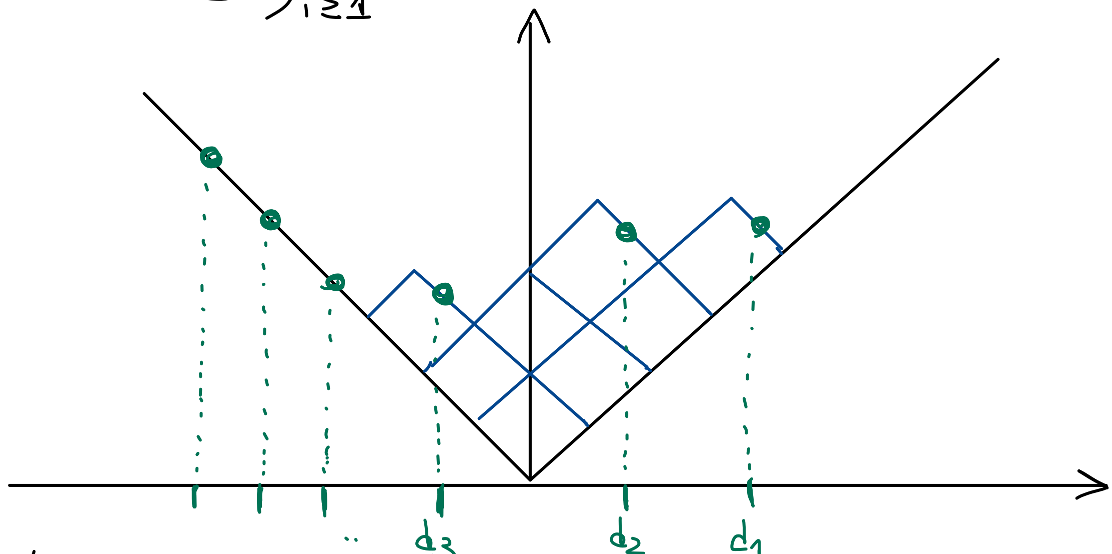
9. Les mesures de Schur

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ est une partition d'entiers, ses coordonnées de descente sont les demi-entiers de la suite

$$D_\lambda = \left(\lambda_i - i + \frac{1}{2}\right)_{i \geq 1} \qquad (\text{avec } \lambda_r = 0 \text{ si } r > \ell).$$



$$D_\lambda \subset \mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

Pour $A = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{Z}'$, on veut calculer

$\mathbb{P}[A \subset D_\lambda] = F(a_1, a_2, \dots, a_r)$ avec par exemple

$\lambda \sim \text{Plancherel}(n)$.

<u>Spoiler</u> : il existe une large classe de modèles de partitions aléatoires

- qui contient (presque) les mesures de Plancherel
- telle que, $\forall A$ partie finie de $\mathbb{Z}'$,

$$\mathbb{P}[A \subset D_\lambda] = \det\left(K(a_i, a_j)\right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

avec K noyau explicite (dépendant du modèle)

$\longrightarrow$ processus ponctuel déterminantal.

1. Interprétation probabiliste de la formule de Cauchy.

$\mathbb{Y} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Y}(n)$ = ensemble de toutes les partitions d'entiers

formule de Cauchy :

$$\prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} s_\lambda(X) s_\lambda(Y) = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}} \frac{p_\mu(X) p_\mu(Y)}{z_\mu}$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(X) p_k(Y)}{k} \right).$$

C'est une relation entre fonctions symétriques, on peut "oublier" les variables x_i et y_j.

<u>idée</u> : utiliser la formule pour définir des mesures de probabilité sur $\mathbb{Y}$.

Définition : On appelle spécialisation positive de Sym un morphisme d'algèbres $\Psi : \mathrm{Sym} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\Psi(s_\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{Y}$.

Étant donnés des nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tels que $\sum_{i \geq 1} |x_i| < +\infty$, $p_k(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i \geq 1} x_i^k$ converge $\forall k$ et on peut donc définir une spécialisation de Sym en évaluant les fonctions symétriques en ces variables.

On notera $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ et $\Psi(f) = f(X)$.

Plus généralement, on adoptera cette notation pour toute spécialisation, même si elle ne correspond pas à des nombres réels.

<u>exemple</u> : spécialisation exponentielle E

$$p_1(E) = 1 \quad ; \quad p_{k\geq 2}(E) = 0$$

Comme $\mathrm{Sym} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$, il y a une unique spécialisation de Sym avec ces valeurs.

$$s_\lambda(E) = \sum_{|\mu|=|\lambda|} \frac{p_\mu(E)}{z_\mu} \mathrm{ch}^\lambda(\sigma_\mu)$$

$$= \frac{p_1^{|\lambda|}(E)}{|\lambda|!} \mathrm{ch}^\lambda(\mathrm{id}) = \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} \qquad \text{spécialisation positive.}$$

On parle pour les spécialisations $f \in \mathrm{Sym} \mapsto f(X) \in \mathbb{R}$ d'alphabets virtuels.

Définition Soient X, Y deux spécialisations positives de Sym. On suppose $\sum_{k\geq 1} \frac{p_k(X)\,p_k(Y)}{k}$ convergente.
La mesure de Schur $\mathbb{S}_{X,Y}$ sur $\mathbb{Y}$ est la mesure de probabilité
$$\mathbb{S}_{X,Y}[\lambda] = \frac{s_\lambda(X)\,s_\lambda(Y)}{\exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k(X)\,p_k(Y)}{k}\right)}.$$

exemple : $X = Y = \sqrt{\theta}\,E$; $p_1(\sqrt{\theta}E) = \sqrt{\theta}$; $p_{k\geq 2}(\sqrt{\theta}E) = 0$.

$$s_\lambda(\sqrt{\theta}E) = \theta^{\frac{|\lambda|}{2}} \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!}.$$

$$\mathbb{S}_{\sqrt{\theta}E,\sqrt{\theta}E}[\lambda] = \frac{e^{-\theta}\,\theta^{|\lambda|}}{|\lambda|!} \times \frac{(\dim \lambda)^2}{|\lambda|!}$$

mesure de Plancherel Poissonisée !

Théorème (Okounkov, ~ 2000)

Si $\lambda \sim \mathbb{S}_{X,Y}$, il existe un noyau $K_{X,Y}$ explicite tel que

$$\boxed{\mathbb{P}[A \subset D_\lambda] = \det\left(K_{X,Y}(a_i, a_j)\right)_{1 \leq i,j \leq r}}.$$

intérêt : on réduit tout problème asymptotique à l'étude d'une fonction de deux variables.

<u>problème préliminaire</u> : quelles sont les spécialisations positives de Sym ?

2. Le simplexe de Thoma

Autre approche pour définir une probabilité sur $\mathcal{Y}(n)$:

les mesures spectrales.

Étant donné un groupe G, une trace normalisée sur G est une fonction $\tau : G \to \mathbb{C}$ telle que :

1) $\tau(e_G) = 1$
2) $\tau(gh) = \tau(hg)$
3) $\left(\tau(g_i g_j^{-1})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est hermitienne positive $\forall g_1, \dots, g_n \in G$.

Proposition : Une trace normalisée sur un groupe fini G est un barycentre des caractères irréductibles χ^λ, $\lambda \in \widehat{G}$.

Preuve : • Si τ est une trace normalisée, $\tau \in Z(\mathbb{C}G)$, donc

$$\tau = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} p_\lambda \chi^\lambda .$$

Comme $\tau(e_G) = 1$, $\sum_{\lambda \in \widehat{G}} p_\lambda = 1$.

- $\tau(gh^{-1}) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} p_\lambda \chi^\lambda(gh^{-1}) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} p_\lambda \overline{\chi^\lambda(hg^{-1})} = \overline{\tau(hg^{-1})}$

si les $p_\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si les matrices $\Pi(g_1, g_2, \dots, g_n)$ sont hermitiennes, alors $\tau(g) = \overline{\tau(g^{-1})} \Longrightarrow$ les $p_\lambda \in \mathbb{R}$.

- Voyons pourquoi la positivité des p_λ est équivalente à la positivité des matrices.

Les $\Pi(g_1 \dots g_n) \geq 0 \iff \forall a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}, \sum_{i,j=1} a_i \overline{a_j}\, \tau(g_i g_j^{-1}) \geq 0$

$$\iff \forall x = \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{C}G, \sum_{\lambda\in\hat{G}} \frac{p_\lambda}{\dim \lambda} \operatorname{tr}\left(\rho^\lambda(x)\, \rho^\lambda(x)^*\right) \geq 0$$

On prend $x = TF^{-1}$ (la matrice identité dans $\operatorname{End}(V^\lambda)$) $\Rightarrow p_\lambda \geq 0$.

$\square$.

Si G est un groupe dénombrable (pas forcément fini),

$\mathrm{Traces}(G) =$ convexe compact (topologie de la convergence en tout $g \in G$)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \tau(g) \\ \tau(g^{-1}) & 1 \end{pmatrix} = 1 - |\tau(g)|^2 \geq 0, \quad |\tau| \leq 1 \text{ partout.}$$

$$\tau(g) = \int_{\mathrm{Traces\ extrémales}(G)} \chi(g)\, \mathbb{P}_\tau[d\chi].$$

(Krein–Milman).

Lorsque G est fini, $\mathrm{Traces\ extrémales}(G) = \{\chi^\lambda, \lambda \in \widehat{G}\}$.

Que se passe-t-il pour $G = \mathfrak{S}(\infty)$?

Soit τ une trace normalisée sur $\mathfrak{S}(\infty)$.

Sa restriction $\tau_{|\mathfrak{S}(n)}$ est une trace normalisée sur $\mathfrak{S}(n)$, donc :

$$\forall n, \quad \tau_{|\mathfrak{S}(n)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \mathbb{P}_{\tau,n}[\lambda] \, \chi^\lambda .$$

<u>exemple</u> : $\tau = 1_{(\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*})}$.

Les mesures spectrales $\mathbb{P}_{\tau,n}$ sont les mesures de Plancherel $\mathbb{PL}(n)$.

De façon générale, les mesures spectrales associées à $\tau \in \mathrm{Traces}(\mathfrak{S}(\infty))$ donnent des fonctions harmoniques sur $\mathcal{Y}$:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \frac{\mathbb{P}_{\tau,n}[\lambda]}{\dim \lambda} \, ch^\lambda = \tau_{|\mathfrak{S}(n)} = \left(\tau_{|\mathfrak{S}(n+1)}\right)_{|\mathfrak{S}(n)}$$

$$= \sum_{\Lambda \in \mathcal{Y}(n+1)} \frac{\mathbb{P}_{\tau,n+1}[\Lambda]}{\dim \Lambda} \, ch^\Lambda{}_{|\mathfrak{S}(n)} .$$

On sait (règle de Pieri) que

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}(n)}^{\mathfrak{S}(n+1)}\left(V^{\lambda}\right) = \bigoplus_{\Lambda \,:\, \lambda \nearrow \Lambda} V^{\Lambda}.$$

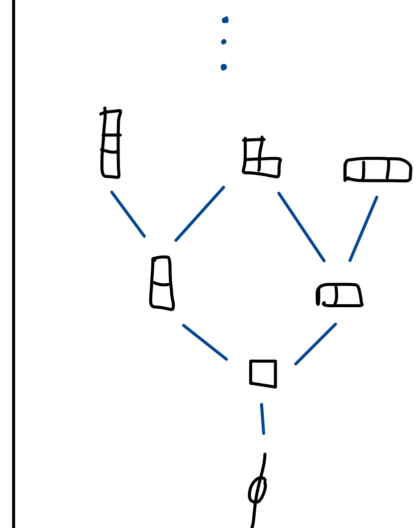
On peut montrer (réciprocité de Frobenius) :

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}(n)}^{\mathfrak{S}(n+1)}\left(V^{\Lambda}\right) = \bigoplus_{\lambda \,:\, \lambda \nearrow \Lambda} V^{\lambda}.$$

Donc : $\forall \tau \in \mathrm{Traces}(\mathfrak{S}(\infty))$,

$$\frac{\mathbb{P}_{n,\tau}[\lambda]}{\dim \lambda} = \sum_{\Lambda \,:\, \lambda \nearrow \Lambda} \frac{\mathbb{P}_{n+1,\tau}[\Lambda]}{\dim \Lambda}$$

(propriété d'harmonicité).



Quelles sont les mesures spectrales / fonctions harmoniques correspondant aux traces extrémales de $\mathfrak{S}(\infty)$?

Notons $s_\lambda(X_\tau) = \dfrac{\mathbb{P}_{n,\tau}[\lambda]}{\dim \lambda}$.

On a $s_1(X_\tau) = 1$.

$$s_\lambda(X_\tau) = s_\lambda(X_\tau)\, s_1(X_\tau) = \sum_{\Lambda : \lambda \uparrow \Lambda} s_\Lambda(X_\tau).$$

On a donc une forme linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s_\lambda &\longmapsto \frac{\mathbb{P}_{n,\tau}[\lambda]}{\dim \lambda} \end{aligned}$$

positive en toute fonction de Schur.

<u>Théorème</u> (Kerov, Vershik)

τ est extrémale ssi X_τ est une spécialisation positive.

morphisme d'algèbres !

$$\mathrm{Traces}(\mathfrak{S}(\infty)) \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{fonctions harmoniques}\\ \text{positives normalisées}\end{array}\right.$$

$$\text{Traces extrémales}(\mathfrak{S}(\infty)) \longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{spécialisations positives}\\ \text{avec } s_1(X) = 1.\end{array}$$

On peut alors calculer $\tau(\sigma_\mu)$ si σ_μ = permutation avec $m_2(\mu)$ 2-cycles
$\vdots$
$m_s(\mu)$ s-cycles

$$\tau(\sigma_\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \frac{\mathbb{P}_{n,\tau}[\lambda]}{\dim \lambda}\, \mathrm{ch}^\lambda(\sigma_\mu) \quad \text{pour } n = |\mu|,\ \sigma_\mu \in \mathfrak{S}(n)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} s_\lambda(X_\tau)\, \mathrm{ch}^\lambda(\sigma_\mu) = p_\mu(X_\tau).$$

$\longrightarrow$ τ se factorise sur les cycles disjoints. $\quad (p_1(X_\tau) = 1).$

Ceci ne nous dit pas ce que sont les spécialisations positives (normalisées) ...

Lemme : Soit X, Y deux spécialisations ≥ 0. $X+Y$ la spécialisation telle que $p_k(X+Y) = p_k(X) + p_k(Y)$ $\forall k \geq 1$.

$X+Y$ est une spécialisation ≥ 0.

Preuve :

$X \geq 0 \Longleftrightarrow$ Dans Sym_Z,

$$[s_\lambda(Z)]\Big(\sum_\lambda \underbrace{s_\lambda(X)}_{\in \mathbb{C}} s_\lambda(Z)\Big) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{Y}$$

$\Longleftrightarrow$ Dans Sym_Z,

$$[s_\lambda(Z)]\Big(\exp\Big(\sum_{k\geq 1}^{\infty} \frac{p_k(X)}{k} p_k(Z)\Big)\Big) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{Y}.$$

Notons $t_k^X = \frac{p_k(X)}{k}$, $t_k^Y = \frac{p_k(Y)}{k}$ (paramètres de Miwa)

Par hypothèse,

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1}^{\infty} t_k^X p_k(Z)\right) \text{ et } \exp\left(\sum_{k\geq 1}^{\infty} t_k^Y p_k(Z)\right) \text{ sont}$$

Schur positives dans Sym_Z.

Il suffit donc de montrer qu'un produit de fonctions de Schur est une combinaison linéaire positive de fonctions de Schur.

Mais :

$$s_\lambda(Z) \times s_\rho(Z) = \Psi_{FS}^{-1}\left(\Psi_{FS}(s_\lambda) \times \Psi_{FS}(s_\rho)\right)$$

$$= \Psi_{FS}^{-1}\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}(n)\times\mathfrak{S}(m)}^{\mathfrak{S}(n+m)}(V_\lambda \otimes V_\rho)\right)$$

représentation = combinaison positive ! $\square$.

exemple 1

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \geq 0$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.

On considère la spécialisation associée à l'évaluation des fonctions symétriques en ces valeurs. On peut supposer $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \dots \geq 0$.

C'est une spécialisation positive !

$$X = \lim_{n \to +\infty} X_n = \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\}$$

et si $x \geq 0$, alors $\sum_{\lambda} s_\lambda(Z)\, s_\lambda(\{x\}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k(Z) \frac{x^k}{k}\right)$

$$= \sum_{\mu} \frac{p_\mu(Z)}{z_\mu} x^{|\mu|}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_{(n)}(Z)\, x^n$$

Donc, $s_\lambda(\{x\}) = \begin{cases} x^n & \text{si } \lambda = (n) \\ 0 & \text{si } \lambda \text{ a plusieurs parts.} \end{cases}$ ≥ 0.

exemple 2 Soient $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq \dots \geq 0$.

$$p_k(\overline{Y}) = (-1)^{k-1} \sum_{i \geq 1} (y_i)^k.$$

C'est une spécialisation positive ! De nouveau, il suffit de le montrer pour $Y = \{y\}$, $p_k(\overline{Y}) = (-1)^{k-1} y^k$

Or, $\displaystyle\sum_\lambda s_\lambda(Z)\, s_\lambda(\overline{Y}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(Z)}{k} (-1)^{k-1} y^k\right)$

$Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ $\displaystyle = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \log(1 + z_i y)\right)$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} 1 + z_i y = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(Z)\, y^n.$$

La fonction élémentaire e_n est elle une fonction de Schur ? Oui !

$e_n = s_{(1^n)}$.

$$s_{(1^n)}(x_1 \dots x_n) = \frac{\det\left(x_i^{n+1-j}\right)_{ij}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{ij}} = x_1 x_2 \cdots x_n = e_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Donc, $\sum_\lambda s_\lambda(Z)\, s_\lambda(\overline{Y})$ est Schur positive $\Longleftrightarrow$ $s_\lambda(\overline{Y})$ est une spécialisation positive.

<u>exemple 3</u> spécialisation "exponentielle" $p_k(E) = \mathbb{1}_{(k=1)}$.

<u>Definition</u> Le simplexe de Thoma est l'ensemble

$$\Upsilon = \left\{ \left((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots) \right) \;\middle|\; \text{deux suites décroissantes de réels positifs avec } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \beta_i = 1 - \gamma \leq 1 \right\}$$

À tout élément $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}$, on peut associer une spécialisation positive normalisée :

$$p_k(\alpha, \beta) = p_k(\alpha) + p_k(\overline{\beta}) + p_k(\gamma E)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ \sum_{i \geq 1} (\alpha_i)^k + (-1)^{k-1} (\beta_i)^k & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

<u>Théorème</u> (Edrei, 51 ; Thoma, 64 ; Kerov-Vershik, 81)

Ce sont toutes les spécialisations positives normalisées de Sym

$\updownarrow$

Traces extrémales $(\mathfrak{S}(\infty))$.

Si X est une spécialisation positive, on peut en créer une normalisée X_{norm} en posant $p_k(X_{norm}) = \dfrac{p_k(X)}{(p_1(X))^k}$.

Les spécialisations positives de Sym sont donc paramétrées par les triplets

$$(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_i \geq \cdots \geq 0), \ (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0), \ \gamma \geq 0).$$

$$p_k(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i + \gamma & \text{si } k = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i)^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i)^k & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

<u>remarque</u> : c'est lié à la géométrie aléatoire de $\lambda \sim \mathbb{P}_{\tau,n}$ ...

3. La formule d'Okounkov

Fixons X, Y deux spécialisations positives de paramètres de Miwa $(t_k^X)_{k\geq 1}$ et $(t_k^Y)_{k\geq 1}$.

En utilisant la théorie des représentations de $\mathfrak{gl}(\infty)$

$\Longleftrightarrow$ la correspondance Boson - fermion en mécanique quantique,

Okounkov a établi :

$$\mathbb{S}_{X,Y}[ACD_\lambda] = \det\left(K_{X,Y}(a_i, a_j)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

$$\forall A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subset \mathbb{Z}'$$

avec $K_{X,Y}$ qu'on peut exprimer comme suit.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{K}_{X,Y}(z,w) &= \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}'\\ y\in\mathbb{Z}'}} K_{X,Y}(x,y)\, z^{x} w^{-y}, \quad |z|>|w|.\\ &= \frac{\sqrt{zw}}{z-w}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k^{X}\left(z^{k}-w^{k}\right)-t_k^{Y}\left(z^{-k}-w^{-k}\right)\right)\end{aligned}}$$

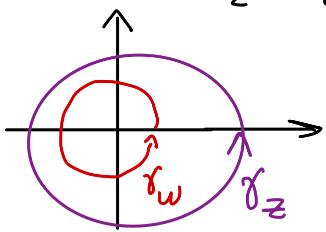
Voyons ce que dit la formule lorsque $X = Y = \sqrt{\theta}\, E$.

$$t_k^{X} = t_k^{Y} = \mathbb{1}_{(k=1)}\sqrt{\theta}.$$

$$\mathcal{K}_{X,Y}(z,w) = \frac{\sqrt{zw}}{z-w}\exp\left(\sqrt{\theta}\left(\left(z-z^{-1}\right)-\left(w-w^{-1}\right)\right)\right)$$

On récupère le noyau par une double intégrale de contour :

$$K_{X,Y}(x,y) = \oint_{\gamma_z}\oint_{\gamma_w} \frac{1}{(z-w)\sqrt{zw}} \exp\left(\sqrt{\theta}\left(z - z^{-1} - w + w^{-1}\right)\right) z^{-x} w^{y} \frac{dz\,dw}{(2i\pi)^2}$$



Avancée majeure en probabilités 1990-2020 :

- description des correlations entre les points d'un processus ponctuel par des formules (semi) explicites type intégrale de contour (multiple)
- analyse asymptotique de ces formules : standard, résultats universels.

4. Analyse asymptotique dans le bulk

Notons $M_\theta =$ coordonnées de descente de $\lambda \sim PPL(\theta)$

$$M_\theta^{x_0} = M_\theta - x_0\sqrt{\theta} \quad (\text{translation}).$$

avec $x_0 \in (-2,2)$.

Comprendre le processus déterminantal $M_\theta^{x_0}$ translaté

$\Longleftrightarrow$ comprendre le comportement d'une partition aléatoire sous la mesure de Plancherel $PPL(\theta)$, dans le voisinage du point $x_0\sqrt{\theta}$.

(avec $x_0\sqrt{\theta} \in \mathbb{Z}$)

$$K_\theta^{x_0}(x,y) = K_\theta\left(x + x_0\sqrt{\theta},\, y + x_0\sqrt{\theta}\right)$$

__Théorème__ (Borodin – Okounkov – Olshanski, 2000) :

$$\lim_{\theta \to +\infty} K_\theta^{x_0}(x,y) = \frac{\sin(\phi_0(x-y))}{\pi(x-y)} \text{ avec } \phi_0 = \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

noyau sinus discret.

__Interprétation__ : dans le voisinage de $x_0\sqrt{\theta}$, les descentes sont réparties suivant un processus déterminantal invariant par translation, quasiment indépendant de x_0.

En particulier, $\lim_{\theta \to +\infty} K_\theta^{x_0}(x,x) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) =$ densité moyenne des descentes autour de $x_0\sqrt{\theta}$.

$\longrightarrow$ la forme limite Ω a pour dérivée

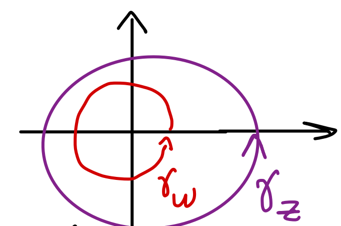
$$\Omega'(x_0) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\frac{x_0}{2} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$\rightsquigarrow$ on retrouve la courbe LSKV.

La preuve du théorème repose sur l'étude de l'intégrale de contour :

$$K_\theta^{x_0}(x,y) = \oint_{\gamma_z}\oint_{\gamma_w} \frac{1}{(z-w)\sqrt{zw}} \exp\left(\sqrt{\theta}\left(F\left(z, x_0+\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right) - F\left(w, x_0+\frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)\right)\right)\frac{dz\,dw}{(2i\pi)^2}$$

avec $F(z,t) = z - z^{-1} - t\log z$;



Considérons dans un premier temps une intégrale de contour double

$$I = \oint_{\gamma_z}\oint_{\gamma_w} g(z,w)\exp\left(\sqrt{\theta}\left(F\big(z,\underbrace{x_0+\frac{x}{\sqrt{\theta}}}_{x_\theta}\big) - F\big(w,\underbrace{x_0+\frac{y}{\sqrt{\theta}}}_{y_\theta}\big)\right)\right)\frac{dz\,dw}{(2i\pi)^2}$$

avec γ_w = cercle de rayon $1-\varepsilon$, γ_z = cercle de rayon 1.

$g(z,w)$ holomorphe dans un voisinage de ces cercles.

On calcule les points critiques de $F(z,y_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z,y_0) = 1 + z^{-2} - \frac{y_0}{z} \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \iff z^2 - y_0 z + 1 = 0$$

$$z = \frac{y_0 \pm i\sqrt{4-y_0^2}}{2} = e^{\pm i\phi}$$

en posant $y_0 = 2\cos\phi$ (ϕ proche de ϕ_0).

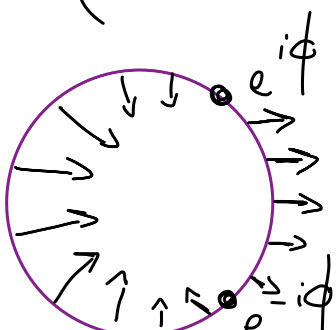
Au voisinage du point critique $e^{i\phi}$:

$$F(w,y_0) \simeq F(e^{i\phi},y_0) + \frac{1}{2}F''(e^{i\phi},y_0)\left(w-e^{i\phi}\right)^2$$

$$\simeq 2i\left(\sin\phi - \phi\cos\phi\right) + i\sin\phi\left(\frac{w}{e^{i\phi}} - 1\right)^2,$$

On déforme γ_w pour le faire passer par les points critiques :

On peut calculer $\left(\nabla \operatorname{Re} F(\cdot, y_0)\right)(e^{i\psi}) = 2(\cos\psi - \cos\theta)\, u_\psi$.



$\Longrightarrow$ $\operatorname{Re} F(\cdot, y_0)$ strictement positive sur $\tilde{\gamma}_w$! (sauf aux points critiques).

Alors :

$$I = \iint_{\gamma_z \times \tilde{\gamma}_w} \underbrace{g(z,w)}_{\text{borné}} \exp\left(\sqrt{\theta} \cdot \left(\underbrace{F(z,x_\theta)}_{\text{la partie réelle s'annule sur } \gamma_z} - \underbrace{F(w,y_\theta)}_{\text{partie réelle négative}}\right)\right) \frac{dz\,dw}{(2i\pi)^2}$$

partie réelle négative, la contribution principale est donnée par le voisinage des points critiques.

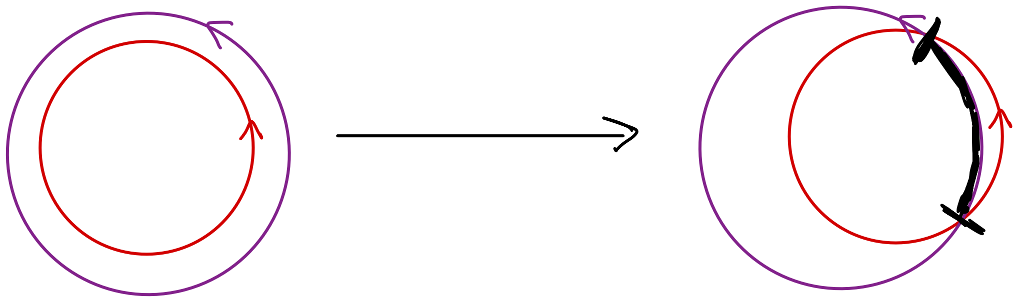
$$|I| \leq C_1 \cdot \int e^{-\sqrt{\theta}\, C_2 s^2} ds = O\left(\theta^{-1/4}\right).$$

$\longrightarrow 0$ lorsque $\theta \to +\infty$.

Ce n'est pas ce qui se passe avec $\lim_{\theta \to +\infty} K_\theta^{x_0}(x,y)$, car

$g(z,w) = \dfrac{1}{z-w\sqrt{zw}}$ a des singularités.

Solution : on récupère un résidu lorsque γ_w vient croiser γ_z.



Ce résidu vaut (prendre $z=w$, enlever la singularité $\dfrac{1}{z-w}$) :

$$\frac{1}{(2i\pi)z} \exp\left(\sqrt{\theta}\left(F\left(z, x_\theta + \frac{x}{\sqrt{\theta}}\right) - F\left(z, x_\theta + \frac{y}{\sqrt{\theta}}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2i\pi z^{x-y+1}}.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{\theta \to +\infty} K_\theta^{x_0}(x,y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} \frac{dz}{z^{x-y+1}}$ = noyau sinus.

5. Analyse asymptotique au bord

Si $x_0 = 2\sqrt{\theta}$, on peut étudier

$$\lim_{\theta \to +\infty} \theta^{1/6} K_\theta\left(x_0 + \theta^{1/6} x,\ x_0 + \theta^{1/6} y\right).$$

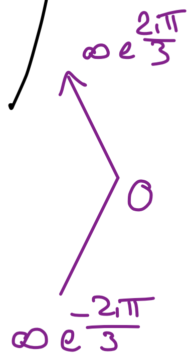
__Définition :__ Le processus d'Airy est le processus ponctuel $M \subset \mathbb{R}$ tel que, pour toutes parties mesurables bornées $A_1, A_2, \dots A_r \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_r \in \Pi} \mathbb{1}_{(x_1 \in A_1, \dots x_r \in A_r)}\right] = \int_{A_1 \times \dots \times A_r} \det\left(K^{Airy}(x_i, x_j)\right)_{1 \leq i,j \leq r} dx_1 \dots dx_r$$

avec $$K^{Airy}(x,y) = \frac{Ai(x)\,Ai'(y) - Ai'(x)\,Ai(y)}{x-y}$$

$$\mathrm{Ai}(x) = \int e^{\left(xy - \frac{1}{3}y^3\right)} \frac{dy}{2i\pi}.$$

fonction d'Airy.



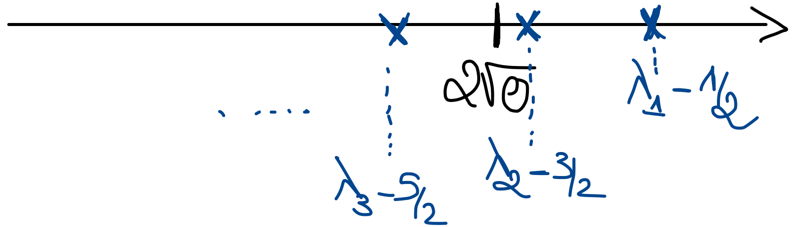
(processus ponctuel déterminantal sur $\mathbb{R}$).

<u>Théorème</u> (Borodin – Okounkov – Olshanski)

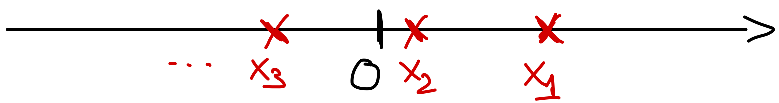
$$\lim \theta^{1/6} K_\theta\left(2\sqrt{\theta} + \theta^{1/6}x, 2\sqrt{\theta} + \theta^{1/6}y\right) = K^{Airy}(x,y).$$

→ convergence du processus des descentes renormalisé autour de $2\sqrt{\theta}$ vers le processus d'Airy.

<u>preuve</u> : de nouveau, analyse de l'intégrale de contour ; point critique double.



$\downarrow$ translation par $-2\sqrt{\theta}$, renormalisation par $\theta^{-1/6}$



$\underset{\theta \to +\infty}{\sim}$ processus d'Airy.

Ceci implique la convergence en loi des

$$x_i = (\lambda_i - 2\sqrt{\theta})\,\theta^{-1/6}, \quad i \geq 1$$

$$\lambda_1 = 2\sqrt{\theta} + \theta^{1/6}\, TW \Leftarrow \text{loi de Tracy-Widom.}$$

Correspondance partitions aléatoires $\longleftrightarrow$ matrices aléatoires

Soit H_N une matrice de taille $N \times N$

$$H_N(i,i) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1) \; ; \quad H_N(i,j) = \overline{H_N(j,i)} = \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,\tfrac{1}{2}) + i\,\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,\tfrac{1}{2}).$$

$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_N$ les valeurs propres réelles (aléatoires) de H_N.

$$x_i = (y_i - 2\sqrt{N})\,N^{1/6} \; ; \quad y_i = 2\sqrt{N} + x_i N^{-1/6}$$

<u>Théorème</u> Lorsque $N \longrightarrow +\infty$, $(x_i)_{i\geq 1} \longrightarrow$ processus d'Airy !.

Les plus grandes valeurs propres d'une matrice hermitienne gaussienne ont donc la même asymptotique que les plus grandes parts d'une partition aléatoire sous la mesure de Plancherel.