Université de Nice-Sophia-Antipolis
29 mars 2010
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

Algèbre : développement n°22
Ellipsoïde de John-Loewner

Références : Leichtman, Schauer, *Exercices X-ENS, Algèbre et géométrie* (14.12), Francinou-Gianella-Nicolas, Algèbre 3 (oraux X-ENS).

Exercice 1 (Ellipsoïdes)**.** Un ellipsoïde est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ définie par une équation quadratique, dont la partie de plus haut degré est définie positive. On écrit

$$x^T Qx + 2Lx = C.$$

Si A est une matrice symétrique, on note $q_A(x) = x^T Ax$.

1. On pose $L = -(Qx_0)^T$. Montrer que l'équation s'écrit aussi sous la forme $(x-x_0)^T A(x-x_0) = 1$ où A est un multiple de Q. Le point x_0 est appelé *centre de l'ellipsoïde*.
2. Le volume d'un ellipsoïde est le volume de la partie définie par l'inégalité $q_A(x - x_0) \leq 1$. Exprimer ce volume en fonction de A.
3. Montrer que si un tel ellipsoïde contient une boule de centre x de rayon ε, alors $q_A(v) \leq 4/\varepsilon^2$ pour tout vecteur unitaire v (on pourra utiliser l'inégalité du parallélogramme avec les vecteurs $x - x_0 \pm \varepsilon v$).
4. Soient V_1 et V_2 les volumes respectifs d'ellipsoïdes définis par des matrices A_1 et A_2 (et des centres quelconques). Montrer qu'un ellipsoïde donné par la matrice $A = (A_1 + A_2)/2$ est de volume inférieur à $\sqrt{V_1 V_2}$ (on pourra se placer dans un repère judicieusement choisi, et utiliser l'inégalité *arithmético-géométrique* $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$).

   Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2 (Le théorème)**.** Soit K un ensemble compact, d'intérieur non vide contenu dans $\mathbb{R}^n$ (ε désignera le rayon d'une boule contenue dans K). On note S^+ l'ensemble des matrices symétriques positives (ou *semi-définies* positives) de taille n.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_0$ des matrices $A \in S^+$ tels que K soit contenu dans l'ensemble $q_A(x) \leq 1$ est fermé (on pourra montrer que le complémentaire est ouvert).
2. On suppose que K est contenu dans un ellipsoïde de paramètres (A, x_0). Montrer que pour tout vecteur v de norme 1, $q_A(v) \leq 4/\varepsilon^2$.
3. Montrer que $\mathcal{E}_0$ est un ensemble compact non vide de l'espace des matrices symétriques. Vérifier que la fonction *déterminant* prend une valeur strictement positive en un point de $\mathcal{E}_0$.
4. Vérifier que $\mathcal{E}_0$ est convexe. Si A_1 et A_2 définissent des ellipsoïdes de même volume, montrer que l'ellipsoïde de matrice $(A_1 + A_2)/2$ est de volume strictement inférieur.
5. En déduire que K est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

Exercice 3 (Groupes de matrices compacts)**.** Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit K l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|g \cdot x| \leq 1$ pour un certain $g \in G$. Montrer que K est un compact, d'intérieur non vide, invariant sous l'action de G.
2. En utilisant le théorème, montrer qu'il existe une forme quadratique q qui est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, et que G est un sous-groupe du groupe orthogonal de cette forme quadratique.
3. En déduire que tout sous-espace stable par G admet un supplémentaire stable.