Université de Nice-Sophia-Antipolis
17 mai 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

Algèbre : développement n°25
Théorème des six birapports, applications à la cocyclicité

Références : Audin, *Géométrie*, exercice V.38 (p. 163), et ses indications (p. 292).

Exercice 1 (Configurations de 8 points)**.** On considère 8 points de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, notés A, B, C, D, A', B', C', D'.

1. On note $b_{BC} = [B, C, A', D']$, et b_{CA}, b_{AB} les birapports analogues obtenus par permutation cyclique de A, B, C. Montrer que
$$b_{AB}b_{BC}b_{CA} = \frac{C'-A}{C'-B} \cdot \frac{A'-B}{A'-C} \cdot \frac{A'-B}{A'-C}$$

2. En déduire que
$$b_{AB}b_{BC}b_{CA}b'_{AB}b'_{BC}b'_{CA} = 1$$
où b'_{XY} est l'analogue de b_{XY} en échangeant les paires (M, M').

Exercice 2 (Systèmes cubiques)**.** On se propose de donner un moyen élégant de retrouver l'identité précédente :

1. On appelle système cubique un ensemble X de huit éléments, et la donnée de trois parties I, J, K de quatre éléments, telles que $I \cap J$, $J \cap K$ et $K \cap I$ ont deux éléments, et $I \cap J \cap K$ ont un seul élément.

   Montrer qu'il existe une bijection unique de X avec $\{a, b, c, d, a', b', c', d'\}$ telle que I, J, K correspondent à
$$\{b, c, a', d'\} \qquad \{c, a, b', d'\} \qquad \{a, b, c', d'\}$$
   respectivement.

2. Montrer qu'alors X est en bijection avec les sommets d'un cube, de sorte que I, J, K et leurs complémentaires sont les six ensembles à 4 éléments corrsepondant aux faces.

L'identité des six birapports expliquée précédemment peut être illustrée par un cube :

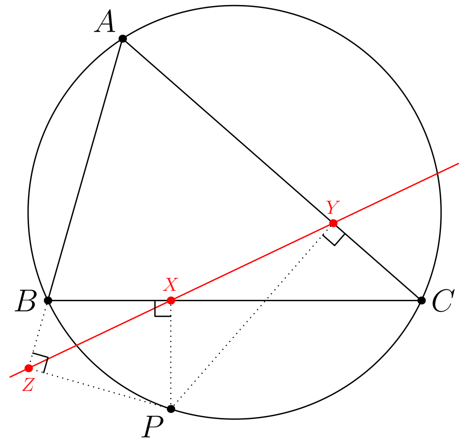
3. Vérifier que l'on peut faire correspondre les huit points avec les sommets d'un cube de sorte que les 6 birapports correspondent aux six faces. Si S est un sommet, on note $\lambda(S)$ le nombre associé à ce sommet.

4. Soient **i**, **j**, **k** les vecteurs donnant les trois directions du cube. On pose
$$P_{\mathbf{v}} = \prod_{\mathbf{v}=\mathbf{ST}} \lambda(T) - \lambda(S).$$
   Montrer que $S_{\mathbf{ij}} = P_{\mathbf{i}}/P_{\mathbf{j}}$ est le produit de deux birapports.

5. En déduire une identité concernant le produit de six birapports.

6. Montrer que si cinq faces sont composées de points cocycliques/alignés, la sixième aussi.

Exercice 3 (La droite de Simson)**.**



Le théorème de la droite de Simson s'énonce ainsi :

> Soit ABC un triangle du plan euclidien, et M un point du plan. Les projections orthogonales de M sur BC, CA, AB sont notées X, Y, Z. Alors X, Y, Z sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC.

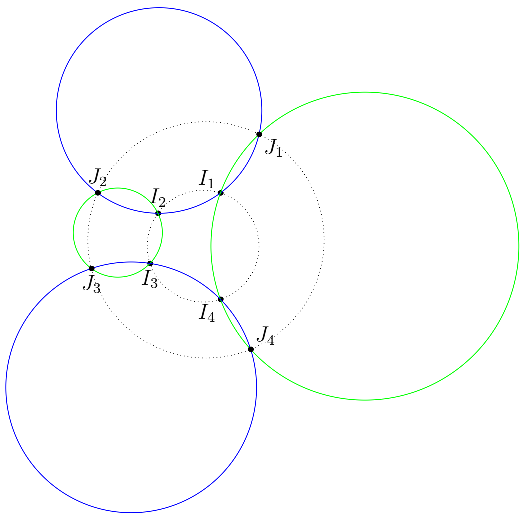
1. On munit les points du plan euclidien d'une affixe complexe. Trouver huit points particuliers dans la figure (ne pas oublier le point à l'infini O!).
2. Vérifier que les quadruplets qui nous intéressent sont (A, B, C, P) et (X, Y, Z, O).
3. On ne suppose rien sur le point M. Trouver deux quadruplets de points alignés (ne pas oublier le point à l'infini !).
4. Montrer que ces quadruplets, avec (A, B, C, P), forment un système cubique.
5. Les deux quadruplets complémentaires sont-ils cocycliques ?
6. En déduire que P, A, B, C sont cocycliques si et seulement si X, Y, Z sont alignés.

Exercice 4 (La droite de Simson, version élémentaire)**.** Nous allons maintenant voir la démonstration élémentaire : tous les angles considérés sont modulo π.

1. En utilisant la cocyclicité, montrer que $(AP, AC) = (ZP, ZY)$.
2. En déduire que $(AP, AC) - (BP, BC) = (ZP, ZY) - (ZP, ZX)$.
3. En déduire que X, Y, Z sont alignés si et seulement si A, B, C, P sont cocycliques.

Remarquer que la situation est très fortement dégénérée : la figure contient 4 triplets de points alignés et 4 triplets de points cocycliques.

Exercice 5 (Le théorème de Miquel)**.**
On considère quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4: C_1 et C_2 se coupent en I_1, J_1, et ainsi de suite par permutation cyclique.



1. Trouver quatre quadruplets de points cocycliques.
2. Placer ces quadruplets sur les faces d'un cube, de sorte que les I_k et les J_k forment les deux faces restantes.
3. En déduire le théorème de Miquel : les I_k sont cocycliques ou alignés si et seulement si les J_k le sont aussi.
4. Montrer qu'en posant $I_\bullet = (P, A, B, C)$ et $J_\bullet = (Y, Z, O, X)$ on retrouve le théorème de Simson.