Bornes sur les restes de séries solutions d'équations différentielles

Version GT Pequan, 2015-10-22
(basé sur la version présentée à Nice)

---

* Problème

$$\underbrace{p_r(z)}_{\in \mathbb{C}[z]} u^{(r)}(z) + \dots + \underbrace{p_0(z)}_{\in \mathbb{C}[z]} u(z) = 0 \rightsquigarrow u(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} u_n z^n}_{\text{connus}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} u_n z^n}_{|\cdot| \leq ?}$$

- Origines : fns spéciales, théorie éq diffs, combinatoire, ~~est non~~
  Motivation
- ~~Origines~~ : fns spéciales (MPFR...), ~~éq diff~~, méthodes de Taylor...
- Historique :
  - séries majorantes (Cauchy, ~1840)
  - utilisations : van der Hoeven 2001, M.-Salvy 2010...
    → ok mathématiquement, surestimations gd ordre ↗ p. ex.
- Cet exposé :
  - algo
  - pas de thm de finesse

* Exemples

* Analogie $\quad \underset{\in GL_n(\mathbb{C})}{A}x = b \qquad \|A^{-1}\| \leq M$

une EDO + CI est une éq. affine !

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \ (\approx b) \rightsquigarrow \|x - \tilde{x}\| \leq M \|b - \tilde{b}\|$$

but : construire un analogue de ce M

~~* À ce stade, on a vu l'essentiel ... la suite va être un peu plus technique~~

* Séries majorantes

- On ne va pas chercher directement une borne sur $\left|\sum_{n\geq N} u_n z^n\right|$, mais une série majorante :

$$\sum v_n z^n \in \mathbb{R}_+[[z]] \quad \text{où } \forall n \quad |u_n| \leq v_n$$

- Idée : dans certaines circonstances, on peut remplacer ("majorer") notre éq diff compliquée par une équation modèle $\hat{P}$ simple tq

$$\left.\begin{array}{l} P \cdot u = 0 \\ \hat{P} \cdot v = 0 \\ |u_0| \leq v_0, \dots, |u_k| \leq v_k \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n, \ |u_n| \leq v_n$$

puis trouver $v(z)$ explicitement.

- Quand on a une série maj on a des bornes sur les valeurs, les dérivées ...

* À ce stade on a vu l'essentiel
les détails sont plus techniques !

* Opérateur local, récurrence

$\theta = z \frac{d}{dz}$ ex : $u' - u = 0$ $u(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^n$

$z u' - z u = 0$

$\boxed{P(z,\theta) \rightsquigarrow P(S^{-1}, n)}$ $(\theta - z) u = 0$ $\longrightarrow$ $(n - S^{-1})(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = 0$

$u_n = n u_{n-1}$

θ à gauche par commodité

* $\underbrace{\left[\theta^r p_r(z) + \cdots + p_0(z)\right]}_{=: P(z,\theta)} \cdot u(z) = 0$

$p_r(0) \neq 0$ (régulier)

$u(z) = \sum_n u_n z^n$

$\tilde{u}(z) = \sum_{n \leq N-1} u_n z^n$

Pb : borner $u - \tilde{u}$

* $P(z,\theta) \cdot (\tilde{u} - u) = P(z,\theta)\,\tilde{u} =: q(z)$ (résidu, calculable)

on peut voir que $q(z) = * z^N + \cdots + * z^{N+s-1}$

* $\hookrightarrow$ $\left[\theta^r \cancel{} + \theta^{r-1} \underbrace{\frac{p_{r-1}}{p_r}}_{=: a_{r-1}(z)} + \cdots + \underbrace{\frac{p_0}{p_r}}_{=: a_0(z)}\right] \underbrace{(p_r(z) \times u(z))}_{=: y(z)} = q$

↓ ↓ ↓ c'est cette transformation qui va permettre de trouver une s (borner cette série)

$$\sum_{k=0}^{r} \theta^k \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(\theta)\, z^j$$

On réécrit en S, n :

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(n)\, S^{-j}\right] \cdot (y_n) = (q_n)$$

suite finie

$$\boxed{Q_0(n)\, y_n = q_n - \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(n)\, y_{n-j}}$$

deg $\leq r-1$
(car $p_r(0) \neq 0$)
CRUCIAL !

deg $= r$
(car ordre r)

$$y_n = \frac{q_n}{Q_0(n)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_j(n)}{Q_0(n)}\, y_{n-j}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{n q_n}{Q_0(n)}} - \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n\, Q_j(n)}{Q_0(n)}}\, y_{n-j}\right)$$

bornés pour n grand

Demandons donc (je ne dis pas comment les calculer, mais ça se fait) :

$$\left.\begin{array}{l} (\forall j) \quad \left|\dfrac{n q_j}{Q_0(n)}\right| \leq \hat{q}_j < \infty \\[2ex] (\forall j \geq 1) \quad \left|\dfrac{n\, Q_j(n)}{Q_0(n)}\right| \leq \hat{a}_j < \infty \end{array}\right\} \text{ pour } n \geq \text{un certain } n_0$$

Alors

$$|y_n| \leq \frac{1}{n}\left(\hat{q}_j + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j\, |y_{n-j}|\right)$$

* Ça donne envie d'introduire $(\hat{y}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tq

$$\hat{y}_n = \frac{1}{n}\left(\hat{q}_j + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \hat{y}_{n-j}\right)$$

de sorte que

$$\left[(\forall n \leq n_0)\left(|y_n| \leq \hat{y}_n\right)\right] \Rightarrow \left[(\forall n)\left(|y_n| \leq \hat{y}_n\right)\right].$$

* Repassons en différentiel :

$$\left[\theta - \hat{a}_j(z)\right]\hat{y}(z) = \hat{q}(z) \quad \text{où} \quad \hat{a}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_j z^j.$$

* C'est une EDO d'ordre 1 qu'on peut résoudre !

$$\hat{y}(z) = h(z)\left(\text{cste} + \int \frac{t^{-1}\hat{q}(t)}{h(t)}\,dt\right) \quad z^N + \dots$$

$$\text{où } h(z) = \exp\left(\int_0^z t^{-1}\hat{a}(t)\,dt\right)$$

* Application aux restes :

$y(z) = \mathrm{pr}(z)\left(\tilde{u}(z) - u(z)\right)$ satisfait $y_n = 0$ pour $n \leq n_0$

On choisit la sol $\hat{y}$ tq cste $= 0$

On a bien $|y_n| \leq |y_n|$ pour $n \leq n_0$.

* <u>Bilan</u>

- Connaissant $\sum_{n=0}^{N-1} u_n z^n$, on calcule une borne terme à terme sur $\sum_{n\geq N} u_n z^n$ (borne sur pr^{-1})
- Celle-ci s'écrit $\hat{g}(z) = \underbrace{h(z)}_{\text{ne dépend que de l'équation ("A")}} \underbrace{\left(\cancel{\text{cste}} + \int \frac{t^{-1}\hat{q}(t)}{h(t)}\,dt\right)}_{\approx q(z)}$

et en particulier "décroît comme $q(z)$" quand n grandit.