Université de Nice-Sophia-Antipolis
1er décembre 2009
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

TD d'analyse n°32 : Exemples pratiques d'applications de l'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 1 (Ellipses (exercice 92 dans Rouvière [Rou03]))**.** On s'intéresse à une conique de foyers $F_\pm = (\pm 1, 0)$ dans le plan. Une telle conique est de la forme

$$(E_t) : \quad \frac{x^2}{1+t} + \frac{y^2}{t} = 1$$

où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Pour quelles valeurs de t obtient-on une ellipse ? une hyperbole ? Montrer (ou admettre) que ces coniques vérifient soit $MF_+ + MF_- = 2a$ soit $|MF_+ - MF_-| = 2a$.
2. Calculer l'équation de la tangente à (E_t) en un point (x_0, y_0).
3. Utiliser l'équation $|MF_+ \pm MF_-| = 2a$ pour décrire géométriquement la tangente à E_t en un point $M_0 = (x_0, y_0)$.
4. Utiliser les calculs précédents pour donner une équation de la bissectrice de l'angle $\widehat{F_- M F_+}$ lorsque $M = (3/\sqrt{2}, 2)$ (on prendra $t = 8$).

Exercice 2 (Variation des racines d'un polynôme (exercice 77 dans Rouvière [Rou03]))**.** Dans cet exercice on s'intéresse aux racines du polynôme

$$P_{u,v}(X) = X^7 + uX - v$$

1. Montrer que si (u, v) sont des réels strictement positifs, $P_{u,v}$ a une seule racine réelle notée $f(u, v)$ (elle-même strictement positive).
2. Montrer que $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$. Donner une expression des dérivées premières de f. Donner une expression des dérivées secondes de f.
3. Donner une expression approchée de $f(u, v)$ pour $u = 0.99$, $v = 2.03$. Peut-on estimer l'erreur ainsi commise ?

Exercice 3 (Décomposition polaire (exercice 23 dans [GT98]))**.** Le but de cet exercice est d'étudier la *décomposition polaire* des éléments de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $A \mapsto A^2$ est un difféomorphisme (de classe $\mathcal{C}^\infty$) de $\mathcal{S}_n^{>0}$ dans lui-même (l'espace des matrices symétriques définies positives).
2. Montrer que l'application produit $O_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{>0} \to GL_n(\mathbb{R})$ est bijective, et que c'est aussi un difféomorphisme.
3. Cette fois, montrer que $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n \to GL_n(\mathbb{R})$ donnée par $(A, B) \mapsto A \exp B$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

[Gou94] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 1994.
[Rou03] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 2003.
[GT98] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : calcul différentiel*, Ellipses, 1998.