
D'où, selon 1.3, $(x^s)^x = (sx)^x$ et par 1.7 $x^s = sx$.
Ce qui donne par 1.2, $x^{s-1} = s$ et par 1.3, $x = s^{\frac{1}{s-1}}$.
Posons $t := \frac{1}{s-1}$, $s > 1 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc $(x, y) \in S_{\mathbb{R}_+} \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ x = (\frac{t+1}{t})^t,\ y = (\frac{t+1}{t})^{t+1}$
La réciproque ne soulevant aucune difficulté, on a bien le résultat demandé.

On peut maintenant donner une preuve plus élégante (mais qui pêche à mes yeux par une cruelle absence de magie) du théorème 4.2.

Seconde preuve du théorème 4.2 :

Considérons $(x, y) \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que (x, y) respecte (E).
En particulier on a $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$ et donc selon le théorème 5.2
$\exists\ t \in \mathbb{R}_+^*,\ x = (\frac{t+1}{t})^t$ et $y = (\frac{t+1}{t})^{t+1}$.

Il reste à montrer que nécessairement $t \in \mathbb{N}^*$.

Mais comme $(x, y) \in \mathbb{Q}$, on a en particulier $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire $1 + \frac{1}{t} \in \mathbb{Q}$; d'où $t \in \mathbb{Q}$ (et donc $t \in \mathbb{Q}_+^*$ puisque t est strictement positif).

Utilisons alors l'écriture de t en fraction irréductible. $\exists\ (p, q) \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1$ et $t = \frac{p}{q}$. Par suite on a $x = (\frac{p+q}{p})^{\frac{p}{q}}$; or $p \wedge q = 1$ implique $p + q \wedge p = 1$. La condition $x \in \mathbb{Q}_+^*$ implique donc $\exists\ (m, n) \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} p + q = m^q \\ p = n^q \end{cases}$

Ainsi donc, on a $m^q - n^q = q$. Etonnamment, le lemme 4.1 réapparaît ! ! !
En l'utilisant, on conclut $q = 1$, d'où $t = p \in \mathbb{N}^*$ ce qui achève cette preuve.