Université de Nice-Sophia-Antipolis
31 mars 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

Algèbre : développement n°30
Comptage de racines et signature d'une forme quadratique

Les références sont : Gantmacher, *Matrix Theory* (tome 2, chapitre XV, par. 9), traduction française *Théorie des matrices* et Dieudonné, *Calcul infinitésimal* (II, Appendice, 3).

Exercice 1 (Comptage simple (Gantmacher))**.** Soit f un polynôme à coefficients réels, de degré n. On note α_j ses différentes racines, chacune de multiplicité n_j.

1. Soit s_k la k-ième somme de Newton des racines de f, $s_k = \sum n_j {\alpha_j}^k$. Expliquer pourquoi celle-ci s'exprime en fonction des coefficients de f.
2. Montrer que $\sum s_k z^k = f'(1/z)/zf(1/z)$.
3. On considère la forme quadratique $Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} s_{i+j} x_i x_j$. Décomposer Q en somme de carrés (on pourra séparer les termes en fonction des α_k).
4. En déduire que si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur de longueur au moins le nombre de racines, la signature de Q est $(r+c, c)$ où r est le nombre de racines réelles et $2c$ le nombre de racines non réelles.

Exercice 2 (Localisation des racines)**.** Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n, on notera

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

On choisit un réel t, et on s'intéresse au nombre de racines de P inférieures (resp. supérieures) à t. On pose $Q_t = (X-t)P'(X)$.

1. Soit $L(x,y)$ le polynôme (symétrique) tel que $P(x)Q_t(y) - P(y)Q_t(x) = (x-y)L(x,y)$. On note $L = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$: la matrice $A = (a_{ij})$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que si $P = P_1 P_2$, les polynômes associés vérifient $L(x,y) = P_2(x)P_2(y)L_1(x,y) + P_1(x)P_1(y)L_2(x,y)$.
3. En déduire que $A = R^T(A_1 \oplus A_2)R$ où A_1 et A_2 sont les matrices associées à P_1 et P_2, et R est la matrice de taille $n+1$ qui calcule le résultant de P_1 et P_2.
4. On suppose que $P_1 \wedge P_2 = 1$. Montrer que la signature de A est la somme des signatures de P_1 et P_2.

On va montrer le résultat suivant : le rang de A est le nombre de racines distinctes de P et sa signature est $(r_+ + s, r_- + s)$ où $r_\pm$ est le nombre de racines réelles (comptées sans multiplicités), qui sont $> t$ (resp. $< t$), et $2s$ le nombre de racines distinctes non réelles.

5. Montrer que si $P = (X-a)^k$, $L(x,y) = k(x_a)^{k-1}(y-a)^{k-1}(a-t)$. En déduire que la propriété est vraie dans ce cas.
6. Montrer que si $P = Q^k$, où $Q = X^2 + b^2$ (avec $b \neq 0$), alors $L(x,y) = 2kQ(x)^{k-1}Q(y)^{k-1}(tb^2 - b^2(x+y) - txy)$. Quelle est la signature de $\begin{pmatrix} tb^2 & -b^2 \\ -b^2 & -t \end{pmatrix}$?
7. Conclure.

Exercice 3 (Comptage simple, version « Dieudonné »). Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n, on notera

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n.$$

1. Soit $L(x, y)$ le polynôme (symétrique) tel que $P(x)P'(y) - P(y)P'(x) = (x - y)L(x, y)$. On note $L = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$: la matrice $A = (a_{ij})$ est une matrice symétrique.

2. Montrer que si $P = P_1P_2$, les polynômes associés vérifient $L(x, y) = P_2(x)P_2(y)L_1(x, y) + P_1(x)P_1(y)L_2(x, y)$.

3. En déduire que $A = R^T(A_1 \oplus A_2)R$ où A_1 et A_2 sont les matrices associées à P_1 et P_2, et R est la matrice de taille $n + 1$ qui calcule le résultant de P_1 et P_2.

4. On suppose que $P_1 \wedge P_2 = 1$. Montrer que la signature de A est la somme des signatures de P_1 et P_2.

On va montrer le résultat suivant : le rang de A est le nombre de racines distinctes de P et sa signature est $(r + s, s)$ où r est le nombre de racines réelles et $2s$ le nombre de racines non réelles.

5. Montrer que si $P = (X - a)^k$, $L(x, y) = k(x_a)^{k-1}(y - a)^{k-1}$. En déduire que la propriété est vraie dans ce cas.

6. Montrer que si $P = Q^k$, où $Q = X^2 + b^2$ (avec $b \neq 0$), alors $L(x, y) = 2kQ(x)^{k-1}Q(y)^{k-1}(xy - b^2)$. Quelle est alors la signature ?

7. Conclure.