Université de Nice-Sophia-Antipolis
5 octobre 2009
Préparation à l'agrégation (Rémy Oudompheng)

TD d'analyse n°13 : intégrales à paramètre (correction)

Exercice 1.

1. Attention : la fonction $t \mapsto (\sin t)/t$ n'est pas intégrable. L'expression de I doit donc être comprise comme :
$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt.$$
2. Une intégration par parties montre que
$$\int_0^M \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^M + \int_0^M \frac{1-\cos t}{t^2} dt$$
soit l'égalité demandée en passant à la limite $M \to \infty$. Cette fois, la fonction est positive et intégrable (elle est bornée par 1 et par $2/t^2$), donc la nouvelle expression n'est pas ambiguë.
3. L'expression de $f(x)$ peut être interprétée de la même façon que dans la question 1. Cependant, une intégration par parties montre que
$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} dt$$
qui est l'intégrale d'une fonction intégrable.
4. Si $x > 0$, la fonction $\phi(x,t) = \frac{1-\cos t}{(x+t)^2}$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $x, t > 0$, et de plus $\phi(x,t) < \frac{1}{(x_0+t)^2}$ pour tout $x > x_0$ et $t > 0$. De même $\partial\phi/\partial x$ est uniformément majorée, pour $x > x_0$, par $1/x_0$ et par $1/(x_0+t)^3$.
Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre montre que f est aussi dérivable, et que de plus
$$f'(x) = -2\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{(x_0+t)^3} dt$$
On a même, en faisant une intégration par parties,
$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt$$
Par les mêmes raisonnements, f' est à son tour dérivable, et
$$f''(x) = 2\int_0^\infty \frac{\sin t}{(x+t)^3} dt = -\left[\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$$
On en déduit
$$f''(x) + f(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{1}{x}.$$
5. On peut écrire
$$\psi(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{M\to\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t(x+t)} dt + \int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t(x+t)} dt$$
on voit facilement que le second membre peut se récrire sous la forme d'une série alternée, dont la valeur est bornée, tandis que le premier membre est minoré par
$$\int_0^{\pi/2} \frac{2t/\pi}{t(x+t)} dt = \frac{2}{\pi}\log\frac{x+\pi/2}{x} \sim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$
qui ne tend pas vers une limite finie.

Exercice 2.

1. La fonction E est définie par l'intégrale sur un segment d'une fonction continue. Elle est bien définie pour toute valeur réelle de x. La valeur de $E(0)$ est $\pi/4$, et $E(\infty) = 0$.
2. La dérivée de E est
$$E'(x) = -2x \int_0^1 \exp(-x^2(1+t^2))dt = -2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-t^2)dt$$
soit $E'(x) = -2\varepsilon'(x)\varepsilon(x)$.
3. On en déduit que $E(x) = E(0) - \varepsilon(x)^2$, d'où $I = \sqrt{E(0)} = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3 (Équation de la chaleur)**.**

1. Soit $K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$. Montrer que $\partial K/\partial t = \partial^2 K/\partial u^2$. On dit que K vérifie l'*équation de la chaleur*. Pour la suite de l'exercice, on se souviendra que $\int_{\mathbb{R}} K(x,t)dx = 1$.
2. Montrer que la fonction F partage la même propriété. Est-ce encore vrai si ne suppose plus f dérivable (ni même continue) ?
3. Question subsidiaire : montrer que $F(x,t) \to f(x)$ lorsque $t \to 0_+$.
4. On suppose cette fois que f est périodique, de période L. Montrer que la fonction d'*énergie* $E(t) = \int_0^L F(x,t)dx$ est constante.
5. On suppose que f s'écrit sous la forme
$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \sin(\alpha_i x + \phi_i),$$
où les α_i sont des réels non nuls. Montrer que $F(x,t)$ converge vers a_0 lorsque $t \to \infty$. Question subsidiaire : montrer que cette convergence est uniforme.

TD d'analyse n°14 : dérivation des intégrales à paramètre, fonction Γ

Exercice 4. On considère cette fois la fonction
$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt$$

1. La fonction à intégrer est uniformément majorée par $1/(1+t^2)$. La fonction g est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est même continue.
2. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre montre que G est dérivable sur tout intervalle $[a, +\infty)$. On vérifie facilement que $G' = g$, et $G(0) = 0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, on montre que
$$g(x) = \left[\frac{\sin xt}{x(1+t^2)}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2t\sin xt}{x(1+t^2)^2}dt = \int_0^\infty \frac{2t\sin xt}{x(1+t^2)^2}dt$$
cette expression est immédiatement dérivable, et
$$g'(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2\cos xt}{x(1+t^2)^2}dt.$$
4. On montre que
$$xg(x) = \int_0^\infty \frac{2t\sin tx}{(1+t^2)^2}dt$$
à l'aide de l'expression de g calculée à la question précédente, après intégration par parties.

5. L'expression calculée pour $xg(x)$ montre après dérivation que :

$$xg'(x) + g(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2 \cos xt}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^\infty \Big(\frac{2\cos xt}{1+t^2} - \frac{2\cos xt}{(1+t^2)^2}\Big) dt$$

soit

$$xg'(x) + g(x) = 2g(x) - \int_0^\infty \frac{2\cos tx}{(1+t^2)^2} dt.$$

6. En dérivant l'expression précédente, on obtient

$$xg''(x) + g'(x) = g'(x) + \int_0^\infty \frac{2t \sin tx}{(1+t^2)^2} dt$$

soit en intégrant par parties

$$xg''(x) = \left[\frac{-\sin tx}{1+t^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x \cos tx}{1+t^2} dt = xg(x).$$

7. On déduit que

Exercice 5 (Fonction Γ [Gou94, IV.7.1.1])**.** On définit la fonction «Gamma» par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt.$$

1. Montrer que Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. En déduire la formule célèbre : $n! = \Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers zéro.
3. Soient $x < y$ des réels positifs. On pose

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\Gamma(x)} \exp(-t) t^{x-1} \text{ et } \phi_2(t) = \frac{1}{\Gamma(y)} \exp(-t) t^{y-1}$$

   Étudier ϕ_2/ϕ_1 : en déduire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\phi_2 < \phi_1$ sur $[0, M)$ et $\phi_2 > \phi_1$ sur $(M, +\infty)$.
4. Soit ψ une fonction strictement croissante entre 0 et $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^\infty \psi(t)\phi_1(t) dt < \int_0^\infty \psi(t)\phi_2(t) dt.$$

5. En déduire que Γ'/Γ est une fonction croissante : on dit que Γ est *log-convexe* (pourquoi ?). Utiliser cette propriété pour retrouver l'inégalité

$$\binom{n}{p} < \binom{n}{n/2}$$

   pour n entier et $p < n/2$.
6. Retrouver la *log-convexité* de Γ en étudiant $(\log \Gamma)''$. (*Indication :* on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

[Gou94] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 1994.

[Lep00] M. Lepez, *Les Grands classiques de Mathématiques*, Bréal, 2000.