

Bornes sur les suites et fonctions différentiellement finies et évaluation garantie

Marc Mezzarobba
travail en commun avec Bruno Salvy

Projet Algorithms, INRIA Rocquencourt

Colloque « Algorithmes pour les équations différentielles et aux
différences », Limoges, 10 et 11 mars 2008

Bornes



Motivation

► Permutations de Baxter

- $(n+2)(n+3)B_n = (7n^2 + 7n - 2)B_{n-1} + 8(n-1)(n-2)B_{n-2}$,
 $B_0 = B_1 = 1$
- $B_n \leq (n+8)^8 8^n$

$$\text{► } t_k = \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 640320^{3k}}$$

$$\text{► } \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \frac{1}{\pi} \quad (\text{Chudnovsky}^2 \text{ 1989})$$

$$\text{► } \left| \frac{640320^{3/2}}{12\pi} - \sum_{k=0}^{n-1} t_k \right| \leq (0,1n^4 + 0,5n^3 + 1,5n^2 + 2,1n + 1)\alpha^n$$

$$\text{où } \alpha = \frac{1}{151931373056000} \simeq 0,66 \cdot 10^{-14}$$

Comportement asymptotique des récurrences

$$y_{n+s} + a_{s-1}(n) y_{n+s-1} + \cdots + a_1(n) y_{n+1} + a_0(n) y_n = 0$$



▶ bien définie

▶ $a_k(n) \rightarrow a_k^\infty$

▶ réversible

quand $n \rightarrow \infty$

$$y_{n+s} + a_{s-1}^\infty y_{n+s-1} + \cdots + a_1^\infty y_{n+1} + a_0^\infty y_n = 0$$

▶ polynôme caractéristique

$$X^s + a_{s-1}^\infty X^{s-1} + \cdots + a_0^\infty$$

Théorème (Poincaré-Perron)

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les racines du polynôme caractéristique.

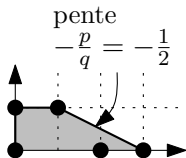
1. La récurrence ci-dessus admet une base de solutions $y^{[k]}$ telles que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n^{[k]}|^{1/n} = \alpha_k$.
2. Si ces racines sont de modules deux à deux distincts, on a même $y_{n+1}^{[k]} / y_n^{[k]} \rightarrow \alpha_k$.

Comportement asymptotique des récurrences II

Polygone de Newton

$$p_s(n) y_{n+s} + p_{s-1}(n) y_{n+s-1} + \cdots + p_1(n) y_{n+1} + p_0(n) y_n = 0$$

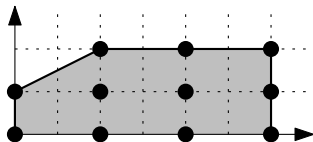
- $|p_k(n)/p_s(n)| \rightarrow \infty$ pour un k
ou tous les $p_k(n)/p_s(n) \rightarrow 0$



$$y_{n+3} + y_{n+2} + ny_{n+1} + (n+1)y_n = 0$$

$$u_n = \psi_n y_n$$

$$(n+q)^p \psi_{n+q} = \psi_n$$



$$(n+6)(n+4)u_{n+6} + 2(n+4)(n+1)u_{n+4} - (n^2 - n - 5)u_{n+2} - (n+1)u_n = 0$$

Conclusion : $y_n \simeq n!^{p/q} \alpha^n$

Objectif

Bornes « fines »

Entrée

Réurrence + conditions initiales

$$\{p_s(n) y_{n+s} + \dots + p_0(n) y_n = 0, \quad y_0 = \dots\}$$

Sortie

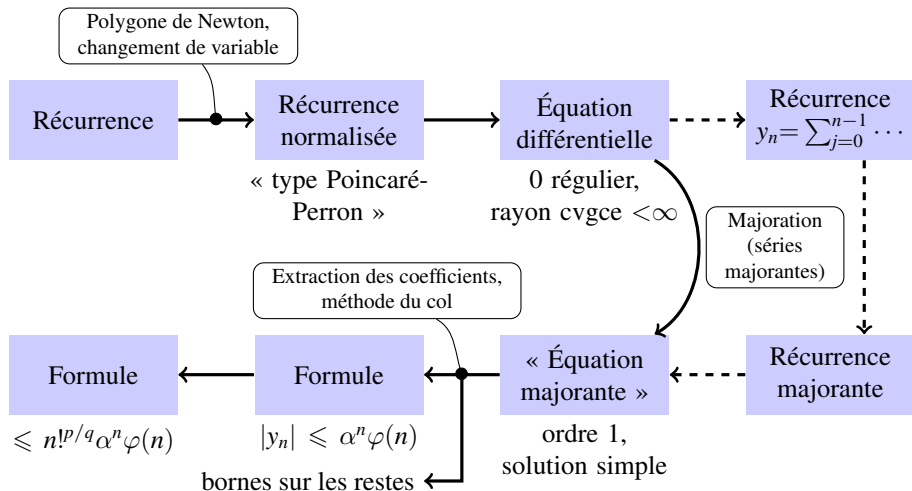
$$|y_n| \leq n!^{p/q} \alpha^n \varphi(n)$$

avec φ sous-exponentielle, i.e. $\varphi(n) = e^{o(n)}$

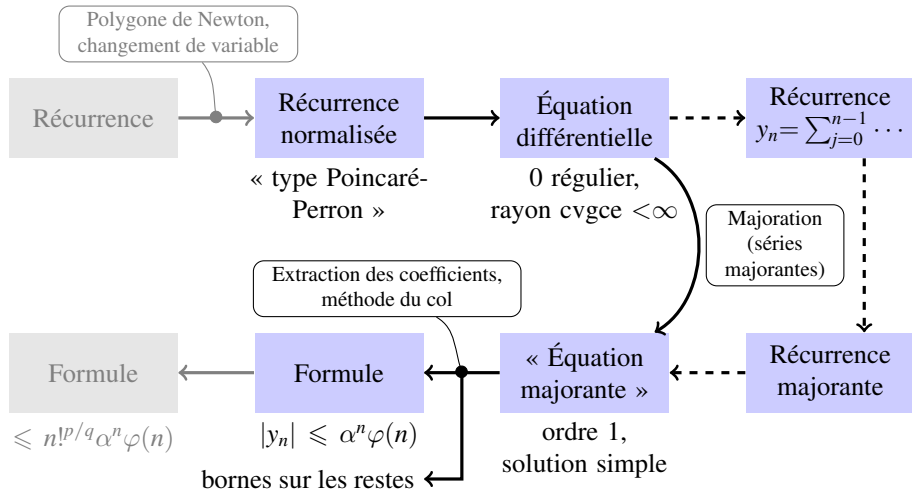
- ▶ borne correcte
- ▶ pour des conditions initiales génériques :
 p/q et α optimaux,
 $\varphi(n) = n^{O(1)}$ lorsque c'est possible

On se laisse guider par le comportement asymptotique.

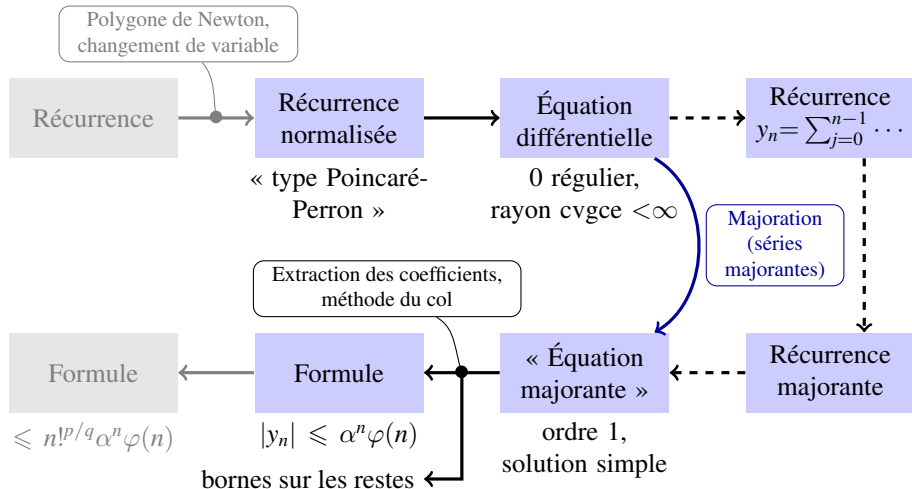
Démarche



Démarche



Démarche



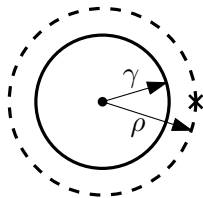
Préserver : le rayon de convergence, la nature de la singularité dominante

Séries majorantes

Méthode de Cauchy-Kovelevskaïa : échauffement

$$y'(z) = a(z)y(z) \quad a(z) \text{ analytique pour } |z| < \rho$$

- ▶ $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^n a_j y_{n-j}$
- ▶ Soit M tel que $\forall j, |a_j| \leq M/\gamma^j$, considérons $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^n M\gamma^{-j}g_{n-j}$
- ▶ on a alors $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1}g(z)$
donc $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$
- ▶ Par récurrence $|y_0| \leq g_0 \implies \forall n, |y_n| \leq g_n$
- ▶ or $g(z)$ est analytique pour $|z| \leq \gamma \rightarrow \rho$. \square



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2001.



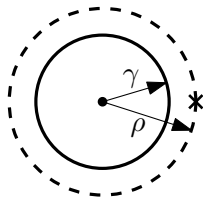
J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.

Séries majorantes

Méthode de Cauchy-Kovelevskaïa : échauffement

$$y'(z) = a(z)y(z) \quad a(z) \text{ analytique pour } |z| < \rho$$

- ▶ $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^n a_j y_{n-j}$
- ▶ Soit M tel que $\forall j, |a_j| \leq M/\gamma^j$, considérons $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^n M\gamma^{-j}g_{n-j}$
- ▶ on a alors $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1}g(z)$
donc $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$
- ▶ Par récurrence $|y_0| \leq g_0 \implies \forall n, |y_n| \leq g_n$
- ▶ or $g(z)$ est analytique pour $|z| \leq \gamma (\rightarrow \rho)$. \square



Difficultés

- ▶ On veut $\gamma = \rho$
- ▶ 0 singulier rég.



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2001.



J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.

Équation différentielle majorante

$$z^r y^{(r)} - c_{r-1} z^{r-1} y^{(r-1)} - \dots - c_0 y \\ = z^r a^{[r-1]}(z) y^{(r-1)} + z^{r-1} a^{[r-2]}(z) y^{(r-2)} + \dots + z a^{[0]}(z) y$$

$$q(n) y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_{n-1-j}^{[k]} j^k y_j$$

$$|a_n^{[k]}| \leq [z^n] \frac{M_k}{(1 - \alpha z)^{r-k+T}} \\ (T = \text{irrégularité})$$

$$g_n = \frac{K}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} g_j$$

$$g'(z) = \frac{\alpha K}{(1 - \alpha z)^{1+T}} g(z)$$

Équation différentielle majorante

$$z^r y^{(r)} - c_{r-1} z^{r-1} y^{(r-1)} - \dots - c_0 y \\ = z^r a^{[r-1]}(z) y^{(r-1)} + z^{r-1} a^{[r-2]}(z) y^{(r-2)} + \dots + z a^{[0]}(z) y$$

$$q(n) y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_{n-1-j}^{[k]} j^k y_j$$

$$|a_n^{[k]}| \leq [z^n] \frac{M_k}{(1 - \alpha z)^{r-k+T}} \\ (T = \text{irrégularité})$$

Pour n assez grand :

$$|y_n| \leq \frac{1}{|q(n)|} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{r-1} M_k \binom{(n-1-j)+(r-k+T-1)}{r-k+T-1} j^k \right) \alpha^{n-1-j} |y_j|$$

$$\leq \underbrace{\frac{Mn^{r-1}}{|q(n)|}}_{\leq K/n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} |y_j|$$

$$q(n) = n^r + \dots$$

$$g_n = \frac{K}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} g_j$$

$$g'(z) = \frac{\alpha K}{(1 - \alpha z)^{1+T}} g(z)$$

Séries majorantes « fines »

Équation majorante : $g'(z) = \frac{\alpha K}{(1 - \alpha z)^{1+T}} g(z)$

$$\boxed{T = 0} \quad g(z) = \frac{A}{(1 - \alpha z)^K}$$

$$|y_n| \leq g_n = A \binom{n + K - 1}{K - 1} \alpha^n$$

$$\boxed{T > 0} \quad g(z) = A \exp \frac{K/T}{(1 - \alpha z)^T}$$

$$|y_n| \leq g_n \leq A \exp (C n^{T/(T+1)}) \alpha^n \quad \text{pour } n \geq N$$

(méthode du col)

Bonus : bornes sur les restes, sur les dérivées

Évaluation numérique

Évaluation à grande précision des fonctions holonomes

Lien avec les bornes

- ▶ Pour évaluer $y(z_1)$ à $\varepsilon = 2^{-d}$ (donné par l'utilisateur) près
 1. Calculer $N = O(d)$ tel que $\left| y(z_1) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (partie I)
 2. Calculer $\sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n$
- ▶ Grande précision : $d \rightarrow \infty$
- ▶ Borne « fine » sur les y_n
 - ▶ seulement $o(d)$ chiffres superflus (sinon : $O(d)$)
 - ▶ série majorante indépendante de z_1

Grande précision

Algorithmes, implémentations

Grande précision : complexité en fonction du nombre de chiffres

« La stratégie précédente (sommer la série) est efficace »

Algorithmes

- ▶ Généraux (toutes les fonctions holonomes)
- ▶ Quasi-linéaires : complexité $d(\log d)^{O(1)}$ pour d chiffres
- ▶ Simples & efficaces en pratique
- ▶ Utilisés... dans des cas particuliers !

On va voir des exemples de ce qui est possible.



D.V. and G.V. Chudnovsky. Computer algebra in the service of mathematical physics and number theory. 1990.

NumGfun

- ▶ Module Maple pour la manipulation symbolique-numérique des suites et fonctions holonomes
 - ▶ Évaluation numérique garantie
 - ▶ Bornes
 - ▶ ...
- ▶ Version 0.1 disponible (expérimental !) — version 0.2 prochainement
- ▶ intégration de certaines parties à **gfun** en cours



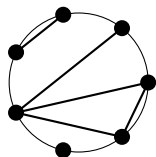
Bruno Salvy and Paul Zimmermann, Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable, 1994.



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. 1999.

Scindage binaire pour les suites (I)

Nombres de Motzkin



$$(n + 3) M_{n+2} = 3n M_n + (2n + 3) M_{n+1},$$

$$M_0 = 0, M_1 = M_2 = 1$$

$$M_{1\,000\,000} = 87836485521410228205552857212867952$$

$$60648460114018772686310027332206011651992742068$$

$$95017531901406553089345501470120232183076893776$$

$$76219223691237769669136651142176793088580998640$$

$$24791593930900669539159753966399354360360024084$$

$$835778 \dots 6784078518570776088261222699220919525$$

$$44768602806558705745804408930594940932105099980$$

$$80763012645020992166911388664219549747372475451$$

$$13677895449716717989937706488976239581832306432$$

$$74956942565741376149791829585290393680786291940$$

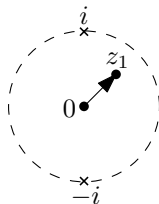
0, 1, 1, 2, 4,
9, 21, 51,
127, 323,
835, 2188,
5798, 15511,
41835,
113634,
310572, ...

(477 112 chiffres)

Fonctions élémentaires, fonctions spéciales

$$(1 + z^2) \arctan''(z) + 2z \arctan'(z) = 0$$

$\arctan \frac{3(1+i)}{5} \simeq 0,670782196758950644190815337$
 4705632571369265547562721682009119775363456
 2788546268206648547182112134208947460355580
 1433079787592299964529081793221227836458496
 7241027751816658681028242709786087804231203
 5059588657436137542728611075919334091735855
 + 0,4313775209217135982596553539683059915248
 7122502784763704416333662458132714904677846
 9188664848592351371193308077157250027646988
 5281752378714171283456698686337133570545945
 8746821430812351884522098343403327937148536
 338890142864171080500321 i

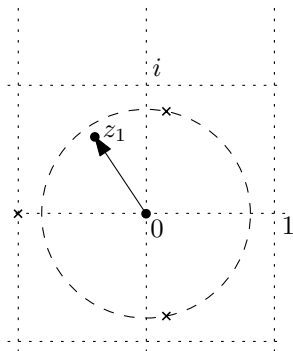


Fonctions holonomes générales

$$(z + 1)(3z^2 - z + 2)y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' + (z + 1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = i, y''(0) = 0$$

$$y(z_1) \simeq -0,5688220713892109968232887489539 \\ 40401816728372266594043883320346219592758 \\ 12320494797058201136707120728488174753296 \\ 40179618640233165335353913821228176742066 \\ 38746845195076195216482627052648481989147 \\ -0,41951120825888216814674495005568322636 \\ 04890369475390958159560577151580169021584 \\ 69436992399704818660023662419290957376458 \\ 10730416775833847769588392648233263560262 \\ 18036663454753771692569046113725631 i$$



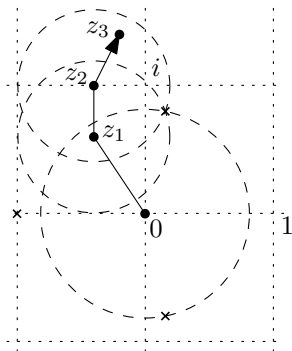
$$z_1 = \frac{-2 + 3i}{5}$$

Prolongement analytique numérique

$$(z + 1)(3z^2 - z + 2)y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' + (z + 1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = i, y''(0) = 0$$

$$y(z_3) \simeq -1,5598481440603221187326507993405 \\ 93389341334664487959500453706337545990130 \\ 23595723610120655516690697098992400952293 \\ 02516117147544713452845642644966476254288 \\ 76662237635657163415131886063430803161039 \\ - 0.71077649435126718436732868786933143977 \\ 59047479618104045777076954591551406949345 \\ 14336874295533356649869509377592841606239 \\ 84373919434109735084282549387411069877437 \\ 70372320294299156084733705293726504 i$$



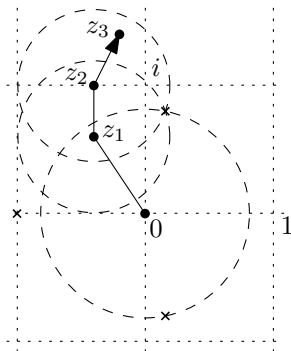
$$z_3 = \frac{-1 + 7i}{5}$$

Prolongement analytique : connexion entre points réguliers

$$(z+1)(3z^2 - z + 2)y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' + (z+1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$\begin{bmatrix} y(z_3) \\ y'(z_3) \\ y''(z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,229919181 & -0,710776494 & -1,680450593 \\ +1,222484838i & +1,559848144i & +0,8612944465i \\ 2,192415163 & 1,428307159 & 1,683681888 \\ -0,982260350i & +1,237636972i & +1,443224767i \\ -0,810105380 & 0,949416034 & -0,309094585 \\ -0,813018670i & -0,368995278i & -0,032241130i \end{bmatrix}$$



$$z_3 = \frac{-1 + 7i}{5}$$

Points de grande taille

Évaluation par *bit burst*

$\text{erf}(\pi) \simeq 0.9999911238536323583947316207812029447123820815$
1287659904758639164678439426196498460278504541782613310
0604326482152030660441196387585407489394338729142916313
2555230902334047429212609807578643285046857228864728035
3074866062036004350772927038034048195719630178507694248
4951063443190106356178078634699387973616755577593078576
7867193730580658008654893571733600902958925087790354763
1634821321290934135517729080384812555377261445353232562
6651433607961144658060331385205962860463925296434774976
4667106060908609383010103929356543447438130957966770981
9560099884058213492947592606412648383713291083934904913
3976893748259243076371780227275937091363807381587573107

(Implémentation des bornes incomplète dans ce cas)

Résumé

1. Bornes respectant l'ordre de croissance exponentiel pour les suites holonomes / Séries majorantes respectant le rayon de convergence pour leurs séries génératrices
2. Code pour le prolongement analytique numérique garanti à grande précision

Problèmes connexes

- ▶ description plus directe de la technique de majoration
- ▶ bornes plus fines, plus générales
- ▶ interaction avec d'autres procédés, encadrements
- ▶ implémentation *vraiment* efficace du scindage binaire
- ▶ facteur constant, dépendance en la fonction...

Résumé

1. Bornes respectant l'ordre de croissance exponentiel pour les suites holonomes / Séries majorantes respectant le rayon de convergence pour leurs séries génératrices
2. Code pour le prolongement analytique numérique garanti à grande précision

Problèmes connexes

- ▶ description plus directe de la technique de majoration
- ▶ bornes plus fines, plus générales
- ▶ interaction avec d'autres procédés, encadrements
- ▶ implémentation *vraiment* efficace du scindage binaire
- ▶ facteur constant, dépendance en la fonction...

Merci !