MESURES DE BOHR–JESSEN

L'objectif de ce devoir est d'étudier la distribution des valeurs de la fonction ζ de Riemann le long d'une droite verticale $\{\sigma + \mathrm{i}t,\ t \in \mathbb{R}\}$ avec $\sigma > \frac{1}{2}$. En particulier, en admettant uniquement la propriété classique de la fonction ζ donnée par les équations (3)-(4), on donne une preuve élémentaire d'un théorème limite dû à Bohr et Jessen (1932). Le devoir utilise beaucoup la notion de convergence en loi, et aussi une notion nouvelle de convergence en mesure relative.

Préliminaires. Si s est un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(s) > 1$, on rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie en ce point par la série absolument convergente :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{1}$$

où $n^s = \exp(s \log n)$. La fonction ζ est holomorphe sur le domaine $D_1 = \{s \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$, et elle se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$; au voisinage de 1, $\zeta(s) \simeq \frac{1}{s-1}$. Sur le domaine D_1, $\zeta(s)$ est donnée par le produit d'Euler infini

$$\zeta(s) = \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{(p_N)^s}}, \tag{2}$$

où p_N désigne le N-ième nombre premier (par exemple, $p_4 = 7$). Notons que les deux expressions (1) et (2) ne sont valables que sur le domaine D_1 ; en dehors de ce domaine, la fonction ζ est bien définie par prolongement analytique, mais la série de l'équation (1) ou le produit infini de l'équation (2) ne convergent pas.

Q1. Rappeler pourquoi on a l'identité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1}{1-(p_N)^{-s}}$ pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Dans tout ce qui suit, si s est un nombre complexe, on conviendra de l'écrire sous la forme $s = \sigma + \mathrm{i}t$, avec $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ et $t = \mathrm{Im}(s)$. D'autre part, si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$, on notera $\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_1\sigma + \xi_2 t)}\, \mu(ds)$ sa transformée de Fourier, qui est une fonction de deux variables réelles ξ_1 et ξ_2. On admet que la transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ d'une mesure de probabilité μ sur le plan complexe caractérise entièrement μ (c'est l'extension à $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ de l'injectivité de la transformée de Fourier). D'autre part, si M est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, on rappelle qu'on a l'inégalité :

$$M\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]\right) \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \left|1 - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, M(dx)\right| dy.$$

Q2. Si $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{C}$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) La suite de mesures $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{C}$.

(b) La suite de fonctions $(\widehat{\mu}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément (*i.e.*, uniformément sur tout compact) vers une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.

Date: à rendre pour le 10 novembre 2017.

Montrer que dans ce cas, $\widehat{\mu} = f$. On pourra utiliser des critères de relative compacité dans $\mathscr{M}^1(\mathbb{C})$ et dans les espaces de fonctions continues $\mathscr{C}(K, \mathbb{C})$ avec K partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

Distributions asymptotiques. Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable d'une variable réelle. On note U_T la variable aléatoire de distribution uniforme sur le segment $[-T, T]$. On dit que la fonction x admet une distribution asymptotique si la famille de variables aléatoires $(x(U_T))_{T \geq 0}$ admet une limite en loi lorsque T tend vers l'infini. On note dans ce cas ρ_x la loi limite de ces variables aléatoires, et on dit que ρ_x est la distribution asymptotique de x.

Q3. Montrer que x admet une distribution asymptotique si et seulement si, localement uniformément sur $\mathbb{R}^2$, la fonction de $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$M_x(\xi, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_1 \operatorname{Re}(x(t)) + \xi_2 \operatorname{Im}(x(t)))}\, dt$$

admet une limite $M_x(\xi)$ lorsque T tend vers l'infini. Dans ce cas, quel est le lien entre la fonction $M_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ et la distribution asymptotique ρ_x ?

Q4. Soit $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs complexes. On suppose que chaque x_N admet une distribution asymptotique ρ_{x_N}, et que la suite $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge en mesure relative vers une fonction mesurable $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \left(\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1_{|x(t) - x_N(t)| \geq \varepsilon}\, dt \right) = 0.$$

Montrer que dans ce cas, x admet une distribution asymptotique ρ_x, et de plus, la suite de mesures de probabilités $(\rho_{x_N})_{N \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers ρ_x :

$$\rho_{x_N} \rightharpoonup_{N \to \infty} \rho_x.$$

Q5. Soit $s > 0$ et $P(t)$ un polynôme s-trigonométrique, c'est-à-dire une fonction qui s'écrit sous la forme $P(t) = \sum_{k=-K}^{K} a_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kst}$, les a_k étant des coefficients complexes. Si $\xi \in \mathbb{R}^2$ et

$$\mathrm{i}(\xi_1 \operatorname{Re}(P(t)) + \xi_2 \operatorname{Im}(P(t))) = \sum_{k=-K}^{K} b_k(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kst},$$

calculer $b_k(\xi)$ en fonction de ξ et des coefficients a_k. En développant la série $\exp(\sum_{k=-K}^{K} b_k(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kst})$, exprimer en fonction des coefficients $b_k(\xi)$ la limite $M_P(\xi)$. En déduire que P admet une distribution asymptotique ρ_P, et que cette distribution asymptotique est l'image de la distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$ par l'application

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=-K}^{K} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \in \mathbb{C}.$$

Q6. Un paramètre $s > 0$ étant fixé, on dira qu'une fonction complexe $t \mapsto x(t)$ est presque-s trigonométrique s'il existe une suite de polynômes s-trigonométriques $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |P_N(t) - x(t)| = 0.$$

Montrer que dans ce cas, x admet une distribution asymptotique ρ_x.

Q7. On fixe un nombre premier p et un réel strictement positif $\sigma > 0$. On pose

$$y_{p,\sigma}(t) = -\log(1 - p^{-(\sigma+\mathrm{i}t)}).$$

Dans cette expression, le logarithme complexe est défini par la série entière convergente $-\log(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r}$. Montrer que $y_{p,\sigma}$ admet une distribution asymptotique $\rho_{y_{p,\sigma}}$, et que $\rho_{y_{p,\sigma}}$ est l'image de la distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$ par l'application $\theta \mapsto -\log(1 - p^{-\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Périodes indépendantes et convolution de distributions asymptotiques. On dit que les nombres réels positifs $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont des périodes indépendantes si, étant donnés des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$,

$$\big(k_1 s_1 + k_2 s_2 + \cdots + k_n s_n = 0\big) \Rightarrow \big(k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\big).$$

Q8. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les n premiers nombres premiers, montrer que les nombres $\log p_1, \log p_2, \ldots, \log p_n$ forment une famille de périodes indépendantes.

Q9. Soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des périodes indépendantes. Pour chaque indice i, on se donne P_i polynôme s_i-trigonométrique :

$$P_i(t) = \sum_{k_i=-K_i}^{K_i} a_{k,i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i s_i t}.$$

Montrer que $P(t) = P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_n(t)$ admet une distribution asymptotique ρ_P, et que cette distribution est la convolée (loi de la somme de variables indépendantes)

$$\rho_P = \rho_{P_1} * \rho_{P_2} * \cdots * \rho_{P_n}.$$

On pourra introduire les coefficients $b_{k,i}(\xi)$ tels que $\mathrm{i}(\xi_1 \operatorname{Re}(P_i(t)) + \xi_2 \operatorname{Im}(P_i(t))) = \sum_{k_i=-K_i}^{K_i} b_{k,i}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i s_i t}$, et exprimer en fonction de ces coefficients la limite $M_P(\xi)$.

Q10. Montrer que le résultat précédent reste vrai si l'on considère une somme $x(t) = y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_n(t)$ telle que chaque y_i est presque s_i-trigonométrique, et telle que les s_i forment une famille de périodes indépendantes. En déduire que pour tout $N \geq 1$ et tout $\sigma > 0$, la fonction

$$x_N(t) = -\sum_{i=1}^{N} \log(1 - (p_i)^{-(\sigma+\mathrm{i}t)})$$

admet une distribution asymptotique ρ_{x_N}. Exprimer cette distribution asymptotique comme image de la mesure uniforme sur le tore $[0, 2\pi]^N$.

Convergence en mesure relative des produits d'Euler. Dans tout ce qui suit, un paramètre $\sigma > \frac{1}{2}$ est fixé, et on note $x_N(t) = -\sum_{i=1}^{N} \log(1 - (p_i)^{-(\sigma+\mathrm{i}t)})$, et ρ_{x_N} la distribution asymptotique de cette fonction. On pose aussi

$$x(t) = \log(\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)).$$

Le logarithme de la fonction ζ est bien défini pour σ assez grand : en effet, $\lim_{\sigma\to\infty} \zeta(s) = 1$, et on peut alors prendre le développement en série du logarithme au voisinage de 1. La fonction $\log \zeta(s)$ est ensuite prolongée analytiquement à l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{s \mid \zeta(s) = 0\}$ (on conjecture que l'ensemble des zéros de ζ est réduit aux entiers négatifs $-2, -4, \ldots$ et à un ensemble discret inclus dans la droite $\{\frac{1}{2} + \mathrm{i}t,\ t \in \mathbb{R}\}$).

Q11. Supposons d'abord $\sigma > 1$. En utilisant l'équation (2), montrer que x admet une distribution limite ρ_x, avec $\rho_x = \lim_{N\to\infty} \rho_{x_N}$.

On suppose maintenant $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$, et on va montrer que $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en mesure relative vers x. L'outil clef est une identité vérifiée par la fonction ζ de Riemann.

Q12. Soit $\sigma > 1$. Montrer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \, dt = \zeta(2\sigma). \tag{3}$$

Dans ce qui suit, on admet la généralisation suivante de l'équation (3), qui est un résultat classique dû notamment à Carlson : étant donnée une série de Dirichlet $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ dans la liste suivante

$$\zeta(s) \qquad ; \qquad \zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{N} (1 - (p_i)^{-s}) \qquad ; \qquad (\zeta_N(s) - 1),$$

pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}. \tag{4}$$

Q13. On fixe $N \geq 1$. Si $L(s) = \zeta_N(s) - 1$, montrer que les coefficients a_n de cette série de Dirichlet vérifie :

$$a_n = 0 \text{ si } n < p_{N+1} \qquad ; \qquad |a_n| \leq 1 \text{ si } n \geq p_{N+1}.$$

On pourra utiliser l'équation (2), et le fait que la connaissance de L sur le domaine D_1 détermine entièrement ses coefficients a_n. En déduire que la suite de fonctions $(f_N(t) = \zeta_N(t) - 1)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en mesure relative vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Montrer aussi que la suite de fonctions $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en mesure relative vers la fonction $x(t) = \log(\zeta(\sigma + \mathrm{i}t))$.

Mesures de Bohr–Jessen et représentation probabiliste.

Q14. Soit $\sigma > \frac{1}{2}$. Montrer que la fonction $x(t) = \log(\zeta(\sigma + \mathrm{i}t))$ admet une distribution asymptotique, qu'on notera BJ_σ. C'est la distribution de Bohr–Jessen de paramètre σ. Montrer que le support de BJ_σ est borné si $\sigma > 1$.

Q15. Soit $\sigma > \frac{1}{2}$, $(Z_N)_{N\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distributées sur le cercle unité. On pose $X_N = -\log(1 - (p_N)^{-\sigma} Z_N)$. Utiliser un théorème classique pour montrer que la série aléatoire $\sum_{N=1}^{\infty} X_N$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, puis montrer que X a loi BJ_σ. On obtient ainsi une représentation probabiliste de la fonction ζ sur une droite verticale $\{\sigma + \mathrm{i}t,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Si $\sigma = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires $\log(\zeta(\frac{1}{2} + U_T))$ n'ont plus de distribution limite lorsque T tend vers l'infini, mais on retrouve une distribution limite en renormalisant par la variance. Ainsi, on peut montrer que

$$\frac{\log(\zeta(\frac{1}{2} + U_T))}{\sqrt{\frac{1}{2} \log\log T}} \rightharpoonup \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, I_2) \quad \text{(gaussienne complexe);}$$

c'est le théorème central limite de Selberg.

Corrigé.

Q1. Si $N_0 \geq 1$, alors on peut développer le produit

$$\prod_{N=1}^{N_0} \frac{1}{1-(p_N)^{-s}} = \prod_{N=1}^{N_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((p_N)^k)^s}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{N_0}} \frac{1}{n^s},$$

la série du terme de droite portant sur l'ensemble $\mathbb{N}_{N_0}$ des entiers positifs dont la décomposition en facteurs premiers est

$$n = (p_1)^{k_1}(p_2)^{k_2}\cdots(p_{N_0})^{k_{N_0}}.$$

Lorsque N_0 tend vers l'infini, la limite de cette série est la somme sur tous les entiers $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, qui est convergente car $\mathrm{Re}(s) > 1$ (critère de Riemann). D'autre part, toujours lorsque N_0 tend vers l'infini, la limite du produit à gauche de l'identité est le produit infini $\prod_{N=1}^{\infty} \frac{1}{1-(p_N)^{-s}}$. Ce produit est convergent, car le terme général de la série $\sum_{N=1}^{\infty} \log(\frac{1}{1-(p_N)^{-s}})$ est équivalent à $\frac{1}{(p_N)^s} \leq \frac{1}{N^s}$, et cette série est donc convergente de nouveau par le critère de Riemann. Par identification des deux limites,

$$\prod_{N=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{(p_N)^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Q2. Supposons d'abord que $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers μ. En particulier, les transformées de Fourier $\widehat{\mu}_N$ convergent ponctuellement vers $\widehat{\mu}$. Dans la suite, on fixe une partie compacte $K \subset \mathbb{R}^2$. Si l'on montre que $(\widehat{\mu}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une partie relativement compacte de $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$, alors ceci impliquera que $\widehat{\mu}$ est la limite dans $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$ de la suite $(\widehat{\mu}_N)_{N\in\mathbb{N}}$. On aura alors démontré la convergence localement uniforme de la suite des transformées de Fourier $(\widehat{\mu}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ vers $\widehat{\mu}$.

Posons $\omega(f,\delta) = \sup\{|f(\xi)-f(\zeta)| \mid \xi,\zeta \in K,\ d(\xi,\zeta) \leq \delta\}$. Par le critère d'Arzelá-Ascoli, il suffit de montrer que $\lim_{\delta\to 0}(\sup_{N\in\mathbb{N}} \omega(\widehat{\mu}_N,\delta)) = 0$ (on sait déjà que les transformées de Fourier des mesures de probabilité μ_N sont uniformément bornées par 1). Comme $\mu_N \rightharpoonup \mu$, cette suite est tendue et il existe un compact $L \subset \mathbb{C}$ tel que $\sup_{N\in\mathbb{N}} \mu_N(\mathbb{C}\setminus L) \leq \delta$. Si ξ et ζ sont deux paramètres dans K avec $d(\xi,\zeta) \leq \delta$, alors

$$\begin{aligned}
|\mu_N(\xi)-\mu_N(\zeta)| &\leq \int_{\mathbb{C}} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_1\mathrm{Re}(z)+\xi_2\mathrm{Im}(z))} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\zeta_1\mathrm{Re}(z)+\zeta_2\mathrm{Im}(z))}\right| \mu_N(dz)\\
&\leq 2\mu_N(\mathbb{C}\setminus L) + \int_L \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_1\mathrm{Re}(z)+\xi_2\mathrm{Im}(z))} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\zeta_1\mathrm{Re}(z)+\zeta_2\mathrm{Im}(z))}\right| \mu_N(dz)\\
&\leq 2\delta + |\xi-\zeta| \left(\sup_{z\in L}|z|\right) \leq \left(2+\sup_{z\in L}|z|\right)\delta
\end{aligned}$$

puisque la fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est lipschitzienne de constante 1. On a donc bien $\lim_{\delta\to 0}(\sup_{N\in\mathbb{N}} \omega(\widehat{\mu}_N,\delta)) = 0$, et l'implication directe est démontrée.

Pour la réciproque, si $(\widehat{\mu}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers une fonction continue f, montrons que $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite tendue de mesures de probabilité sur $\mathbb{C}$. Ceci impliquera l'existence de sous-suites de $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ qui convergent en loi, et toute sous-suite de ce type aura pour transformée de Fourier la fonction f. Comme la transformée de Fourier détermine la loi, on aura donc unicité de la limite, et ceci impliquera bien la convergence en loi de la suite $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ vers une mesure de probabilité μ dont la transformée de Fourier est $\widehat{\mu} = f$.

Fixons $\varepsilon > 0$. L'inégalité proposée permet d'évaluer la μ_N-probabilité du complémentaire du carré $[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}]^2$. Notant $\mu_{N,1}$ et $\mu_{N,2}$ les deux marginales de μ_N, on a

$$\begin{aligned}
\mu_N\left(\mathbb{R}^2 \setminus \left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]^2\right) &\leq \mu_{N,1}\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]\right) + \mu_{N,2}\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]\right) \\
&\leq \frac{1}{\delta}\left(\int_{-\delta}^{\delta} |1 - \widehat{\mu}_{N,1}(y)| + |1 - \widehat{\mu}_{N,2}(y)|\, dy\right) \\
&\leq \frac{1}{\delta}\left(\int_{-\delta}^{\delta} |1 - \widehat{\mu}_N(y,0)| + |1 - \widehat{\mu}_N(0,y)|\, dy\right).
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{\mu}_N \to f$ localement uniformément, cette suite de fonctions est relativement compacte dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{C})$ pour tout compact K, et elle est en particulier équicontinue en 0. Ainsi, pour δ assez petit, $|1 - \widehat{\mu}_N(y,0)|$ et $|1 - \widehat{\mu}_N(0,y)|$ sont plus petits que ε pour tout $y \in [-\delta, \delta]$ et pour tout N. Par conséquent,

$$\mu_N\left(\mathbb{R}^2 \setminus \left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]^2\right) \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} 2\varepsilon\, dy \leq 4\varepsilon$$

pour tout N. La tension de la suite de mesures $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est donc démontrée, ce qui achève la preuve de la réciproque.

Q3. L'expression $M_x(\xi, T)$ est la transformée de Fourier de la variable $x(U_T)$, donc, d'après la question précédente, la famille $(x(U_T))_{T\geq 0}$ admet une loi limite ρ_x si et seulement si $M_x(\xi, T)$ admet une limite $M_x(\xi)$ localement uniformément. D'après la question précédente, on a dans ce cas

$$M_x(\xi) = \widehat{\rho_x}(\xi).$$

Q4. Fixons un compact $K \subset \mathbb{R}^2$, et montrons que la famille de fonctions

$$(\xi \in K \mapsto M_x(\xi, T))_{T\geq 0}$$

est uniformément de Cauchy lorsque T tend vers l'infini. On fixe $\varepsilon > 0$, et N suffisamment grand tel que :

$$\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1_{|x(t)-x_N(t)|\geq\varepsilon}\, dt\right) \leq \varepsilon.$$

Pour T_0 assez grand et tout $T \geq T_0$, la moyenne ci-dessus est plus petite que 2ε. On peut alors écrire, pour tous $T_1, T_2 \geq T_0$ et tout $\xi \in K$:

$$\begin{aligned}
&|M_x(\xi, T_1) - M_x(\xi, T_2)| \\
&\leq |M_{x_N}(\xi, T_1) - M_{x_N}(\xi, T_2)| + |M_{x_N}(\xi, T_1) - M_x(\xi, T_1)| + |M_{x_N}(\xi, T_2) - M_x(\xi, T_2)|.
\end{aligned}$$

Comme x_N admet une distribution limite, quitte à augmenter la valeur de T_0, on peut supposer $|M_{x_N}(\xi, T_1) - M_{x_N}(\xi, T_2)| \leq \varepsilon$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
|M_{x_N}(\xi, T_1) - M_x(\xi, T_1)| &\leq \frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1} |e^{i\xi\cdot x_N(t)} - e^{i\xi\cdot x(t)}|\, dt \\
&\leq \frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1} |e^{i\xi\cdot x_N(t)} - e^{i\xi\cdot x(t)}|\, 1_{|x(t)-x_N(t)|\leq\varepsilon}\, dt + 4\varepsilon \\
&\leq \left(\sup_{\xi\in K} |\xi| + 4\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

en utilisant le caractère lipschitzien de $\theta \mapsto e^{i\theta}$. La même inégalité est valable avec T_2 à la place de T_1, donc, pour tous $T_1, T_2 \geq T_0$ et tout $\xi \in K$,

$$|M_x(\xi, T_1) - M_x(\xi, T_2)| \leq C(K)\,\varepsilon.$$

On en déduit la convergence localement uniforme de $(M_x(\xi, T))_{T\geq 0}$, et ainsi la convergence en loi de $(x(U_T))_{T\geq 0}$ vers une loi asymptotique ρ_x. De plus, si $\xi \in K$, alors d'après ce qui précède,

$$|\widehat{\rho}_x(\xi) - \widehat{\rho}_{x_N}(\xi)| = \lim_{T\to\infty} |M_x(\xi, T) - M_{x_N}(\xi, T)| \leq \left(\sup_{\xi\in K} |\xi| + 4\right) \varepsilon.$$

Ceci implique que $(\widehat{\rho}_{x_N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers $\widehat{\rho}_x$, et donc la convergence en loi $\rho_{x_N} \rightharpoonup_{N\to+\infty} \rho_x$.

Q5. Si $P(t) = \sum_{k=-K}^{K} a_k\, e^{iks t}$, alors

$$i(\xi_1 \operatorname{Re}(P(t)) + \xi_2 \operatorname{Im}(P(t))) = \sum_{k=-K}^{K} \left(\frac{i\xi_1}{2} (a_k + \overline{a_{-k}})\, e^{ikst} + \frac{\xi_2}{2} (a_k - \overline{a_{-k}})\, e^{ikst} \right),$$

donc $b_k(\xi) = \frac{i\xi_1}{2}(a_k + \overline{a_{-k}}) + \frac{\xi_2}{2}(a_k - \overline{a_{-k}})$. Évaluons maintenant $M_P(\xi, T)$. On a

$$\begin{aligned} M_P(\xi, T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{\sum_{k=-K}^{K} b_k(\xi)\, e^{ikst}}\, dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_r \in [\![-K, K]\!]} b_{k_1}(\xi) \cdots b_{k_r}(\xi)\, e^{i(k_1+k_2+\cdots+k_r)st} \right) dt. \end{aligned}$$

La série $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r\in[\![-K,K]\!]} b_{k_1}(\xi) \cdots b_{k_r}(\xi)$ est absolument convergente, et chaque intégrale $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(k_1+k_2+\cdots+k_r)st}\, dt$ est bornée par 1 pour tout T, et égale à

$$\operatorname{sinc}((k_1 + k_2 + \cdots + k_r)sT) = \frac{\sin((k_1 + k_2 + \cdots + k_r)sT)}{(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)sT}.$$

Lorsque T tend vers l'infini, la limite de cette intégrale est égale à 0, sauf si $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0$ (dans ce cas la limite est égale à 1). On en déduit que

$$\lim_{T\to\infty} M_P(\xi, T) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r\in[\![-K,K]\!]} 1_{k_1+\cdots+k_r=0}\, b_{k_1}(\xi) \cdots b_{k_r}(\xi).$$

Compte tenu de l'expression de $b_k(\xi)$, il n'est pas difficile de voir que la limite $M_P(\xi) = \lim_{T\to\infty} M_P(\xi, T)$ est localement uniforme en ξ. Ainsi, P admet une distribution limite ρ_P. Sa transformée de Fourier est bien celle de l'image par $f : \theta \mapsto \sum_{k=-K}^{K} a_k\, e^{ik\theta}$ de la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \exp(i(\xi_1 \operatorname{Re}(f(\theta)) + \xi_2 \operatorname{Im}(f(\theta))))\, \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \exp\left(\sum_{k=-K}^{K} b_k(\xi)\, e^{ik\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r\in[\![-K,K]\!]} b_{k_1}(\xi) \cdots b_{k_r}(\xi)\, e^{i(k_1+k_2+\cdots+k_r)\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r\in[\![-K,K]\!]} 1_{k_1+\cdots+k_r=0}\, b_{k_1}(\xi) \cdots b_{k_r}(\xi) = M_P(\xi). \end{aligned}$$

On a donc identifié la loi limite ρ_P.

Q6. D'après la question Q4, il suffit de montrer que x est la limite en mesure relative des fonctions P_N, qui admettent des distributions limites. Or, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1_{|x(t)-P_N(t)|\geq\varepsilon}\,dt \leq \frac{1}{2T\varepsilon}\int_{-T}^{T}|x(t)-P_N(t)|\,dt \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)-P_N(t)|\right),$$

donc

$$\lim_{N\to\infty}\left(\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1_{|x(t)-P_N(t)|\geq\varepsilon}\,dt\right) \leq \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)-P_N(t)|\right)\right) = 0.$$

Q7. La fonction $y_{p,\sigma}$ est presque $(\log p)$-trigonométrique : c'est la limite uniforme des polynômes $(\log p)$-trigonométriques

$$P_N(t) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k\,p^{\sigma k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\log p)t},$$

puisque $\sup_{t\in\mathbb{R}}|y_{p,\sigma}(t) - P_N(t)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k\,p^{\sigma k}} \to_{N\to\infty} 0$. D'après la question précédente, $y_{p,\sigma}$ admet donc une distribution asymptotique, et d'après la question Q4, $\rho_{y_{p,\sigma}}$ est la limite des lois ρ_{P_N}. D'après la question Q5, ces lois sont les images par les fonctions $\theta \mapsto \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k\,p^{\sigma k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$ de la loi uniforme sur $[0,2\pi]$, donc, par passage à la limite, $\rho_{y_{p,\sigma}}$ est l'image de la loi uniforme sur $[0,2\pi]$ par l'application

$$\theta \mapsto -\log(1 - p^{-\sigma}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

En effet, si $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions complexes continues sur un compact (ici, $K = [0,2\pi]$) qui convergent uniformément vers une fonction f, alors il n'est pas difficile de voir que ceci implique la convergence des lois images $(f_N)_*\mu \rightharpoonup f_*\mu$ pour toute loi μ sur K.

Q8. Si $k_1,\ldots,k_n$ sont des entiers relatifs et $p_1,\ldots,p_n$ sont les n plus petits nombres premiers, on a

$$k_1\log p_1 + k_2\log p_2 + \cdots + k_n\log p_n = \log\left((p_1)^{k_1}(p_2)^{k_2}\cdots(p_n)^{k_n}\right).$$

Le terme de droite est le logarithme d'un nombre rationnel $x\in\mathbb{Q}$, et par unicité de la factorisation en nombre premiers, un tel nombre rationnel vaut 1 si et seulement si tous les exposants k_i sont nuls. Par conséquent, les périodes $\log p_1,\ldots,\log p_n$ sont indépendantes.

Q9. Un paramètre ξ étant fixé, on estime $M_P(\xi,T)$:

$$\begin{aligned}
M_P(\xi,T) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k_i=-K_i}^{K_i} b_{k,i}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i s_i t}}\,dt\\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{r_1,\ldots,r_n=0}^{\infty}\frac{1}{(r_1)!\cdots(r_n)!}\sum_{k_{1,1},\ldots,k_{n,r_n}}\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{r_i} b_{k_{i,j},i}(\xi)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}k_{i,j}s_i)t}\,dt;
\end{aligned}$$

$$M_P(\xi) = \sum_{r_1,\ldots,r_n=0}^{\infty}\frac{1}{(r_1)!\cdots(r_n)!}\sum_{k_{1,1},\ldots,k_{n,r_n}}\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{r_i} b_{k_{i,j},i}(\xi)\right)1_{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}k_{i,j}s_i=0}.$$

Par indépendance des périodes $s_1, \ldots, s_n$, la fonction indicatrice se factorise en $\prod_{i=1}^n 1_{\sum_{j=1}^{r_i} k_{i,j}=0}$, et on peut ensuite factoriser $M_P(\xi)$:

$$M_P(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{r_i=0}^{\infty} \frac{1}{(r_i)!} \left(\sum_{k_{i,1},\ldots,k_{i,r_i}} 1_{\sum_{j=1}^{r_i} k_{i,j}=0} \prod_{j=1}^{r_i} b_{k_{i,j},i}(\xi) \right) \right) = \prod_{i=1}^{n} M_{P_i}(\xi).$$

On a donc établi l'existence de la limite $M_P(\xi)$, et de plus, c'est le produit des fonctions $M_{P_i}(\xi)$. En interprétant ces fonctions comme les transformées de Fourier de lois asymptotiques, on conclut que P admet une distribution asymptotique, et que

$$\rho_P = \rho_{P_1} * \rho_{P_2} * \cdots * \rho_{P_n},$$

puisque le produit ponctuel de transformées de Fourier correspond à la convolution des mesures de probabilité.

Q10. Supposons que $x(t) = y_1(t) + \cdots + y_n(t)$, chaque y_i étant la limite uniforme de polynômes (s_i)-trigonométriques $P_{i,N}(t)$, avec des périodes s_i indépendantes. On peut alors écrire $x(t)$ comme la limite uniforme des fonctions $P_N(t) = P_{1,N}(t) + \cdots + P_{n,N}(t)$ lorsque N tend vers l'infini. D'après la question précédente, chaque P_N admet une distribution limite $\rho_{P_N} = \rho_{P_{1,N}} * \rho_{P_{2,N}} * \cdots * \rho_{P_{n,N}}$, et d'après la question Q6, x admet donc la distribution limite

$$\rho_x = \lim_{N\to\infty} \left(\rho_{P_{1,N}} * \rho_{P_{2,N}} * \cdots * \rho_{P_{n,N}}\right).$$

On sait que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux familles de variables aléatoires indépendantes telles que $X_n \rightharpoonup X$ et $Y_n \rightharpoonup Y$, alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y). En particulier, en composant avec l'application somme, ceci implique que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$, et en termes de lois, ceci veut dire que l'application de convolution

$$* : \mathscr{M}^1(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}^1(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}^1(\mathbb{C})$$

est continue vis-à-vis de la topologie de la convergence en loi. Par conséquent,

$$\rho_x = \left(\lim_{N\to\infty} \rho_{P_{1,N}}\right) * \left(\lim_{N\to\infty} \rho_{P_{2,N}}\right) * \cdots * \left(\lim_{N\to\infty} \rho_{P_{n,N}}\right) = \rho_{y_1} * \rho_{y_2} * \cdots * \rho_{y_n}.$$

En appliquant ce résultat aux fonctions $y_{p_1,\sigma}, \ldots, y_{p_N,\sigma}$, on en déduit (avec les questions Q7 et Q8) que la fonction

$$x_N(t) = -\sum_{i=1}^{N} \log(1 - (p_i)^{-(\sigma+\mathrm{i}t)})$$

admet une distribution asymptotique, puisque chacun des termes de la somme est une fonction presque $(\log p_i)$-trigonométrique, et puisque les périodes $\log p_i$ sont indépendantes. La distribution asymptotique de x_N est l'image de la loi uniforme sur $[0, 2\pi]^N$ par l'application

$$(\theta_1, \ldots, \theta_N) \mapsto -\sum_{i=1}^{N} \log(1 - (p_i)^{-(\sigma)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}).$$

Q11. Il n'est pas difficile de voir que la norme infinie de la fonction $y_{p,\sigma}$ est $-\log(1-p^{-\sigma})$ pour tout couple $(p, \sigma > 0)$. Si $\sigma > 1$, alors la fonction $x(t) = \log \zeta(\sigma + it)$ est la limite uniforme des fonctions $x_N(t)$, puisque

$$|x(t) - x_N(t)| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} - \log(1 - (p_i)^{-\sigma}) \to_{N\to\infty} 0.$$

Par le même argument que dans la question Q6, et d'après la question précédente, on en déduit que x admet une distribution asymptotique, qui est la limite de celles des fonctions x_N.

Q12. Pour $\sigma > 1$, on peut développer en série la fonction ζ de Riemann, et ainsi écrire

$$|\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^\sigma} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\log \frac{m}{n})t},$$

cette série étant uniformément convergente sur la droite réelle. On peut ensuite intégrer cette série et échanger les symboles $\sum$ et $\int$:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \, dt = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^\sigma} \operatorname{sinc}\left(T \log \frac{m}{n}\right).$$

Lorsque T tend vers l'infini, la limite du terme indexé par n et m est 0 si $n \neq m$, et $\frac{1}{n^{2\sigma}}$ si $n = m$. On peut échanger somme et limite car $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^\sigma}$ est convergente. Ainsi,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma).$$

Q13. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, le produit infini $\zeta_N(s) = \prod_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{1-(p_i)^s}$ se développe en

$$\zeta_N(s) = \sum_k \frac{1}{k^s},$$

la somme portant sur les entiers dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à p_{N+1}. La fonction $L(s) = \zeta_N(s) - 1$ est donc une somme de termes $\frac{1}{k^s}$ avec k entier au moins égal à p_{N+1}. On en déduit que les coefficients a_n de cette série de Dirichlet sont nuls pour $n < p_{N+1}$, et sont au plus égaux à 1. D'après la question précédente,

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta_N(\sigma + \mathrm{i}t) - 1|^2 \, dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \leq \sum_{k=p_{N+1}}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma}} = O\left(\frac{1}{(p_{N+1})^{2\sigma-1}} \right)$$

en utilisant à la fin une comparaison série-intégrale pour estimer le reste de la série. Ceci implique la convergence en mesure relative de $t \mapsto \zeta_N(\sigma + \mathrm{i}t) - 1$ vers 0 : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1_{|\zeta_N(\sigma+\mathrm{i}t)-1| \geq \varepsilon} \, dt \leq \frac{1}{2T\varepsilon^2} \int_{-T}^{T} |\zeta_N(\sigma + \mathrm{i}t) - 1|^2 \, dt$$

$$\limsup_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1_{|\zeta_N(\sigma+\mathrm{i}t)-1| \geq \varepsilon} \, dt \right) \leq O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \, (p_{N+1})^{2\sigma-1}} \right) \to_{N\to\infty} 0.$$

Finalement, $x(t) - x_N(t) = \log(\zeta_N(\sigma + \mathrm{i}t))$, donc pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, comme $z \mapsto \log(z)$ est 2-lipschitzienne sur la boule $B(1, \frac{1}{2})$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1_{|x(t)-x_N(t)| \geq \varepsilon} \, dt \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1_{|\zeta_N(\sigma+\mathrm{i}t)-1| \geq \frac{\varepsilon}{2}} \, dt.$$

La convergence en mesure relative de x_N vers x s'en déduit.

Q14. Les fonctions x_N admettent des distributions asymptotiques d'après la question Q10, et la fonction x est la limite en mesure relative des fonctions x_N, donc x a une distribution asymptotique, et de plus,

$$\rho_x = \lim_{N\to\infty} \rho_{x_N} = \rho_{y_{p_1,\sigma}} * \rho_{y_{p_2,\sigma}} * \cdots * \rho_{y_{p_N,\sigma}} * \cdots .$$

La loi $\rho_{y_{p,\sigma}}$ est supportée par la courbe $\{-\log(1-p^{-\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in [0,2\pi]\}$. Pour $p \geq p_{N_0}$ assez grand, cette courbe est incluse dans le disque de centre l'origine et de rayon $\frac{2}{p^\sigma}$. Par conséquent, si $\sigma > 1$, la convolution infinie

$$\rho_{y_{p_{N_0},\sigma}} * \rho_{y_{p_{N_0+1},\sigma}} * \cdots$$

a son support inclus dans le disque de centre l'origine et de rayon $2\sum_{N=N_0}^{\infty} \frac{1}{p^\sigma}$. On en déduit que $\rho_x = \mathrm{BJ}_\sigma$ est elle-même à support compact si $\sigma > 1$.

Q15. Le théorème des trois séries de Kolmogorov s'applique à la série de variables indépendantes $\sum_{N=1}^{\infty} X_N$: chaque variable X_N est bornée, et l'on a

$$\mathbb{E}[X_N] = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} -\log(1-(p_N)^{-\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{k\,(p_N)^{k\sigma}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\,d\theta = 0;$$

$$\mathbb{E}[|X_N|^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} |\log(1-(p_N)^{-\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\,d\theta = \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{(p_N)^{2\sigma}} < +\infty.$$

Par conséquent, $\sum_{N=1}^{\infty} X_N$ converge presque sûrement, et sa loi est la convolée infinie $\rho_{y_{p_1,\sigma}} * \rho_{y_{p_2,\sigma}} * \cdots * \rho_{y_{p_N,\sigma}} * \cdots$, c'est-à-dire la loi de Bohr–Jessen BJ_σ.