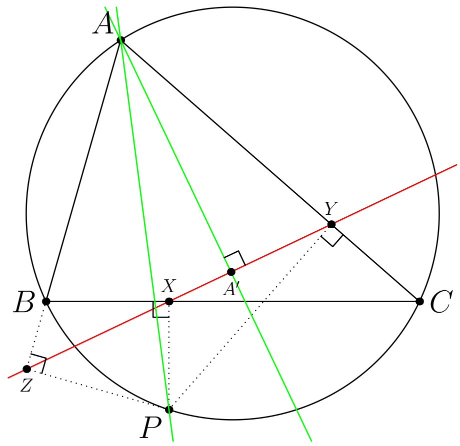
Université de Nice-Sophia-Antipolis
28 mai 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

Algèbre : développement n°32
Droites de Simson et deltoïde de Steiner

Références : Audin, *Géométrie*, exercices VII.25, III.32 (droite de Simson), III.33 (droite de Steiner), VII.17 (caractérisation de l'hypocycloïde à trois rebroussements). Pour le paramétrage de la deltoïde, voir aussi Trignan, *Constructions géométriques et courbes remarquables*.

Exercice 1 (La droite de Simson et sa direction)**.**

Soit ABC un triangle non dégénéré dans le plan euclidien et P un point du plan. On note X, Y, Z les projetés orthogonaux de P sur les côtés BC, CA, AB. Tous les angles considérés sont modulo π.

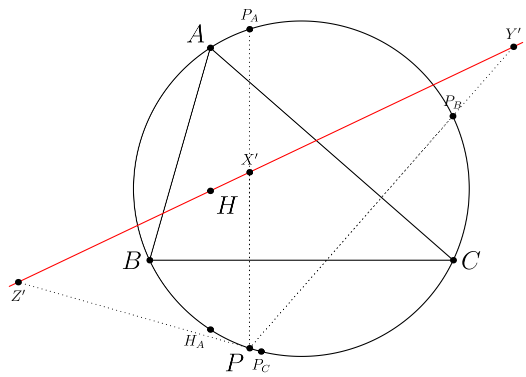


1. Montrer que $(AP, AC) - (BP, BC) = (ZP, ZY) - (ZP, ZX)$ (on pourra chercher des quadruplets de points cocycliques).
2. En déduire que X, Y, Z sont alignés si et seulement si A, B, C, P sont cocycliques. La droite XYZ est appelée *droite de Simson* du point P.

On suppose que P est sur le cercle circonscrit. La droite *isogonale* de AP est la symétrique de (AP) par rapport à la bissectrice de $\hat{A}$.

3. Soit A' le projeté orthogonal de A sur la droite de Simson XYZ. Montrer que $(AB, AP) = (YZ, YP) = (AA', AC)$.
4. En déduire que (AP) et (AA') sont des droites isogonales. Montrer que les isogonales de (AP), (BP) et (CP) sont parallèles, et perpendiculaires à la droite de Simson de P.

Exercice 2 (Droite de Steiner)**.** On suppose que P est un point du cercle circonscrit à ABC. Les symétriques de P par rapport aux côtés du triangles sont alignés sur une droite appelée *droite de Steiner de* P. On les notera X', Y', Z'. (On pourra utiliser une homothétie pour le vérifier.) Nous allons voir que la droite de Steiner passe par l'orthocentre du triangle.



1. Soit H_A le symétrique de H par rapport à BC. Montrer que H_A appartient au cercle circonscrit, par exemple en notant que $(HB, HC) = (AC, AB)$.
2. On note P_A l'intersection de (PX) et le cercle circonscrit. Montrer que $(HX', PX') = -(H_AP, PX') = (AP_A, PX')$.
3. En déduire que HX' est parallèle à AP_A.
4. On note de même P_B le point du cercle tel que PP_B et AC sont orthogonales. Montrer que AP_A et BP_B sont parallèles : on pourra décomposer l'angle

$$(AP_A, BP_B) = (AP_A, PP_A) + (PP_A, PP_B) + (PP_B, BP_B)$$

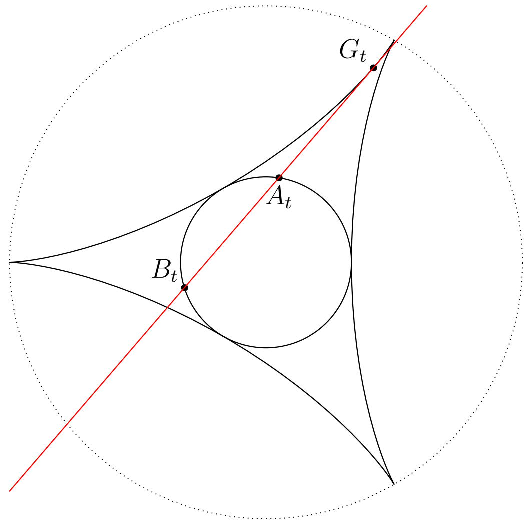
et remarquer que $(AP_A, PP_A) + (PP_B, BP_B) = (AC, PC) + (PC, BC)$.

5. En déduire que H, X' et Y' sont alignés, et que le milieu de $[HP]$ appartient à la droite de Simson de P.

Exercice 3 (Deltoïde de Steiner)**.** La deltoïde, ou hypocycloïde à trois rebroussements, est la figure dessinée par un point d'un cercle roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon triple.

On utilisera le résultat suivant (Audin, ch. VII).

> Étant donné un cercle de rayon R paramétré par un angle θ, on note A_θ le point de paramètre θ et B_θ le point de paramètre -2θ. On s'intéresse au point G_θ symétrique de B_θ par rapport à A_θ.
>
> Alors G_θ décrit une hypocycloïde à trois rebroussements, ou *deltoïde*, décrite par un cercle de rayon R roulant dans un cercle de rayon $3R$, et cette hypocycloïde est l'enveloppe des droites $(A_\theta B_\theta)$.
>
> Dans de bonnes coordonnées, G_θ est en effet le point d'affixe $2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$.



1. Soit un cercle $\mathcal{C}$, un point O du cercle et D une droite passant par O. On associe à un point M du cercle la droite D_M passant par M, telle que D soit parallèle à une bissectrice de (OM, D_M) (ou encore, D_M est la parallèle passant par M à la réflexion de OM par rapport à D). Montrer que les droites D_M enveloppent une deltoïde.

2. On se fixe un triangle ABC, P un point du cercle circonscrit à ABC, et on note $\mathcal{C}$ le cercle d'Euler (image du cercle circonscrit par l'homothétie de centre H l'orthocentre et de rapport 1/2), A' le pied de la hauteur $[AH]$, P' le milieu de $[HP]$. Montrer que A' et P' sont des points de $\mathcal{C}$.

3. Vérifier que $A'P'X$ est un triangle isocèle en P'. En déduire que la droite de Simson est la parallèle en P' à la réflexion de $(A'P')$ par rapport à la direction fixée $(A'A)$.

4. En déduire que les droites de Simson enveloppent une deltoïde, et que celle-ci est tangente au cercle d'Euler en trois points.

Suggestion de présentation. Nous allons démontrer le résultat suivant : soit ABC un triangle non dégénéré du plan euclidien, Γ son cercle cirsconcrit. Alors lorsque P décrit Γ, les projetés de P sur les côtés du triangle sont alignés sur des droites dites *de Simson*, qui enveloppent une deltoïde.

1. Les droites de Simson. Soit P un point quelconque du plan et X, Y, Z ses projetés orthogonaux sur les côtés du triangle. Alors P, X, B, Z et P, A, Y, Z sont cocycliques (sur les cercles de diamètres PB et PA, donc $(ZP, ZX) = (BP, BX)$ et $(ZP, ZY) = (AP, AY)$. On soustrait : $(ZY, ZX) = (AP, AC) - (BP, BC)$, ce qui montre que X, Y, Z sont alignés ssi A, B, C, P sont cocycliques.

2. La droite de Steiner passe par l'orthocentre. On note X', Y', Z' les réflexions de P par rapport aux côtés. Tout d'abord soit H_A la réflexion de l'orthocentre H par rapport à (BC). Par définition des hauteurs $(HB, HC) = (AC, AB)$ donc $(AB, AC) = (H_AB, H_AC)$: H_A appartient à Γ.

Soit P_A la seconde intersection de (PX') et Γ. Alors $\overrightarrow{AP_A}$ et $\overrightarrow{HX'}$ sont tous deux symétriques de $\overrightarrow{H_AP}$ par rapport à (BC), donc HX' est parallèle à AP_A. On vérifie ensuite que AP_A est parallèle à BP_B: pour cela on écrit $(AP_A, BP_B) = (AP_A, PP_A) + (PP_A, PP_B) + (PP_B, BP_B) = (AC, PC) + (BC, AC) + (PC, BC) = 0$. Ainsi HX' et HY' sont parallèles, ce qui prouve que la *droite de Steiner* $(X'Y')$ passe par H.

3. Caractérisation de la droite de Simson. Soit Γ' le cercle d'Euler $h_{H,1/2}(\Gamma)$. D'après ce qui précède, les points h_A (pied de la hauteur issue de A) et P' (milieu de $[PH]$) appartiennent à Γ'. La projection orthogonale de P' sur BC est le milieu de $[h_AX]$. La droite de Simson $(P'X)$ est donc symétrique de $(P'h_A)$ par rapport à une direction fixe (celle de la hauteur AH).

4. Une construction des deltoïdes. On peut définir la deltoïde, ou hypocycloïde à trois rebroussements comme la courbe paramétrée par l'affixe $z(\theta) = 2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$. On peut montrer que c'est l'enveloppe des droites $A_\theta B_\theta$, où A_θ est le point d'angle θ sur un cercle et B_θ d'angle -2θ sur le même cercle. On a en effet $z'(\theta) = 2\overrightarrow{B_\theta A_\theta}$.

Si on fixe un cercle $\mathcal{C}$, et un point Ω sur ce cercle et une droite D passant par Ω, on peut associer à un point M du cercle la corde MM' dont la direction est symétrique de ΩM par rapport à D. Soit Ω' l'autre intersection de D et $\mathcal{C}$. Alors si M est de paramètre θ par rapport à Ω, $(\Omega'\Omega, \Omega' M) = \theta/2$, et $(\Omega'\Omega, \Omega' M') = (M\Omega, MM') = 2(\Omega M, \Omega\Omega') = x - \theta$, donc M' est de paramètre $\theta_0 - 2\theta$.

Le résultat s'obtient alors en posant $\mathcal{C} = \Gamma'$, $\Omega = h_A$, $M = P$.