Université de Nice-Sophia-Antipolis
12 février 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

TD d'algèbre n°53 : nombres complexes en géométrie

Le mot *affixe* est masculin (tout comme *préfixe* et *suffixe*).

Exercice 1 (La relation des sinus)**.** Soient A, B, C des points d'un cercle de rayon R. On note a, b, c leurs affixes respectifs, et o l'affixe du centre du cercle.

1. Si z est un nombre complexe de module 1, montrer que $(z-1)^2$ et z ont même argument[1].
2. Soient $\exp(i\alpha)$ et $\exp(i\beta)$ deux nombres complexes de module 1. Exprimer le module de leur différence à partir de α et β.
3. Montrer que l'argument de $\frac{c-o}{b-o}$ est double de l'argument α de $\frac{c-a}{b-a}$ (appelé *angle inscrit*). Donner une interprétation géométrique.
4. Exprimer $|b-c|$ en fonction de R et α.

Déduire de ces questions la propriété suivante, appelée *relation des sinus*:

Soit ABC un triangle, α, β, γ ses angles et R le rayon de son cercle circonscrit. Alors

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} = 2R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{2\mathcal{S}}$$

où $\mathcal{S}$ est l'aire du triangle.

Exercice 2 (Cercles)**.** On considère un cercle du plan euclidien, d'équation

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by + c.$$

1. Soit $z = x + iy$. Déterminer un nombre complexe ω tel que l'équation devienne

   $$z\bar{z} = \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + c.$$

   Que représente ω? Noter qu'on peut aussi écrire $|z-\omega|^2 = \rho^2$.
2. Que dire de la partie réelle de $\frac{1}{z-\omega-i\rho}$?
3. Soit h une homographie de la droite complexe. Montrer que l'équation $|h(z)-\omega|^2 = \rho^2$ est aussi de la forme

   $$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

   Quels sont les objets géométriques décrits par cette équation ? Quelle est l'image d'un cercle de la droite complexe par une homographie ?
4. Montrer que 4 points sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est un nombre réel.

Exercice 3 (Une inégalité de distances)**.** Soit ABC un triangle équilatéral, et M un point quelconque du plan.

1. Montrer qu'un triangle ABC d'affixes a, b, c est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (où $j = \exp(2i\pi/3)$).
2. Montrer que $MB + MC \geq MA$. À quelle condition y a-t-il égalité ? [2]
3. En s'inspirant des calculs faits, donner une démonstration élémentaire.

[1] Calculer le quotient.
[2] On pourra remarquer que $m + jm + j^2m = 0$ pour tout nombre complexe m.

Exercice 4 (Inversion et birapports). On note ι l'inversion de pôle P et de puissance ρ^2.

1. Décrire en fonction de l'affixe d'un point M l'affixe de $\iota(M)$.

2. Exprimer la distance $\iota(A)\iota(B)$ en fonction des points P, A, B. En déduire que les triangles PAB et $P\iota(B)\iota(A)$ sont semblables. Trouver une égalité d'angles bien choisie pour en déduire que les points A, B, $\iota(A)$, $\iota(B)$ sont cocycliques.

3. Montrer que le birapport $[a, b, 1/\bar{a}, 1/\bar{b}]$ est réel pour tous nombres complexes a et b.

4. Quelle est l'image d'un cercle par une inversion ? l'image d'une droite ?

Exercice 5 (Birapport sur un cercle). Soit ι une inversion de pôle P et de rapport ρ^2.

1. Soient A, B, C, D des points cocycliques avec P. Montrer que leurs images A', B', C', D' sont alignées.

2. Rappeler comment s'exprime la distance $A'B'$. En déduire l'égalité suivante :

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D'] = \pm\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

où dans la dernière fraction, AC désigne la distance euclidienne (!).

3. Montrer que

$$[A', B', C', D'] = \frac{\sin \widehat{A'PC'} \cdot \sin \widehat{B'PD'}}{\sin \widehat{A'PD'} \cdot \sin \widehat{B'PC'}}[3].$$

Exercice 6 (L'égalité de Ptolémée). Étant donnés quatre points du plan euclidien, on a l'inégalité

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Nous avions démontré cette inégalité en appliquant l'inégalité triangulaire dans l'égalité

$$[A, D, B, C] + [A, B, D, C] = 1.$$

Soit ι une inversion de pôle A et de puissance quelconque. Exprimer les distances entre les images B', C', D' par ι. Conclure.

Quel est le lien avec la démonstration de la dernière fois ?

Exercice 7 (Cercle circonscrit et coordonnées barycentriques). Soit ABC un triangle, et M un point du plan de coordonnées barycentriques $[x : y : z]$ par rapport à A, B, C. On se demande à quelle condition M appartient au cercle circonscrit de ABC: on va montrer que

$$p^2yz + q^2zx + r^2xy = 0$$

où p, q, r sont les longueurs BC, CA, AB.

1. Montrer qu'on peut se contenter d'étudier le cas où les affixes a, b, c sont de module 1.

2. Montrer qu'alors $p^2 = 2 - b\bar{c} - \bar{b}c$.

3. Exprimer le module de l'affixe de M. Conclure.

Remarque : le point M' de coordonnées barycentriques $[p^2/x : q^2/y, r^2/z]$ est appelé isogonal de M. Il vérifie la propriété que AM et AM' sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle A. Lorsque M appartient au cercle circonscrit, le point M' est envoyé à l'infini. La transformation $M \mapsto M'$ est une transformation du plan appelée *transformation de Cremona*.

[3] On pourra utiliser la relation des sinus