Université de Nice-Sophia-Antipolis
8 février 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

TD d'algèbre n°50-51 : birapport, propriétés projectives

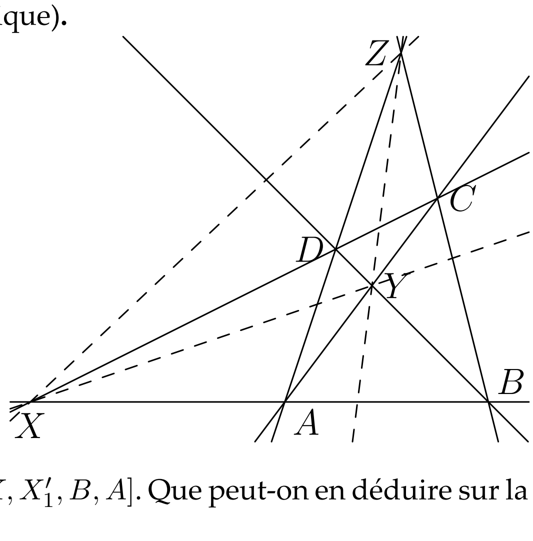
Références : Ladegaillerie [Lad03] (chapitres III, VI, et VII.2), Samuel [Sam86] chapitre II (sections A,B,C,E,G) et chapitre I (sec. A, B, D).

Exercice 0 (Préliminaires)**.** Soient a, b, c des éléments distincts de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{k} \cup \{\infty\}$.

1. Montrer qu'il existe une homographie f telle que $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ et $f(c) = \infty$. Est-elle unique ?
2. Montrer que si $[c, a; b, d] = t$, alors $f(d) = t$. En déduire que le birapport est conservé par une homographie.
3. Soient A, B, C, D des points d'une droite affine du plan. On définit le birapport
$$[A, B; C, D] = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$$
Montrer que ce birapport ne dépend pas du choix d'une abscisse sur la droite. Si p est une perspective centrale, montrer que p préserve le birapport des 4 points.
4. Si quatre droites D_i sont concourantes (ou parallèles), on définit leur birapport comme le birapport de leurs intersections avec une droite fixée Δ. Montrer que ce birapport ne dépend pas de Δ.
5. Si les D_i sont 4 droites concourantes du plan euclidien standard, montrer que
$$[D_1, D_2, D_3, D_4] = \frac{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{24}}{\sin \alpha_{14} \sin \alpha_{23}}$$
où α_{ij} est l'angle orienté de D_i à D_j.

Exercice 1 (Quadrangle complet et division harmonique)**.**

Étant donnés trois points alignés X, A, B, on effectue la construction suivante (à la règle seule) : on choisit une droite Δ passant par X, et deux points distincts C et D sur cette droite.
On note Y, Z respectivement les intersections de AC et BD, AD et BC. On note X'_1 et X'_2 les intersections de YZ avec AB et CD.



1. Montrer que $[X, X'_1, A, B] = [X, X'_2, D, C] = [X, X'_1, B, A]$. Que peut-on en déduire sur la valeur de ce nombre ?
2. En déduire que le point X'_1 ainsi construit ne dépend pas des choix de Δ, C et D. Ce point est appelé *conjugué harmonique de* X par rapport aux points A et B.
3. On dispose maintenant d'une règle (non graduée), et d'une droite parallèle à AB. Peut-on construire avec cette règle seulement le milieu du segment $[AB]$?

4. Montrer l'équivalence entre le théorème de Ceva :
$$\frac{\overline{X_1'A}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{DZ}}{\overline{X_1'B}\cdot\overline{CZ}\cdot\overline{DA}}=-1$$
et celui de Menelaus
$$\frac{\overline{XA}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{DZ}}{\overline{XB}\cdot\overline{CZ}\cdot\overline{DA}}=1$$

Exercice 2 (Théorème de Pappus et axe d'une homographie)**.** Le théorème de Pappus est l'énoncé suivant :

> Soient Δ et Δ' deux droites distinctes du plan projectif, A, B, C et A', B', C' deux triplets de points distincts de Δ et Δ', différents du point d'intersection des deux droites.
>
> Alors les intersections $(AB')\cap(BA')$, $(BC')\cap(CB')$, $(CA')\cap(AC')$ sont alignées.

1. Expliquer pourquoi on peut se ramener à travailler dans le plan affine, en supposant (AB') parallèle à (BA'), et (BC') parallèle à (CB').
2. En utilisant le théorème de Thalès, démontrer le théorème de Pappus.

Soit h une homographie de la droite Δ dans la droite Δ'. On se donne trois points A, B, C et leurs images A', B', C'. On note D_h la droite déterminée par le théorème de Pappus avec ces triplets de points.

Soit D un point quelconque de Δ. La droite (DC') coupe D_h en un point X, et on note D' l'intersection de (CX) avec Δ'.

1. À l'aide de projections centrales appropriées, montrer que $[A',B',C',D']=[A,B,C,D]$ (on pourra utiliser une projection sur la droite D_h comme intermédiaire).
2. En déduire que $D'=h(D)$.

Remarque : le théorème de Pascal permet de généraliser ces constructions au cas d'une homographie d'une conique dans elle-même.

Exercice 3 (Polarité et conjugués harmoniques)**.** Soit q une forme quadratique en deux variables, vérifiant $q(x)=0$, $q(y)=0$, $b(z,t)=0$ où b est la forme bilinéaire associée, et x, y, z, t sont les coordonnées homogènes de 4 points de la droite projective.

1. Montrer que $[x,y,z,t]=-1$.
2. Soit Δ_1, Δ_2 deux droites du plan projectif. On note q la forme quadratique qui est l'équation de $\Delta_1\cup\Delta_2$. On dit que M et N sont en polarité si la droite (MN) coupe Δ_1 et Δ_2 en des points P_1, P_2 tels que $[M,N,P_1,P_2]=-1$. Montrer que les polaires de M forment une droite concourante avec Δ_1 et Δ_2. Exprimer l'équation de cette droite en fonction de q.
3. Soit C le cercle de centre O, de rayon R dans le plan affine euclidien. On dit encore que M et N sont en polarité par rapport à C si la droite (MN) coupe le cercle en deux points conjugués harmoniques par rapport à M et N. Montrer que M et N sont polaires si et seulement si $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=R^2$.

Exercice 4 (Le théorème de Ptolémée)**.** Soit A, B, C, D quatre points de la droite projective complexe.

1. Montrer que $[A,B;D,C]+[A,D;B,C]=1$.
2. En déduire l'*inégalité de Ptolémée*
$$AD\cdot BC+AB\cdot CD\geq AC\cdot BD.$$
3. Étudier le cas d'égalité (on montrera que l'égalité a lieu si et seulement si A, B, C, D sont alignés, ou cocycliques, dans cet ordre).

[Lad03] Yves Ladegaillerie, *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*, Ellipses, 2003.

[Sam86] Pierre Samuel, *Géométrie projective*, Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1986. MR850482 (87i :51002)