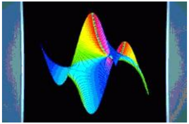
Comment calculer arctan z ?

Marc Mezzarobba

Projet Algorithms

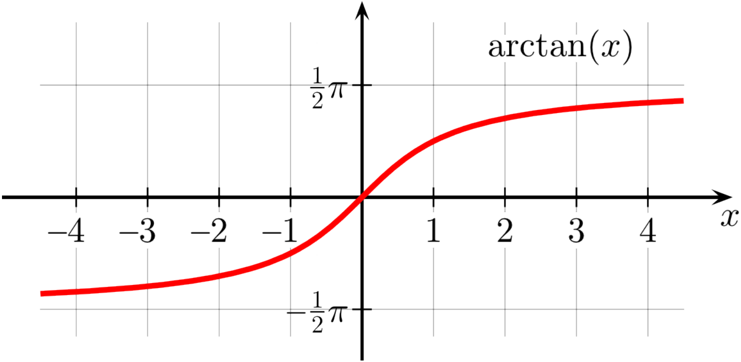


INRIA Paris Rocquencourt

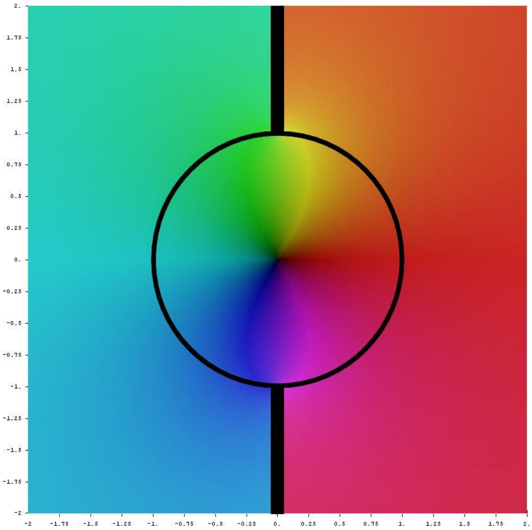
Séminaire des doctorants Cal4doc, 1er juillet 2009

$\arctan z$

arctan x

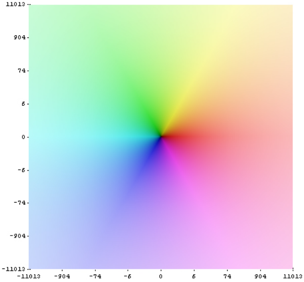


arctan z

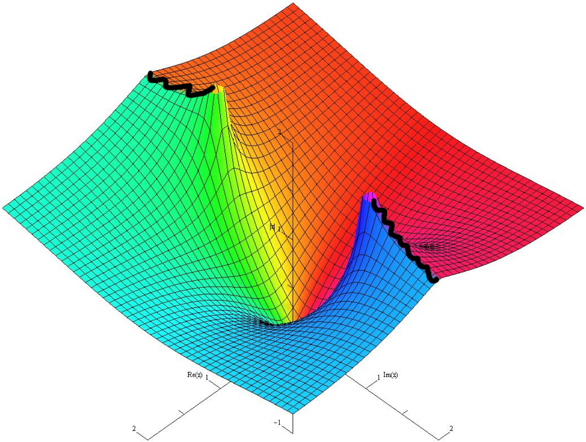


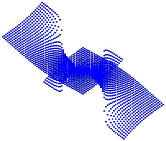
$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

$$(|z| \leqslant 1)$$

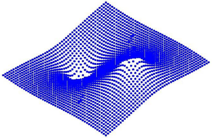


arctan z

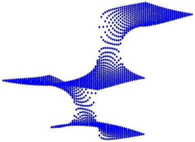




(Re)



(Im)



(arg)

Équation différentielle

- $\arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$
- $(1+z^2)\,\arctan'(z) = 1$
- $(1+z^2)\,\arctan''(z) + 2z\,\arctan'(z) = 0$

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y'(z) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Singularités : $\pm i$ Solutions : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1, \arctan)$

Équation différentielle

Théorème de Cauchy

Si $a_r(z_0) \neq 0$, les solutions analytiques (au voisinage de z_0) de

$$a_r(z)\, y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z)\, y'(z) + a_0(z)\, y(z) = 0$$

forment un espace vectoriel de dimension r.
De plus, leurs séries de Taylor en z_0 convergent (au moins) sur le disque centré en z_0 s'étendant jusqu'au zéro de a_r le plus proche.

$$(1 + z^2)\, y''(z) + 2z\, y'(z) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Singularités : $\pm i$ Solutions : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1, \arctan)$

Équation différentielle

- $\arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$
- $(1+z^2)\,\arctan'(z) = 1$
- $(1+z^2)\,\arctan''(z) + 2z\,\arctan'(z) = 0$

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y'(z) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Singularités : $\pm i$ Solutions : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1, \arctan)$

Fonctions D-finies / holonomes

Une fonction $y(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holonome (D-finie) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

$$a_r(z)\, y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z)\, y'(z) + a_0(z)\, y(z) = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}(i)[z].$$

- Clôture : les sommes, produits, dérivées, primitives, évaluation en des fonctions algébriques de fonctions analytiques holonomes sont holonomes.
- La suite des coefficients du développement de Taylor d'une fonction holonome satisfait une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

Slogan (d'après Stanley, Lipshitz, Zeilberger)

Équation différentielle + conditions initiales
$\hat{=}$ structure de données

Objectif

Calculer $\arctan z$ à grande précision 10^{-d},
en temps quasi-linéaire $d(\log d)^{O(1)}$ quand $d \to \infty$.

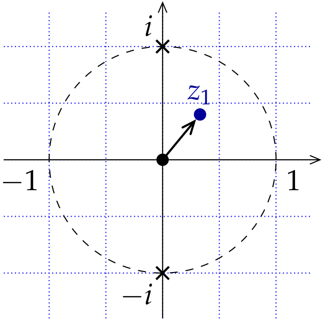
La méthode se généralise à toutes les fonctions holonomes.

- R.P. Brent. The complexity of multiple-precision arithmetic. 1976.
- D.V. and G.V. Chudnovsky. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. 1988.
- J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. 1999.
- J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2000.

$$\arctan\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)$$

Évaluation dans le disque de convergence

$$(1+z^2)\ \arctan''(z) + 2z\ \arctan'(z) = 0$$



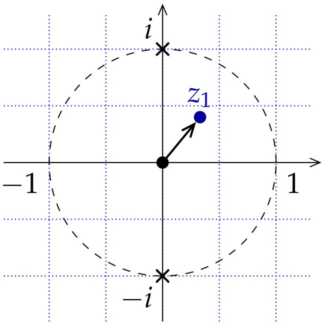
$$z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}i$$

$\arctan(z_1) \simeq$

$$\begin{aligned}
&0,37042084263061919165505632 33\\
&95196945630566376775381226460 0\\
&03773329505219448698162861696 4\\
&291728654799\\
+\ &0,37018663500339468278943893 39\\
&09957427057249524387424576173 7\\
&60660657815466430208737166913 0\\
&567614369234\ i
\end{aligned}$$

Évaluation dans le disque de convergence

$$(1+z^2)\ \arctan''(z) + 2z\ \arctan'(z) = 0$$



$$z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}i$$

Stratégie : sommer la série !

1. Trouver un ordre de troncature qui donne la précision voulue
2. Calculer (exactement) la somme partielle

Récurrences

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y'(z) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$$

- Récurrence sur les coefficients
  - $(1+z^2)\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)ny_nz^{n-2} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} ny_nz^{n-1} = 0$
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)y_{n+2}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)ny_nz^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} ny_nz^n = 0$
  - $(n+2)y_{n+2} + ny_n = 0$

Récurrences

$$(1+z^2)\,y''(z)+2z\,y'(z)=0, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$$

$$y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$$

- Récurrence sur les coefficients
  - $(n+2)y_{n+2}+ny_n=0$

Récurrences

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y'(z) = 0, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \qquad z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}i$$

- Récurrence sur les coefficients
  - $(n+2)y_{n+2} + n y_n = 0$
- Récurrence sur les termes
  - $(n+2)y_{n+2}z_1^{n+2} + z_1^2 n y_n z_1^n = 0$
  - $(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right) + \dfrac{-11+60i}{255}\, n\left(y_n z_1^n\right) = 0$
  - $255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right) + (-11+60i)\, n\left(y_n z_1^n\right) = 0$

Récurrences

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y'(z) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \qquad z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}i$$

- Récurrence sur les coefficients
  - $(n+2)y_{n+2} + ny_n = 0$
- Récurrence sur les termes
  - $255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right) + (-11+60i)\,n\left(y_n z_1^n\right) = 0$

Récurrences

$$(1+z^2)\,y''(z)+2z\,y'(z)=0, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$$

$$y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \qquad z_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n-1} y_n z_1^n$$

- Récurrence sur les coefficients
  - $(n+2)y_{n+2}+ny_n=0$
- Récurrence sur les termes
  - $255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right)+(-11+60i)\,n\left(y_n z_1^n\right)=0$
- Récurrence sur les sommes partielles
  - $S_{n+1}-S_n=y_n z^n$
  - $255(n+2)(S_{n+3}-S_{n+2})+(-11+60i)n(S_{n+1}-S_n)=0$

Récurrences

$$(1+z^2)\,y''(z)+2z\,y'(z)=0, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$$

$$y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \qquad z_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n-1} y_n z_1^n$$

- Récurrence sur les coefficients
  - $(n+2)y_{n+2}+ny_n=0$
- Récurrence sur les termes
  - $255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right)+(-11+60i)\,n\left(y_n z_1^n\right)=0$
- Récurrence sur les sommes partielles
  - $255(n+2)(S_{n+3}-S_{n+2})+(-11+60i)n(S_{n+1}-S_n)=0$

Calcul d'un terme

$$255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right) + (-11+60i)\, n\left(y_n z_1^n\right) = 0$$

$$z_1 = 1/3 + 2i/5 \qquad S_{n+1} - S_n = y_n z_1^n$$

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ y_{n+1}z_1^{n+1} \\ y_{n+2}z_1^{n+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{255(n+2)} \begin{bmatrix} 255(n+2) & 255(n+2) & 0 \\ 0 & 0 & 255(n+2) \\ 0 & (11-60i)n & 0 \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} S_n \\ y_n z_1^n \\ y_{n+1}z_1^{n+1} \end{bmatrix}$$

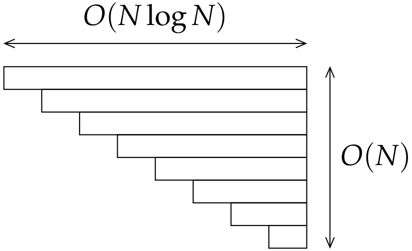
$$\begin{bmatrix} S_N \\ y_N z_1^N \\ y_{N+1}z_1^{N+1} \end{bmatrix} = \frac{A(N-1)\cdots A(1)\,A(0)}{\left[A(N-1)\cdots A(1)\,A(0)\right]_{1,1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{5}i \end{bmatrix}$$

Les matrices $A(n)$ sont de taille binaire $O(\log N)$.

Algorithme

Scindage binaire (*vs* méthode naïve)

$A(N-1)\cdots A(1)\cdot A(0)$

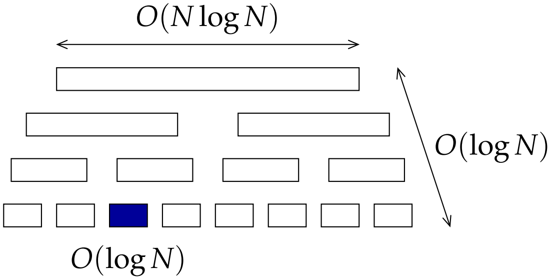


Produit naïf /
calcul itératif :
$\Omega(N^2\log N)$

Algorithme

Scindage binaire (*vs* méthode naïve)

$$A(N-1)\cdots A(1)\cdot A(0)$$
$$= \big(A(N-1)\cdots A(\lfloor \tfrac{N}{2} \rfloor + 1)\big)\cdot\big(A(\lfloor \tfrac{N}{2} \rfloor)\cdots A(0)\big)$$



$$
\begin{aligned}
& s^3\,\mathrm{M}(\tfrac{N}{2}\log N) \\
&+ 2\,s^3\,\mathrm{M}(\tfrac{N}{4}\log N) \\
&+ \cdots \\
&+ N\,s^3\,\mathrm{M}(\log N) \\
&= O\big(\mathrm{M}(N\log N)\log N\big)
\end{aligned}
$$

Combien de termes retenir ?

Ordre de grandeur

On cherche N tel que $\left|\arctan z_1 - \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n\right| \leqslant 10^{-d}$. On a

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} y_n z_1^n\right| \leqslant |z_1|^N \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |y_{N+n}||z_1|^n}_{O(1)}$$

donc $N \simeq \dfrac{d}{\log(1/|z_1|)} = O(d)$ convient. ($\Longrightarrow$ complexité)

Calculer un tel N ?

Séries majorantes

Une série $f \in \mathbb{C}[[z]]$ est majorée par $g \in \mathbb{R}_+[[z]]$
ssi $|f_n| \leqslant g_n$ pour tout n.

On note $f \trianglelefteq g$.

On va chercher une série majorante simple
pour la fonction à évaluer.

(Coefficients positifs $\implies$ plus facile à manipuler)

« Méthode de Cauchy-Kovalevskaya »

(Dans un cas trivial)

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y(z) = 0 \qquad y_0 = 0 \quad y_1 = 1$$

$$y''(z) = a(z)y'(z) \qquad\qquad a(z) = -\frac{2z}{1+z^2}$$

$$(n+1)(n+2)y_{n+2} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,(j+1)y_j$$

$$a(z) = \frac{i}{1-iz} + \frac{-i}{1+iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(i^n + i^{-n})}_{|\cdot|\leqslant 2} z^n \trianglelefteq \frac{2}{1-z}$$

« Méthode de Cauchy-Kovalevskaya »

(Dans un cas trivial)

$$(1+z^2)\,y''(z) + 2z\,y(z) = 0 \qquad y_0 = 0 \quad y_1 = 1$$

$$y''(z) = a(z)y'(z) \qquad\qquad a(z) = -\frac{2z}{1+z^2} \trianglelefteq \frac{2}{1-z}$$

$$(n+1)(n+2)y_{n+2} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,(j+1)y_j$$

« Méthode de Cauchy-Kovalevskaya »

(Dans un cas trivial)

$$(1+z^2)\,y''(z)+2z\,y(z)=0 \qquad y_0=0 \quad y_1=1$$

$$y''(z)=a(z)y'(z) \qquad\qquad a(z)=-\frac{2z}{1+z^2}\trianglelefteq\frac{2}{1-z}$$

$$(n+1)(n+2)y_{n+2}=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\,(j+1)y_j$$

$$(n+1)(n+2)g_{n+2}=\sum_{j=0}^{n}\;2\quad(j+1)g_j$$

$$g''(z)=\frac{2}{1-z}\,g'(z) \qquad \text{(équation majorante)}$$

$g(z)=\dfrac{1}{1-z}$ convient et satisfait $|y_0|\leqslant g_0$, $|y_1|\leqslant g_1$

Par récurrence $y(z)=\arctan z\trianglelefteq g(z)$

À partir de là...

Bornes

Par exemple :

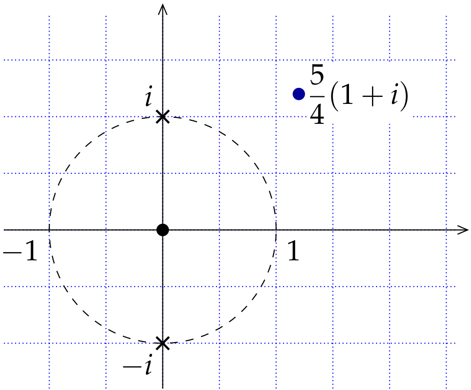
$$y(z) \trianglelefteq g(z) \quad \Longrightarrow \quad \Big|\sum_{n=N}^{\infty} y_n z^n\Big| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} g_n |z|^n$$

$$y(z) = \arctan z \qquad g(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \sum_{n=N}^{\infty} g_n z^n = \frac{z^N}{1-z}$$

$$\Big|\sum_{n=N}^{\infty} y_n z^z\Big| \leqslant \frac{|z|^N}{1-|z|}$$

$$\arctan \frac{5(1+i)}{4}$$

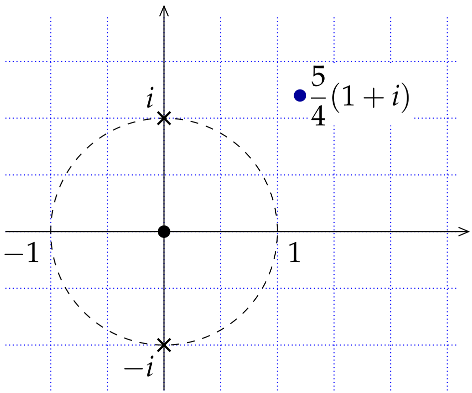
Évaluation en-dehors du disque de convergence



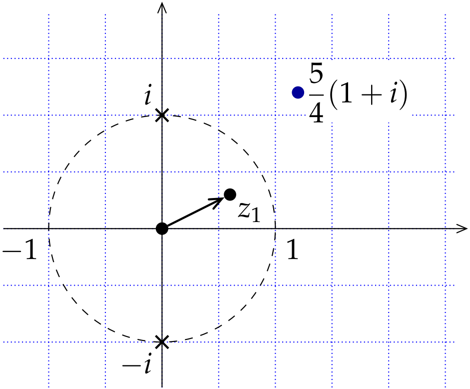
$$\arctan \frac{5(1+i)}{4} \simeq$$

$$\begin{aligned}
&1,13764519551855716794 \\
&44010162108738495410095 \\
&76887181519840494683 94 \\
&41248888148336247572 72 \\
&7861511350496 \\
+\ &0,35133563902264627452 \\
&27454243659347913886 77 \\
&45203775262165727098 98 \\
&38634991654769919783 77 \\
&1320261357935\, i
\end{aligned}$$

Prolongement analytique

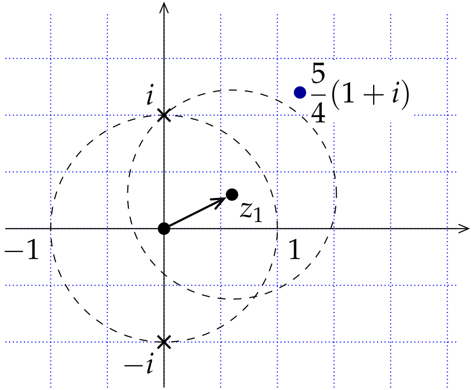


Prolongement analytique



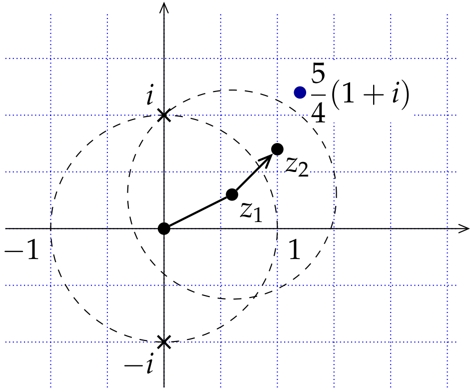
$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

Prolongement analytique



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

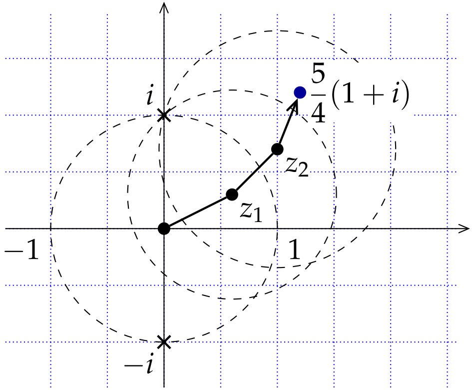
Prolongement analytique



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3656231471\cdots + 0,3290407483\ldots i \\ 0 & 0,7515011402\cdots - 0,0792619810\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$

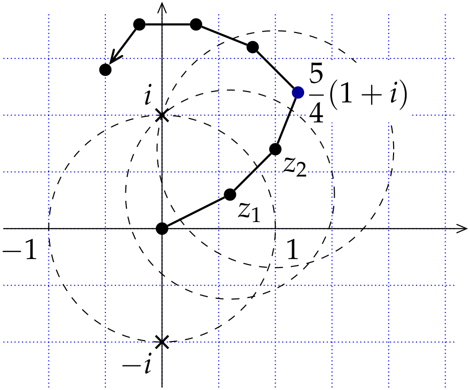
Prolongement analytique



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3656231471\cdots + 0,3290407483\ldots i \\ 0 & 0,7515011402\cdots - 0,0792619810\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$

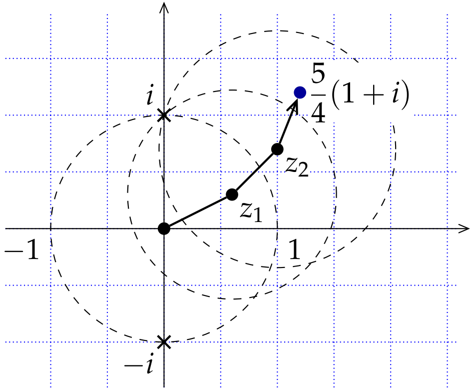
Prolongement analytique



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\dots + 0,2200896807\dots i \\ 0 & 0,7288378766\dots - 0,2065997130\dots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3656231471\dots + 0,3290407483\dots i \\ 0 & 0,7515011402\dots - 0,0792619810\dots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$

Prolongement analytique



$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5705170238\cdots + 0,2200896807\ldots i \\ 0 & 0,7288378766\cdots - 0,2065997130\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3656231471\cdots + 0,3290407483\ldots i \\ 0 & 0,7515011402\cdots - 0,0792619810\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$

Forme des matrices de passage

- Base de solutions en 0

$$\begin{aligned} u_{[0]}(z) &= 1 &&= 1 + 0 \cdot z + O(z^2) \\ v_{[0]}(z) &= \arctan z &&= 0 + 1 \cdot z + O(z^2) \end{aligned}$$

- Base de solutions en z_1

$$\begin{aligned} u_{[z_1]}(z) &= 1 + 0 \cdot (z - z_1) + O((z - z_1)^2) \\ v_{[z_1]}(z) &= 0 + 1 \cdot (z - z_1) + O((z - z_1)^2) \end{aligned}$$

- Matrices de passage

$$M_{0 \to z_1} = \begin{bmatrix} u_{[0]}(z_1) & v_{[0]}(z_1) \\ u'_{[0]}(z_1) & v'_{[0]}(z_1) \end{bmatrix} \qquad M_{z_1 \to z_2} = \begin{bmatrix} u_{[z_1]}(z_2) & v_{[z_1]}(z_2) \\ u'_{[z_1]}(z_2) & v'_{[z_1]}(z_2) \end{bmatrix}$$

Prolongement analytique effectif

$$M_{0\to z_1} = \begin{bmatrix} u_{[0]}(z_1) & v_{[0]}(z_1) \\ u'_{[0]}(z_1) & v'_{[0]}(z_1) \end{bmatrix} \qquad M_{z_1\to z_2} = \begin{bmatrix} u_{[z_1]}(z_2) & v_{[z_1]}(z_2) \\ u'_{[z_1]}(z_2) & v'_{[z_1]}(z_2) \end{bmatrix}$$

- Chaque ligne de chacune de ces matrices se calcule par évaluation dans le disque de convergence
  - Changement de variable $z \leftarrow z_1 + z$ dans l'éq. diff.
    $\to$ récurrence pour $u_{[z_1]}$, $v_{[z_1]}$
  - La dérivée d'une fonction D-finie est encore D-finie (il faut juste prolonger les conditions initiales)
- Composition des matrices de passage
  $\hat{=}$ prolongement analytique

$$M_{z_0\to z_1\to z_2\to z_3} = M_{z_2\to z_3} \cdot M_{z_1\to z_2} \cdot M_{z_0\to z_1}$$

$$\arctan e$$

Évaluation en un point de grande taille binaire

$$
\begin{aligned}
\arctan e \simeq \arctan(&2,718281828459045235360287471352662\\
&497757247093699959574966967627724\\
&07663035354759457138217852516642 7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\simeq\ &1,21828290501727762176046176891579794173 9\\
&1319494681565050496602629481782163007607 6\\
&3761969168155772131
\end{aligned}
$$

Pour calculer $\arctan(e)$ à 10^{-d} près, on calcule $\arctan(z)$ où $z \simeq e$ est un rationnel de taille $\Theta(d)$.

Problème : on a supposé $\mathrm{taille}(z) = O(1)$ quand $d \to \infty$ pour l'analyse de complexité.

Calcul d'un terme

$$255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right) + (-11+60i)\,n\left(y_n z_1^n\right) = 0$$

$$z_1 = 1/3 + 2i/5 \qquad S_{n+1} - S_n = y_n z_1^n$$

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ y_{n+1}z_1^{n+1} \\ y_{n+2}z_1^{n+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{255(n+2)}\begin{bmatrix} 255(n+2) & 255(n+2) & 0 \\ 0 & 0 & 255(n+2) \\ 0 & (11-60i)n & 0 \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} S_n \\ y_n z_1^n \\ y_{n+1}z_1^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_N \\ y_N z_1^N \\ y_{N+1}z_1^{N+1} \end{bmatrix} = \frac{A(N-1)\cdots A(1)\,A(0)}{\left[A(N-1)\cdots A(1)\,A(0)\right]_{1,1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{5}i \end{bmatrix}$$

Les matrices $A(n)$ sont de taille binaire $O(\log N)$.

Calcul d'un terme

$$255(n+2)\left(y_{n+2}z_1^{n+2}\right)+(-11+60i)\,n\left(y_n z_1^n\right)=0$$

$$z_1=1/3+2i/5 \qquad S_{n+1}-S_n=y_n z_1^n$$

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ y_{n+1}z_1^{n+1} \\ y_{n+2}z_1^{n+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{255(n+2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 255(n+2) & 255(n+2) & 0 \\ 0 & 0 & 255(n+2) \\ 0 & (11-60i)n & 0 \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} S_n \\ y_n z_1^n \\ y_{n+1}z_1^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_N \\ y_N z_1^N \\ y_{N+1}z_1^{N+1} \end{bmatrix} = \frac{A(N-1)\cdots A(1)\,A(0)}{\left[A(N-1)\cdots A(1)\,A(0)\right]_{1,1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{5}i \end{bmatrix}$$

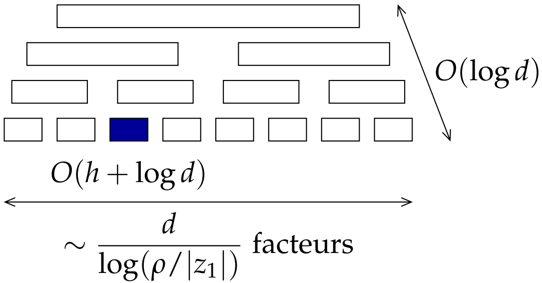
La récurrence dépend de z_1.

Les matrices $A(n)$ sont de taille binaire $O(\log N+\text{taille}(z_1))$.

[Ou plus généralement $O(\log N+\text{taille}(z_0)+\text{taille}(z_1))$.]

Retour sur le coût du scindage binaire

Dépendance en la taille de la récurrence



$$h = \mathrm{taille}(z_0) + \mathrm{taille}(z_1)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{d\,(h+\log d)}{\log(\rho/|z_1|)}\right)\log d = \begin{cases} O\big(\mathrm{M}(d\log^2 d)\big) & \text{si } h = O(\log d) \\ \Omega(d^2) & \text{si } h = d \end{cases}$$

Évaluation par « *bit burst* »

Prolongement analytique le long du chemin

$$\begin{aligned} z_0 = 10_2 &\to z_1 = 10,1_2 \\ &\to z_2 = 10,101_2 \\ &\to z_3 = 10,1011011_2 \\ &\to z_4 = 10,101101110010100_2 \\ &\to \ldots \\ &\to z \ = 10.101101110010100110000\ldots\ldots\ldots_2 \simeq e \end{aligned}$$

$$\boxed{|z_{j+1} - z_j| \leqslant 2^{-2^j}}$$

$$\text{Pas } j \quad O\Big(\mathrm{M}\Big(\frac{n\ (h + \log n)}{\log(\rho/|\delta z|)} \log n\Big)\Big) \qquad \begin{cases} h = O(2^j) \\ |\delta z| \leqslant 2^{2^{-j}} \end{cases}$$

$$\text{Coût total} \quad O\Big(\sum_{j=0}^{O(\log n)} \mathrm{M}\Big(\frac{n\ (2^j + \log n)}{2^j} \log n\Big)\Big) = O(M(n \log^2 n))$$

Résumé

Tout ce qui précède se généralise (presque toujours immédiatement) aux fonctions holonomes.

Multiplication rapide de grands entiers
+ Scindage binaire
+ *Bit burst*
+ Bornes
→ Algorithme d'évaluation des fonctions holonomes en n'importe quel point de leur surface de Riemann, quasi-linéaire en la précision

Résumé

Tout ce qui précède se généralise (presque toujours immédiatement) aux fonctions holonomes.

Multiplication rapide de grands entiers
\+ Scindage binaire
\+ *Bit burst*
\+ Bornes
→ Algorithme d'évaluation des fonctions holonomes en n'importe quel point de leur surface de Riemann, quasi-linéaire en la précision

Merci !

Facteur constant dans le modèle FFT (I)

« FFT caching », « FFT adding »

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{bmatrix} \arrow[d, "2s^2\ \mathrm{FFT}(2n)"] & = & \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) \\ C_{21}(z) & C_{22}(z) \end{bmatrix} \\
\begin{matrix}
\begin{bmatrix} A_{11}(1) & A_{12}(1) \\ A_{21}(1) & A_{22}(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11}(1) & B_{12}(1) \\ B_{21}(1) & B_{22}(1) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11}(\omega) & B_{12}(\omega) \\ B_{21}(\omega) & B_{22}(\omega) \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots \\
\begin{bmatrix} A_{11}(\omega^{n-1}) & A_{12}(\omega^{n-1}) \\ A_{21}(\omega^{n-1}) & A_{22}(\omega^{n-1}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11}(\omega^{n-1}) & B_{12}(\omega^{n-1}) \\ B_{21}(\omega^{n-1}) & B_{22}(\omega^{n-1}) \end{bmatrix}
\end{matrix} \arrow[rr, "s^3\ O(n)\ \mathrm{mul}"] & & \begin{matrix}
\begin{bmatrix} C_{11}(1) & C_{12}(1) \\ C_{21}(1) & C_{22}(1) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) \\ C_{21}(\omega) & C_{22}(\omega) \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} C_{11}(\omega^{n-1}) & C_{12}(\omega^{n-1}) \\ C_{21}(\omega^{n-1}) & C_{22}(\omega^{n-1}) \end{bmatrix}
\end{matrix} \arrow[u, "s^2\ \mathrm{FFT}^{-1}(2n)"']
\end{tikzcd}
$$

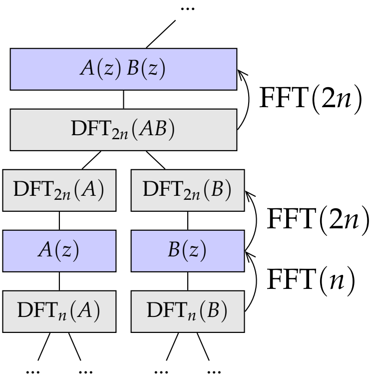
Polynômes sur un anneau avec assez de racines de l'unité :
$3s^2$ FFT contre $3s^3$ pour le produit naïf.

Facteur constant dans le modèle FFT (II)

- Gagner un facteur 2 sur l'analyse [Stehlé ?] :

$$\sum_{k=0}^{\log n} 2^k \left(\frac{n}{2^k} \log \frac{n}{2^k} \right) \sim \frac{1}{2} n \log^2 n$$

- « *FFT doubling* » [Kramer ?] : gain d'un facteur 3/2



Facteur constant dans le modèle FFT (II)

- Gagner un facteur 2 sur l'analyse [Stehlé ?] :

$$\sum_{k=0}^{\log n} 2^k \left(\frac{n}{2^k} \log \frac{n}{2^k}\right) \sim \frac{1}{2} n \log^2 n$$

- « *FFT doubling* » [Kramer ?] : gain d'un facteur 3/2

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT}_{2n}(P) &= \boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*} \\
\mathrm{DFT}_{n}(P) &= \boxed{*}\quad\boxed{*}\quad\boxed{*}\quad\boxed{*} \\
\mathrm{DFT}_{n}(\omega P) &= \quad\boxed{*}\quad\boxed{*}\quad\boxed{*}\quad\boxed{*}
\end{aligned}$$