TD Phy. Stat. L3 ENS : deux applications expérimentales

Martin Rieu

18 octobre 2019

1 Comment mesurer $\hbar$ à partir de données calorimétriques.

On rappelle la formule de Sackur-Tétrode démontrée en cours pour l'entropie d'un gaz parfait :

$$S(E,N,V) = k_{\mathrm{B}} N \left(\frac{5}{2} - \ln \left(n\lambda^3 \right) \right) \tag{1}$$

avec $n = N/V$ la densité de particules et où λ est une échelle de longueur.

1. Après avoir établi le lien entre température et énergie, montrer que

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}} \tag{2}$$

   Historiquement, Sackur et Tétrode ont vérifié leur formule en utilisant les courbes de chaleurs latentes de fusion $L_f(T)$ et d'ébullition $L_e(T)$, de pression de vapeur saturante $\bar{p}(T)$ et de capacité calorifique à pression constante $c_p(T)$ du mercure entre $0K$ et $200K$.

2. Expliquez rapidement comment on peut obtenir ces courbes de manière expérimentale.
3. Quelle est la relation entre $L_e(T)$, T, $s_{gaz}(T,\bar{p}(T))$ et $s_l(T,\bar{p}(T))$?
4. En négligeant la dépendance en pression de c_p et s dans les phases condensées, exprimer $s_l(T)$ en fonction des valeurs $c_p(T)$ entre 0 et T ainsi que $L_f(T)$.
5. Déduire des deux expressions précédentes et de la formule de Sackur-Tétrode une relation qui permet de déduire la constante de Planck h des données thermodynamiques classiques précédentes.

2 Refroidissement magnétique "1-shot"

On rapelle la fonction de partition classique de Langevin qui décrit la thermodynamique d'un matériau paramagnétique :

$$Z = C \int \mathrm{d}\theta \sin\theta \mathrm{e}^{\beta\mu B\cos\theta} = C\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{\beta\mu B x} = C\frac{\sinh \beta\mu B}{\beta\mu B} \tag{3}$$

ainsi que la magnétisation moyenne $m = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln z}{\partial B} = \mu\mathcal{L}(\beta\mu B)$ avec $\mathcal{L}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \frac{\sinh x}{x} = \coth x - \frac{1}{x}$. C'est la fonction dite de Langevin.

1. Montrer que l'entropie $S(B,T)$ du système considéré jusqu'à présent est telle que :

$$\frac{S}{Nk_B} = A - \frac{5}{2}\log(\beta) + \log\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right) - x\mathcal{L}(x)$$

   où A est une constante qui ne dépend ni de B ni de β, et on pose $x = \beta\mu B$.

2. En déduire que :

$$\left.\frac{\partial S}{\partial B}\right|_T = -\frac{Nk_B}{B}x^2\mathcal{L}'(x), \tag{4}$$

   Commenter le signe de cette dérivée.

3. On baisse le champ B appliqué au système d'une quantité dB, de manière adiabatique (à entropie constante). Sans calculs, prédire et justifier par des arguments thermodynamiques simples l'évolution de la température du système.
4. Pour une transformation adiabatique, montrer, en précisant le signe, que :

$$\frac{dT}{T} = \pm \frac{dB}{B} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{1}{x^2 \mathcal{L}'(x)} \right)^{-1} \tag{5}$$

5. Cet effet est utilisé en cryogénie pour refroidir les échantillons magnétiques au dessous de la température du bain d'hélium liquide. Proposer un protocole simple.
6. AN : On se place à champ fort ($x \gg 1$). Montrer que dans cette limite, $\mathcal{L}'(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Dans cette approximation, sachant que l'hélium liquide a une température d'environ $3K$, quelle température peut-on atteindre avec le dispositif ci-dessus en faisant passer le champ de $3T$ à $0,1T$?
7. On dit que ce refroidissement est un refroidissement "1-shot". Pourquoi ?