Université de Nice-Sophia-Antipolis
1er février 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

TD d'algèbre n°48 : la droite projective

Exercice 1 (Projections centrales)**.**
Dans le plan affine standard $\mathbf{R}^2$, on considère le point O de coordonnées $(-2,-4)$, D_1 la droite d'équation

$$2x - y + 1 = 0,$$

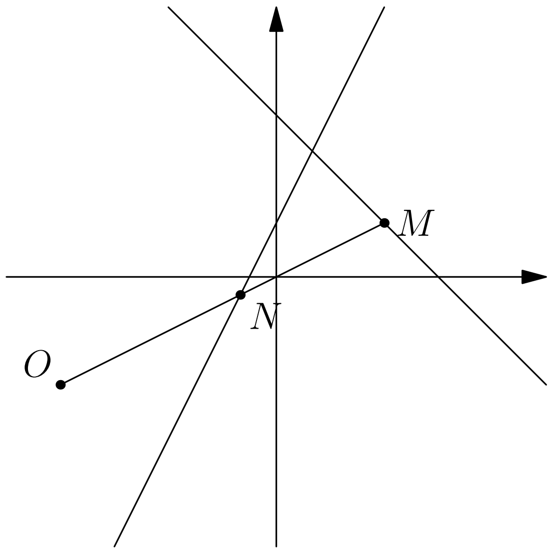
D_2 la droite d'équation

$$x + y = 3.$$

On choisit un paramétrage

$$M(t) = (t, 2t+1), N(t) = (1+t, 2-t)$$

de D_1 et D_2 respectivement. La projection centrale de centre O, ou perspective, associe au point $M(t)$ un point $N(s)$ tel que O, $M(t)$ et $N(s)$ soient alignés. On note $N = p(M)$.



1. La fonction $p : D_1 \to D_2$ est-elle définie partout ? Quel est son domaine de définition ?

2. Si $N(s) = p(M(t))$, on écrit $s = f(t)$: donner une formule pour $f(t)$.

3. On note $m_1(t)$ et $m_2(t)$ les pentes des droites $OM(t)$, $ON(t)$. Exprimer f en fonction de m_1 et m_2.

4. Expliquer pourquoi p est bien définie sur les droites *projectives* $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$. Que peut-on dire de l'application ainsi construite ?

Exercice 2 (Coordonnées barycentriques)**.** Dans le plan affine, d'origine $O = (0,0)$, on choisit une droite D ne passant pas par O et A, B deux points distincts de D.

Étant donné un point $t = [u : v]$ de la droite projective $\mathbb{P}^1$, on associe un point $M(t)$ de D, barycentre de A et B affectés des poids u et v.

1. Montrer que $M(t)$ ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes de t. Le point $M(t)$ est-il toujours défini ?

2. Proposer une définition de $M(t)$ lorsque t n'est pas correctement défini : en déduire une bijection entre $\mathbb{P}^1$ et la complétion projective $\bar{D}$ de D.

3. On identifie les points de $\bar{D}$ aux droites vectorielles du plan affine. Déterminer un repère qui identifie $M(t)$ à la droite de pente $t = v/u \in \mathbb{k} \cup \{\infty\}$.

Exercice 3 (Une conique et son paramétrage rationnel)**.** On considère la conique C d'équation

$$x^2 + 3xy + 3y^2 = 2x - 4y$$

et la droite D, d'équation $x - 2y = 1$, paramétrée par $M(t) = (2t + 1, t)$. Le point O est $(0, 0)$.

1. Montrer que la droite $OM(t)$ coupe la conique en O et en un autre point $N(t)$. Quelles sont les coordonnées de $N(t)$?
2. La fonction $p : D \to C$ ainsi définie l'est-elle partout ? Proposer un prolongement de p à la droite projective $\bar{D}$.
3. Recommencer en remplaçant C par le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $O = (-1, 0)$ et D par la droite paramétrée par $M(t) = (1, t)$.
4. Montrer que les coordonnées de $N(t)$ sont rationnelles si et seulement si $t \in \mathbb{Q}$. En déduire la forme des *triplets pythagoriciens*, c'est-à-dire les entiers a, b, c premiers entre eux tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

[Sam86] Pierre Samuel, *Géométrie projective*, Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1986. MR850482 (87i :51002)