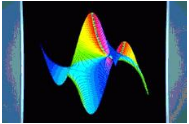
NumGfun

Calculs analytiques avec les fonctions D-finies

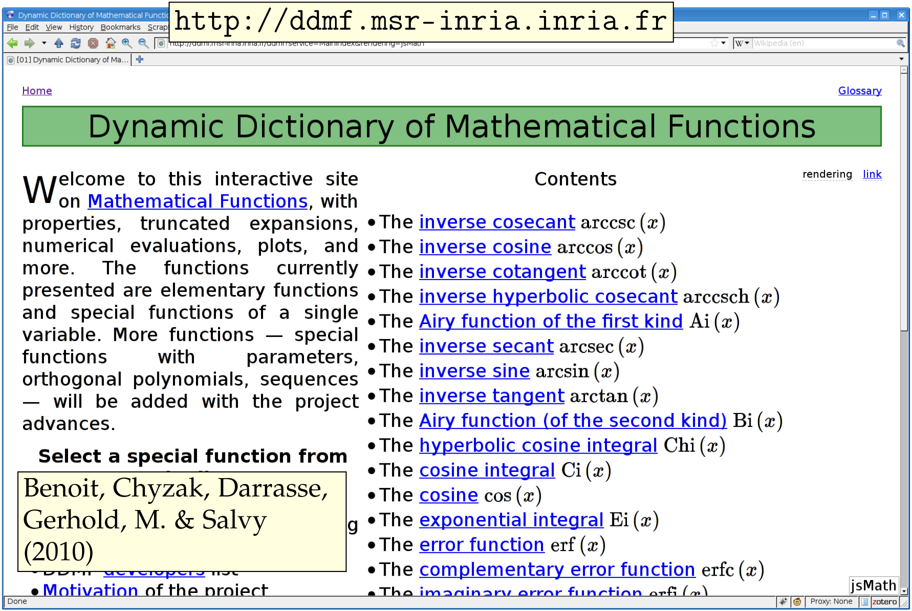
Marc Mezzarobba

Projet Algorithms



INRIA Paris Rocquencourt

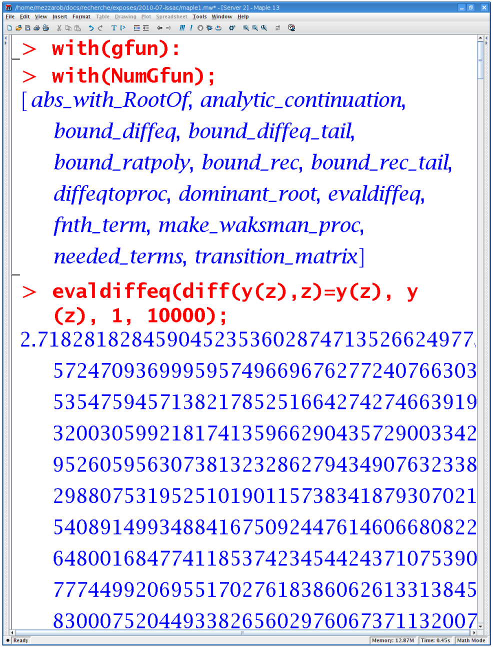
Groupe de travail Arénaire, 9 décembre 2010 http://ddmf.msr-inria.inria.fr



Benoit, Chyzak, Darrasse, Gerhold, M. & Salvy (2010)

http://algo.inria.fr/libraries/ (LGPL)

B. Salvy and P. Zimmermann. Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. 1994.


/home/mezzarob/docs/recherche/exposes/2010-07-issac/maple1.mw* - [Server 2] - Maple 13
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help
> with(gfun):
> with(NumGfun);
[abs_with_RootOf, analytic_continuation, bound_diffeq, bound_diffeq_tail, bound_ratpoly, bound_rec, bound_rec_tail, diffeqtoproc, dominant_root, evaldiffeq, fnth_term, make_waksman_proc, needed_terms, transition_matrix]
> evaldiffeq(diff(y(z),z)=y(z), y(z), 1, 10000);
2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200
Ready
Memory: 12.87M
Time: 0.45s
Math Mode

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

$$diffeq := \left\{ \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{15} z + \frac{7}{30} z^2 \right) y(z) + \left(-\frac{9}{20} + \frac{29}{30} z - \frac{1}{12} z^2 \right) \left(\frac{d}{dz} y(z) \right) + \left(-\frac{43}{60} + \frac{49}{60} z + \frac{11}{30} z^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} y(z) \right) + \left(-\frac{7}{12} + \frac{17}{30} z - \frac{3}{5} z^2 \right) \left(\frac{d^3}{dz^3} y(z) \right), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{7}{30}, D^{(2)}(y)(0) = -\frac{43}{60} \right\}$$

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

$$diffeq := \left\{ \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{15} z + \frac{7}{30} z^2\right) y(z) + \left(-\frac{9}{20} + \frac{29}{30} z - \frac{1}{12} z^2\right) \left(\frac{d}{dz} y(z)\right) + \left(-\frac{43}{60} + \frac{49}{60} z + \frac{11}{30} z^2\right) \left(\frac{d^2}{dz^2} y(z)\right) + \left(-\frac{7}{12} + \frac{17}{30} z - \frac{3}{5} z^2\right) \left(\frac{d^3}{dz^3} y(z)\right), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{7}{30}, D^{(2)}(y)(0) = -\frac{43}{60} \right\}$$

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), (1+I)/5, 40);
```

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

$$diffeq := \left\{ \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{15} z + \frac{7}{30} z^2\right) y(z) + \left(-\frac{9}{20} + \frac{29}{30} z - \frac{1}{12} z^2\right) \left(\frac{d}{dz} y(z)\right) + \left(-\frac{43}{60} + \frac{49}{60} z + \frac{11}{30} z^2\right) \left(\frac{d^2}{dz^2} y(z)\right) + \left(-\frac{7}{12} + \frac{17}{30} z - \frac{3}{5} z^2\right) \left(\frac{d^3}{dz^3} y(z)\right), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{7}{30}, D^{(2)}(y)(0) = -\frac{43}{60} \right\}$$

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), (1+I)/5, 40);
```

$$0.04485557487767843131893308147593115486663 + 0.01990489830212805305047897725810997882826\,I$$

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), 1/5, 1000000);
```

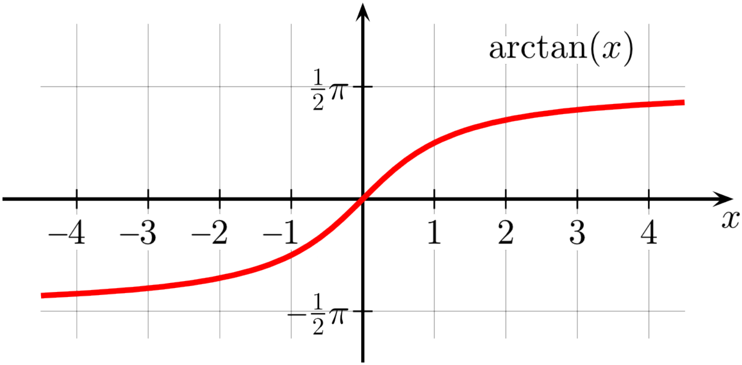
```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), 1/5, 1000000);
```

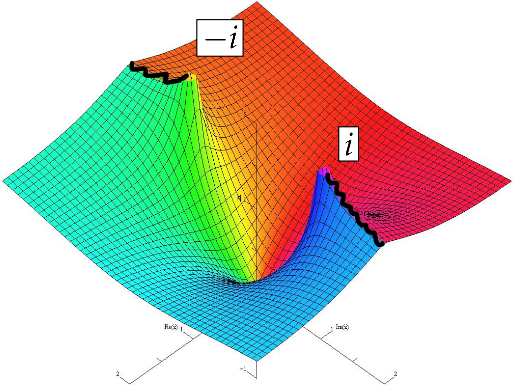
(29 min plus tard...)

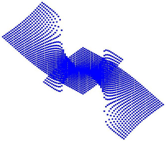
```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), 1/5, 1000000);
0.033253281257567506772459381920024394391065961347292863\
    1361178559307565437161078471985962090680571076277606\
    6599384479391829794197618862065053669108217914960590\
    3108048298855823993517550511176819489159174044677130\
    7473025189635972756153431009580734363927305651896233\
    9721759513884230988401642563243102957713043147210864\
    9548515476762402429734385158441412605623777191148968\
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
    9793325825997236646657321960250165021813974778115734\
    7832262865574719581820528242814824080037691356145556\
    2959879449123182803958425643066993236588095610171972\
    3380613024394057453999112187785110527075237813842272\
    7617685959250804078177163720506043190222743767328690\
    7129257409846695090670592759003049446015009928821012\
    868701569
```

Évaluation numérique

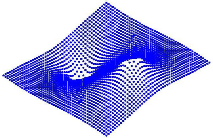
- générale
- automatique
- garantie
- asymptotiquement rapide


arctan(x)
1/2 π
−1/2 π
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
x

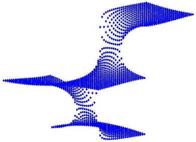




(Re)

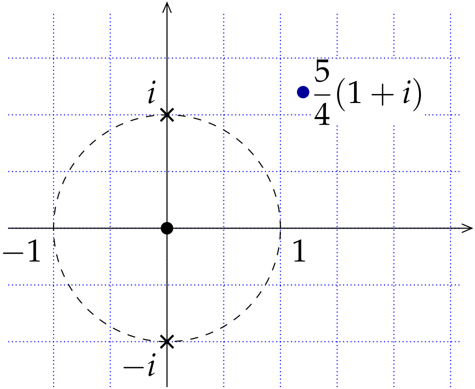


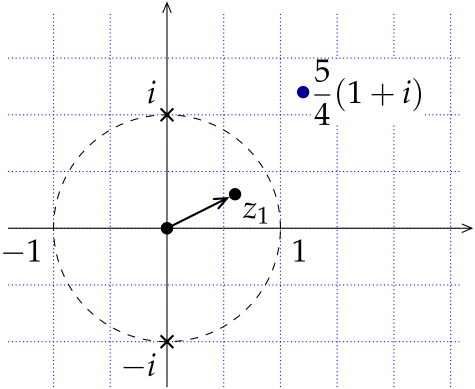
(Im)



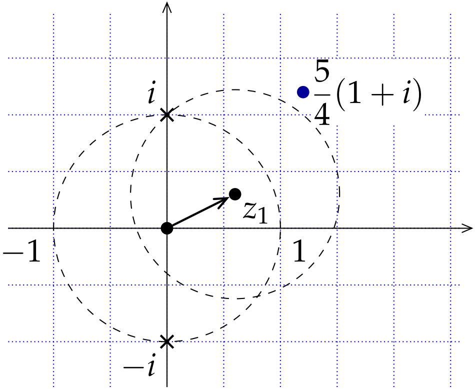
(arg)

$$(1+z^2)\,y''(z)+2z\,y'(z)=0,$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

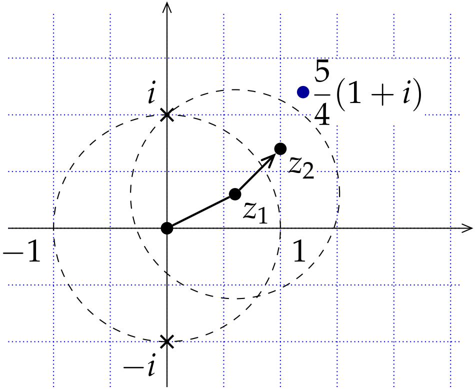

i
$\frac{5}{4}(1+i)$
-1
1
$-i$



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

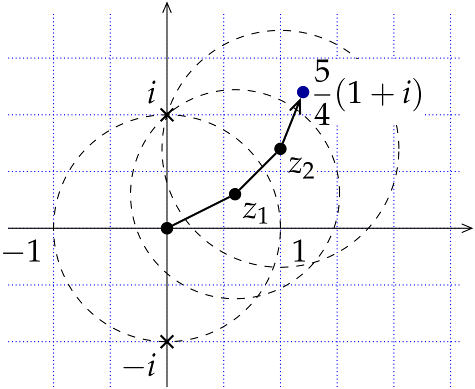


$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3656231471\cdots + 0,3290407483\ldots i \\ 0 & 0,7515011402\cdots - 0,0792619810\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3656231471\cdots + 0,3290407483\ldots i \\ 0 & 0,7515011402\cdots - 0,0792619810\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$

- Schroeppel (1972) – Points particuliers
- Brent (1976) – Fonctions particulières, points quelconques
- Chudnovsky & Chudnovsky (1986-1988) – Méthode générale, esquisse points singuliers réguliers
- van der Hoeven (1999, 2001) – Algorithme complet avec bornes

Théorème (Chudnovsky[2])

Soit y solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Soit z un point de la surface de Riemann de y.

On peut calculer $y(z)$ à 2^{-n} près en

$$O\Big(M\Big(n \cdot (\log n)^3\Big)\Big)$$

opérations binaires.

Théorème (Chudnovsky^2, van der Hoeven)

Soit y solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Soit z un point de la surface de Riemann de y.

On peut calculer $y(z)$ à 2^{-n} près en

$$O\Big(M\Big(n \cdot \cancel{(\log n)^3} (\log n)^2 \cdot \log\log n\Big)\Big)$$

opérations binaires.

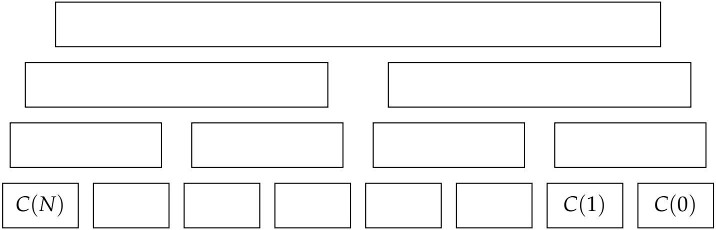
Théorème (Chudnovsky², van der Hoeven, M.)

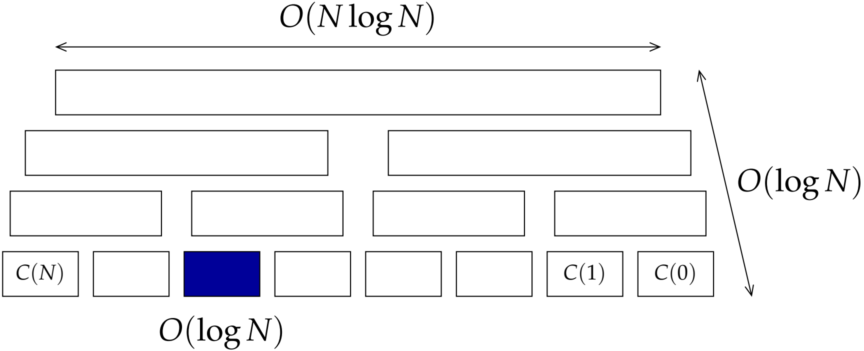
Soit y solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Soit z un point de la surface de Riemann de y.

On peut calculer $y(z)$ à 2^{-n} près en

$$O\Big(M\Big(n \cdot \cancel{(\log n)^3} (\log n)^2 \cdot \cancel{\log \log n}\Big)\Big)$$

opérations binaires.


$C(N)$
$C(1)$
$C(0)$



$O(N \log N)$
$O(\log N)$
$C(N)$
$C(1)$
$C(0)$
$O(\log N)$

$$\begin{aligned} z_0 = 10_2 &\to z_1 = 10,1_2 \\ &\to z_2 = 10,101_2 \\ &\to z_3 = 10,1011011_2 \\ &\to z_4 = 10,101101110010100_2 \\ &\to \ldots \\ &\to z \;\; = 10.101101110010100110000\ldots\ldots{}_2 \simeq e \end{aligned}$$

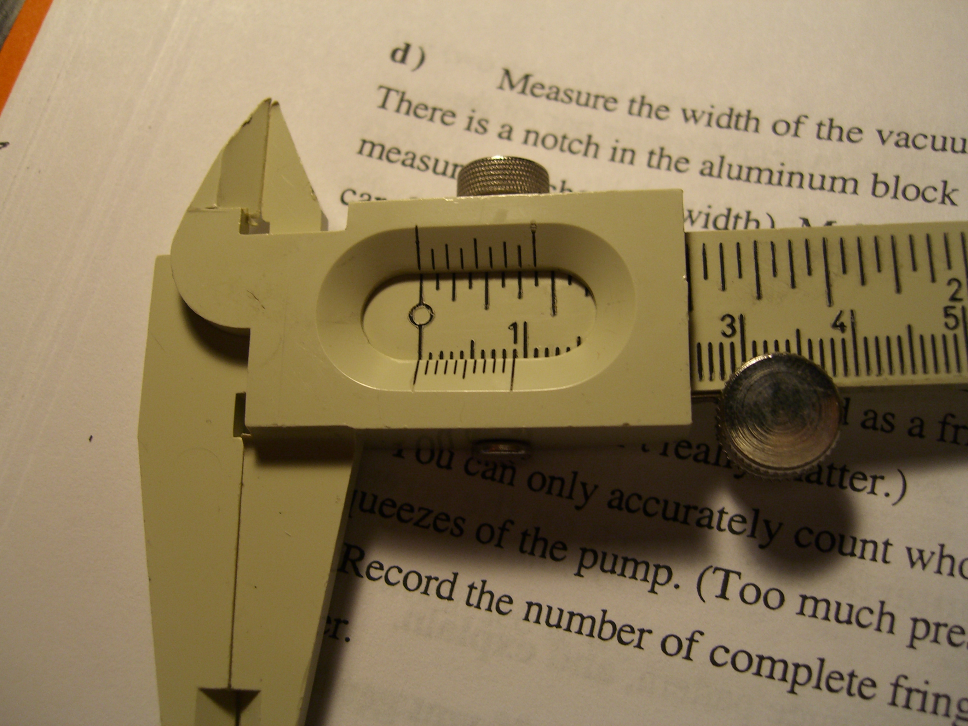
$$|z_{j+1} - z_j| \leqslant 2^{-2^j}$$

$$
\begin{aligned}
z_0 = 10_2 &\to z_1 = 10,1_2 \\
&\to z_2 = 10,101_2 \\
&\to z_3 = 10,1011011_2 \\
&\to z_4 = 10,101101110010100_2 \\
&\to \dots \\
&\to z \;\; = 10.1011011100101001100000\ldots\ldots{}_2 \simeq e
\end{aligned}
$$

$$\boxed{|z_{j+1} - z_j| \leqslant 2^{-2^j}}$$

$$\text{Pas } j \quad O\left(\mathrm{M}\left(\frac{n\,(h + \log n)}{\log(\rho / |\delta z|)} \log n \right) \right) \qquad \begin{cases} h = O(2^j) \\ |\delta z| \leqslant 2^{2^{-j}} \end{cases}$$

$$\text{Coût total} \quad O\left(\sum_{j=0}^{O(\log n)} \mathrm{M}\left(\frac{n\,(2^j + \log n)}{2^j} \log n \right) \right) = O(M(n \log^2 n))$$


d)
Measure the width of the
There is a notch in the aluminum block
as a
You can only accurately count
of the pump. (Too much
Record the number of complete
1
2
3
4
5

Paramètres

$\kappa, \alpha, \ldots \in \mathbb{Q}$ ou $\bar{\mathbb{Q}}$ t.q.

$$|y_n| \leqslant n!^{\kappa} \cdot \alpha^n \cdot \varphi(n)$$

Outils : méthode de Cauchy-Kovalevskaya + analyse asymptotique élémentaire
(M. & Salvy 2010)

Bornes symboliques

- Lisibles (presque !)
- Asymptotiquement fines

Bornes numériques

- Approx. sûres des paramètres
- Plus rapide (pas d'algébriques)

Idée: Replacer y par une fonction simple qui la "domine"

$$z^2\, y''(z) + z\, y'(z) + (z^2 - \nu^2)\, y(z)$$

0 point singulier

régulier

pour toute solution y,
$\exists N$ tq $y(z) = O(1/|z|^N)$
quand $z \to 0$

ex. : $y(z) = z^{\sqrt{2}}$, $y(z) = \dfrac{\log z}{z}$

irrégulier

croissance non-poly.
en $1/|z|$ possible
quand $z \to 0$

ex. : $y(z) = e^{1/z}$

Théorème (Fuchs, 1866)

Si 0 est un point singulier régulier d'une équation différentielle linéaire à coefficients analytiques, celle-ci admet pour un certain voisinage D de 0 une base de solutions de la forme

$$z^\lambda \big(y_0(z) + y_1(z) \log z + \cdots + y_t(z) \log^t z\big), \quad z \in D \setminus \{0\}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et les y_i sont analytiques sur D.

$$L\left(z, z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) \cdot y(z) = 0$$

$$y(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, z^n \qquad\qquad L(S_n^{-1}, n) \cdot (y_n) = 0$$

$$y(z) = \sum_{n\in\lambda+\mathbb{Z}} \sum_{n\geqslant 0}^{\text{(finie)}} y_n \, \frac{\log^k z}{k!} \, z^n \qquad\qquad L(S_n^{-1}, n + S_k) \cdot (y_{n,k}) = 0$$

NumGfun en bref

- Prolongement analytique numérique multiprécision
  général – garanti – automatique – rapide
- Bornes fines
  suites – séries majorantes – restes de séries

Code disponible

`http://algo.inria.fr/libraries/` (GNU LGPL)

Perspectives

- Points singuliers réguliers
- Applications : fonctions spéciales, dénombrement
- Aller (plus) vite
- Moins de dépendance à Maple

NumGfun en bref

- Prolongement analytique numérique multiprécision
  général – garanti – automatique – rapide
- Bornes fines
  suites – séries majorantes – restes de séries

Code disponible

`http://algo.inria.fr/libraries/` (GNU LGPL)

Perspectives

- Points singuliers réguliers
- Applications : fonctions spéciales, dénombrement
- Aller (plus) vite
- Moins de dépendance à Maple

Merci !

NumGfun en bref

- Prolongement analytique numérique multiprécision
  général – garanti – automatique – rapide
- Bornes fines
  suites – séries majorantes – restes de séries

Code disponible

`http://algo.inria.fr/libraries/` (GNU LGPL)

Perspectives

- Points singuliers réguliers
- Applications : fonctions spéciales, dénombrement
- Aller (plus) vite
- Moins de dépendance à Maple

Crédits

Source des photos :

- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Acer_saccharum_leaves.jpg (par Bruce Marlin, http://www.cirrusimage.com/tree_maple_sugar.htm, Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 Generic)
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyundai_Pony_MkII_Canada.jpg (par User:Jed118, domaine public)
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calipers_in_physics_lab.jpg (par User:Falcorian, Creative Commons Attribution-Share Alike)
- http://en.wikipedia.org/wiki/File:Meilenstein-hohen-neuendorf.jpg (image de Michael Maniezzo initialement reprise de http://flickr.com/photos/16493281@N00/338155332, Creative Commons Attribution 2.0 Generic)