Université de Nice-Sophia-Antipolis
5 octobre 2009
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

TD d'analyse n°13 : intégrales à paramètre

Exercice 1 (voir [Lep00, Ch. 5, ex. 524])**.** On s'intéresse à l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

1. Quel sens donner à la formule précédente ?
2. Montrer que $I = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$. Quel sens donner à cette expression ?
3. On considère la fonction
$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,dt.$$
Donner un sens à cette expression pour $x \geq 0$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $f''(x) + f(x) = 1/x$.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en zéro.

Exercice 2 (Intégrale de Gauss, cf. [Gou94, III.4, ex. 2] ou encore [Lep00, ex. 526])**.** On veut calculer $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)dx$. Pour cela nous allons utiliser la fonction
$$E(x) = \int_0^1 \exp(-x^2(t^2+1))\frac{dt}{t^2+1}.$$

1. Donner un intervalle de définition de E. Que vaut $E(0)$? et $E(\infty)$?
2. Exprimer la dérivée de E en fonction de fonctions élémentaires et de la fonction $\varepsilon(x) = \int_0^x \exp(-t^2)dt$.
3. En déduire la valeur de $I = \varepsilon(\infty) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3 (Équation de la chaleur)**.** Soit f une fonction bornée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose
$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) \exp\left(\frac{-u^2}{4t}\right) du$$

1. Soit $K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$. Montrer que $\partial K/\partial t = \partial^2 K/\partial u^2$. On dit que K vérifie l'*équation de la chaleur*. Pour la suite de l'exercice, on se souviendra que $\int_{\mathbb{R}} K(x,t)dx = 1$.
2. Montrer que la fonction F partage la même propriété. Est-ce encore vrai si ne suppose plus f dérivable (ni même continue) ?
3. Question subsidiaire : montrer que $F(x,t) \to f(x)$ lorsque $t \to 0_+$.
4. On suppose cette fois que f est périodique, de période L. Montrer que la fonction d'*énergie* $E(t) = \int_0^L F(x,t)dx$ est constante.
5. On suppose que f s'écrit sous la forme
$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \sin(\alpha_i x + \phi_i),$$
où les α_i sont des réels non nuls. Montrer que $F(x,t)$ converge vers a_0 lorsque $t \to \infty$. Question subsidiaire : montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 4 (Calcul de $\int_0^\infty \sin t \, \frac{dt}{t}$ [Lep00, Ch. 5, ex. 528])**.** On considère cette fois la fonction

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt$$

1. Quel sens donner à la formule précédente ?
2. Montrer que la formule
$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t(1+t^2)}\, dt$$
définit une primitive de g. Que vaut $G(0)$?
3. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable en tout $x > 0$, et donner une expression de sa dérivée.
4. Montrer que
$$xg(x) = \int_0^\infty \frac{2t\sin tx}{(1+t^2)^2} dt$$
5. Établir l'identité
$$xg'(x) = g(x) - \int_0^\infty \frac{2\cos tx}{(1+t^2)^2} dt$$
6. En déduire l'équation différentielle $g'' = g$, et la valeur de $g(x)$ pour tout x.
7. Montrer que $G(x) - g'(x)$ est égale à $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\, dt$. Montrer que cette expression est constante, égale à l'intégrale I de l'exercice précédent, et en déduire sa valeur.

Exercice 5 (Fonction Γ [Gou94, IV.7.1.1])**.** On définit la fonction «Gamma» par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1} dt.$$

1. Montrer que Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. En déduire la formule célèbre : $n! = \Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers zéro.
3. Soient $x < y$ des réels positifs. On pose
$$\phi_1(t) = \frac{1}{\Gamma(x)} \exp(-t)t^{x-1} \text{ et } \phi_2(t) = \frac{1}{\Gamma(y)} \exp(-t)t^{y-1}$$
Étudier ϕ_2/ϕ_1 : en déduire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\phi_2 < \phi_1$ sur $[0, M)$ et $\phi_2 > \phi_1$ sur $(M, +\infty)$.
4. Soit ψ une fonction strictement croissante entre 0 et $+\infty$. Montrer que
$$\int_0^\infty \psi(t)\phi_1(t)dt < \int_0^\infty \psi(t)\phi_2(t)dt.$$
5. En déduire que Γ'/Γ est une fonction croissante : on dit que Γ est *log-convexe* (pourquoi ?). Utiliser cette propriété pour retrouver l'inégalité
$$\binom{n}{p} < \binom{n}{n/2}$$
pour n entier et $p < n/2$.
6. Retrouver la *log-convexité* de Γ en étudiant $(\log \Gamma)''$. (*Indication :* on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

[Gou94] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 1994.

[Lep00] M. Lepez, *Les Grands classiques de Mathématiques*, Bréal, 2000.