Université de Nice-Sophia-Antipolis
31 mai 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

Algèbre : développement n°34
Demi-plan de Poincaré et groupe modulaire

Références : Alessandri, *Thèmes de géométrie* (chapitre III, thème I). J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique* (chapitre VII, §1 *Le groupe modulaire*). Leçons associées : groupes opérant sur un ensemble, exemples de parties génératrices d'un groupe, homographies de la droite projective complexe, nombres complexes en géométrie (hyperbolique), groupes en géométrie.

Exercice 1 (Homographies et droite projective)**.** Rappeler comment on définit une action du groupe $PSL_2(\mathbf{C})$ sur la droite projective complexe $\mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Quels sont les éléments de $PSL_2(\mathbf{C})$ qui envoient l'axe réel sur lui-même ? Montrer que ceux-ci sont de deux types, selon leur action sur les composantes connexes du complémentaire (demi-plan supérieur et demi-plan inférieur).

On s'intéresse à l'action du groupe $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$, le *groupe modulaire*, sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{H}$ (ou *demi-plan de Poincaré*).

Exercice 2 (Le domaine fondamental)**.** On s'intéresse au sous-ensemble

$$D = \{z \in \mathfrak{H} \text{ tels que } |z| > 1 \text{ et } \Re(z) < 1/2\}$$

et on veut montrer que c'est un domaine fondamental pour Γ, c'est-à-dire :

- la réunion des $g(D)$ pour $g \in \Gamma$ recouvre $\mathfrak{H}$;
- les $g(\mathring{D})$ sont disjoints ;
- si x est un élément du bord de D, il existe un nombre fini de $g \in \Gamma$ tels que $g(x) \in D$.

On obtient ainsi un *pavage hyperbolique*.

1. Soit $z, z' \in \mathring{D}$. On suppose que $\Im(z') \geq \Im(z)$ et que $z' = g(z)$. Donner une expression de $\Im(z')$ en fonction de g et z.
2. Montrer que si on suppose que $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $|cz + d| \leq 1$. Montrer qu'alors $|c| \leq 1$: quelles sont les valeurs possibles de c et d? Montrer que g est une translation et aboutir à une contradiction. On a ainsi montré la deuxième propriété.
3. Soit z un élément quelconque de $\mathfrak{H}$. On considère les nombres $\Im(gz)$ pour $g \in \Gamma$. Montrer que $\Im(gz)$ atteint un maximum, pour certaines valeurs de c et d.
4. Montrer qu'il existe un élément g_0 de Γ tel que $g_0(z)$ ait une partie imaginaire maximale et une partie réelle $\leq 1/2$. Vérifier au passage que le nombre de tels g_0 est fini.
5. Montrer que si $|g_0(z)| < 1$, on aboutit à une contradiction. En déduire la première propriété.
6. Reprendre les deux premières questions en supposant seulement $z, z' \in D$. Montrer que $\mathring{D}$ est disjoint de $g(D)$ pour g différent de l'identité.

Exercice 3 (Générateurs du groupe modulaire)**.** Nous allons montrer que Γ est engendré par les deux éléments

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit g un élément de Γ. Déterminer deux éléments de $\mathfrak{H}$ tels que $z' = g(z) \in \mathring{D}$, avec la propriété suivante : si $z' = h(z)$ avec $h \in \Gamma$, alors $h = g$.

2. Soit Γ' le sous-groupe engendré par S et T. On note $z'' = g'(z)$ un élément de partie imaginaire maximale parmi les $g'(z)$, $g' \in \Gamma'$. Montrer qu'on peut supposer que $|\Re(g'z)| \leq 1/2$.

3. Montrer que si $|g'(z)| < 1$, on aboutit encore à une contradiction. En déduire qu'on peut choisir $z'' \in \mathring{D}$.

4. En déduire que g appartient à Γ'.

Exercice 4 (Points fixes et stabilisateurs)**.** Rappeler pourquoi si z possède un stabilisateur non trivial, z appartient au bord de D.

1. On suppose que $\Re z = \pm 1/2$, et que $|z| > 1$. En raisonnant sur la partie imaginaire de $g(z)$, rappeler pourquoi z ne peut pas être fixé par un élément autre que l'identité.

2. Étudier le cas $z = j$ et $z = j^2$ (on pourra utiliser des raisonnements très similaires). Montrer que dans ces cas le stabilisateur est un groupe d'ordre 3.

3. On suppose cette fois que $|\Re z| < 1/2$, et donc $|z| = 1$. Montrer que si $gz = z$, $|c| \leq 1$. Montrer qu'on peut supposer $c = 1$.

4. Montrer qu'en fait $g = S$. En déduire que $z = 1$.

On peut montrer que Γ est le *produit libre* des groupes cycliques associés à S et à ST (ou de manière équivalente, son conjugué TS), qui stabilisent respectivement i et j.

Exercice 5 (Réseaux)**.** Un réseau est un sous-groupe discret de ($\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2, +)$ isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. Un *réseau marqué* est la donnée d'un tel réseau L et d'une base *directe* (ω_1, ω_2) de L.

1. Montrer que le quotient de l'ensemble des réseaux marqués par l'action du groupe des similitudes directes est en bijection naturelle avec le demi-plan de Poincaré (on s'intéressera au nombre ω_2/ω_1.

2. Déterminer une action de $SL_2(\mathbf{Z})$ sur les réseaux marqués dont les orbites forment exactement l'ensemble des réseaux.

3. En déduire que $\mathfrak{H}/PSL_2(\mathbf{Z})$ s'identifie au quotient de l'ensemble des réseaux de $\mathbf{C}$ par l'action du groupe des similitudes directes.

4. Soit L un réseau dont l'image dans $\mathfrak{H}$ possède un stabilisateur non trivial $\Sigma \subset SL_2(\mathbf{Z})$. Décrire les réseaux L possibles et identifier Σ à un sous-groupe de $SO_2(\mathbf{R})$.