4. La borne supérieure de Diaconis

Dans les précédents épisodes :

- étant donnée une marche aléatoire sur G de générateur μ,

$$\mu_n(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \operatorname{tr}\left((\hat{\mu}(\lambda))^n \rho^\lambda(g^{-1}) \right)$$

Si $\mu \in Z(\mathbb{C}G)$, alors

$$\mu_n(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{(\dim \lambda)^2}{|G|} \left(\mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda(\cdot)] \right)^n \chi^\lambda(g^{-1}).$$

- si $G = \mathfrak{S}(n)$:

$\hat{G} = \mathcal{Y}(n)$ ensemble des partitions de l'entier n

$\dim \lambda$ = nbre de tableaux standards de forme n.

$$\mathrm{ch}^\lambda(\sigma_\mu) = \langle s_\lambda | p_\mu \rangle.$$

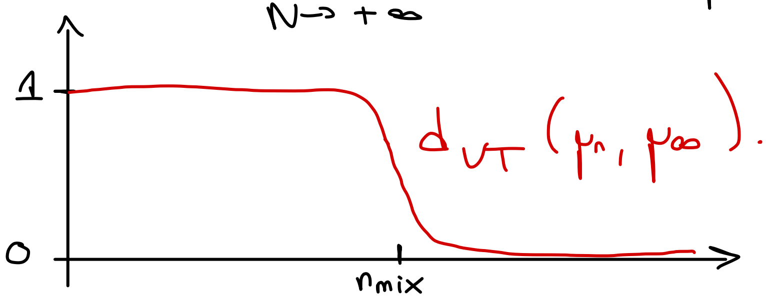
1. Stratégie générale pour la preuve du phénomène de coupure

On veut montrer que, étant donnée une famille de générateurs $\mu^{(N)}$ de marches aléatoires sur les $\mathfrak{S}(N)$, il existe des temps de mélange $n_{mix} = f(N)$ tels que :

- $n_{mix} \longrightarrow +\infty$ lorsque $N \to +\infty$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{N \to +\infty} d_{VT}\left(\left(\mu^{(N)}\right)^{n_{mix}(1+\varepsilon)}, \text{Haar} \right) = 0$

  $\lim\limits_{N \to +\infty} d_{VT}\left(\left(\mu^{(N)}\right)^{n_{mix}(1-\varepsilon)}, \text{Haar} \right) = 1.$

  Haar $\hookrightarrow$ mesure uniforme



Il faut borner inférieurement d_{VT} avant n_{mix}, et borner supérieurement d_{VT} après n_{mix}.

① Avant le temps de coupure, il faut trouver un événement discriminant $A = A(N,n)$ qui n'a pas du tout la même probabilité sous μ_n et sous Haar $= \mu_\infty$.

Lemme : Soit μ, ν deux mesures de probabilité sur G.

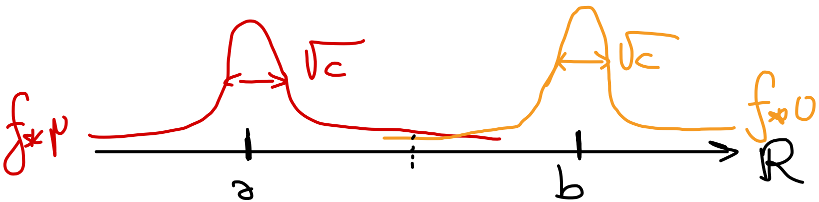
$f : G \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}_\mu[f] = \sum_{g \in G} \mu(g) f(g) = a$$

$$\mathbb{E}_\nu[f] = b \ ; \quad \max(\mathrm{Var}_\mu(f), \mathrm{Var}_\nu(f)) \leq c.$$

Alors, $$\boxed{d_{VT}(\mu,\nu) \geq 1 - \frac{8c}{(b-a)^2}}.$$

<u>Preuve</u> Supposons par exemple $b \geq a$.



$$\nu\left(\left\{x : f(x) > \frac{a+b}{2}\right\}\right) \geq \nu\left(\left\{x : |f(x) - b| \leq \frac{b-a}{2}\right\}\right)$$

$$\geq 1 - \nu\left(\left\{x : |f(x) - b| \geq \frac{b-a}{2}\right\}\right)$$

$$\underset{\text{(Chebyshev)}}{\geq} 1 - \frac{c}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

<u>rappel</u> : $\mathbb{P}[|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq t] \leq \mathbb{E}\left[\frac{(Y - \mathbb{E}[Y])^2}{t^2}\right]$

$$\leq \frac{\mathrm{var}(Y)}{t^2}\Big) .$$

De même, $\mu\left(\left\{x : f(x) > \frac{a+b}{2}\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x : |f(x)-a| > \frac{b-a}{2}\right\}\right)$

$$\leq \frac{c}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}.$$

$\longrightarrow$ on a trouvé un événement discriminant $\square$.

Quelles fonctions discriminantes choisir ?

$\longrightarrow$ les caractères irréductibles du groupe !

Plaçons-nous par exemple dans le cas où $\mu \in Z(\mathbb{C}G)$.

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[ch^\lambda(g)] = \sum_{g \in G} \mu_n(g)\, ch^\lambda(g)$$

$$= \sum_{\substack{g \in G \\ e \in \widehat{G}}} \frac{\dim e}{|G|} \left(\mathbb{E}_\mu[\chi^e(\cdot)]\right)^n \overline{ch^e(g)}\, ch^\lambda(g)$$

$$= (\dim \lambda)\left(\mathbb{E}_\mu [\chi^\lambda(.)]\right)^n$$ par orthogonalité des caractères.

Par ailleurs, si $\lambda \neq$ représentation triviale de G sur $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{E}_{Haar}[ch^\lambda(g)] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} ch^\lambda(g) = \langle ch^{V_{triviale}} | ch^\lambda \rangle = 0.$$

Il reste à savoir calculer les variances (voir plus loin, c'est lié au produit tensoriel interne $V^\lambda \otimes V^\lambda$).

② Après le temps de coupure, on va utiliser la transformée de Fourier non commutative.

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset G} |\mu(A) - \nu(A)|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |\mu(g) - \nu(g)|$$

(une partie A qui maximise est $A = \{g : \mu(g) \geq \nu(g)\}$, et A^c donne la même différence.

$$d_{VT}(\mu, \text{Haar}) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} \left|\mu(g) - \frac{1}{|G|}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \|f - 1\|_{L^1(G)}, \quad f(g) = \frac{d\mu(g)}{d\text{Haar}(g)} = |G|\mu(g).$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$4(d_{VT}(\mu, \text{Haar}))^2 \leq \|f - 1\|^2_{L^2(G)} = \|\hat{f} - \hat{1}\|^2_{\mathbb{C}\hat{G}}.$$

en utilisant le caractère isométrique de la TF non commutative.

$\hat{1}$? $\quad \hat{1}(\lambda) = \sum_g \rho^\lambda(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } \lambda = \text{représentation triviale} \\ 0 & \text{sinon, par orthogonalité de } \rho^\lambda_{ij} \text{ et de } \rho^{\text{triviale}}_{11}. \end{cases}$

Par ailleurs, $\hat{f}(\text{triviale}) = \sum_{g \in G} |G| \mu(g) . 1 = |G|$.

Donc, si $\hat{G}^* = \hat{G} \setminus \{\text{triviale}\}$,

$$\| \hat{f} - \hat{1} \|^2 = \sum_{\lambda \in \hat{G}^*} \frac{(\dim \lambda)}{|G|^2} \operatorname{tr}\left(\hat{f}(\lambda)^* \hat{f}(\lambda) \right)$$
$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}^*} (\dim \lambda) \operatorname{tr}\left(\hat{\mu}(\lambda)^* \hat{\mu}(\lambda) \right).$$

On a donc démontré :

<u>Théorème</u> (Diaconis)

Si μ_n est la loi au temps n d'une marche aléatoire sur G de générateur μ, alors

$$\boxed{4\left(d_{VT}(\mu_n, \mathrm{Haar})\right)^2 \leq \sum_{\lambda \in \hat{G}^*} (\dim \lambda)\, \mathrm{tr}\left(\left(\hat{\mu}^*(\lambda)\right)^n \left(\hat{\mu}(\lambda)\right)^n\right)},$$

cas particulier avec $\mu \in Z(\mathbb{C}G)$:

$$\hat{\mu}(\lambda) = \frac{\mathrm{tr}\, \hat{\mu}(\lambda)}{\dim \lambda}\, \mathrm{id}_\lambda = \mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda(\cdot)]\, \mathrm{id}_\lambda .$$

$$\Longrightarrow 4\, d_{VT}^2 \leq \sum_{\lambda \in \hat{G}^*} (\dim \lambda)^2 \left|\mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda(\cdot)]\right|^{2n} .$$

idée : $|\mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda]| \in [0,1]$.

Si $G = \mathfrak{S}(N)$:

- la représentation triviale est celle qui correspond à $\lambda = (N)$, car $s_{(N)} = h_N = \sum_{\mu \in \mathfrak{Y}(N)} \frac{p_\mu}{z_\mu}$.

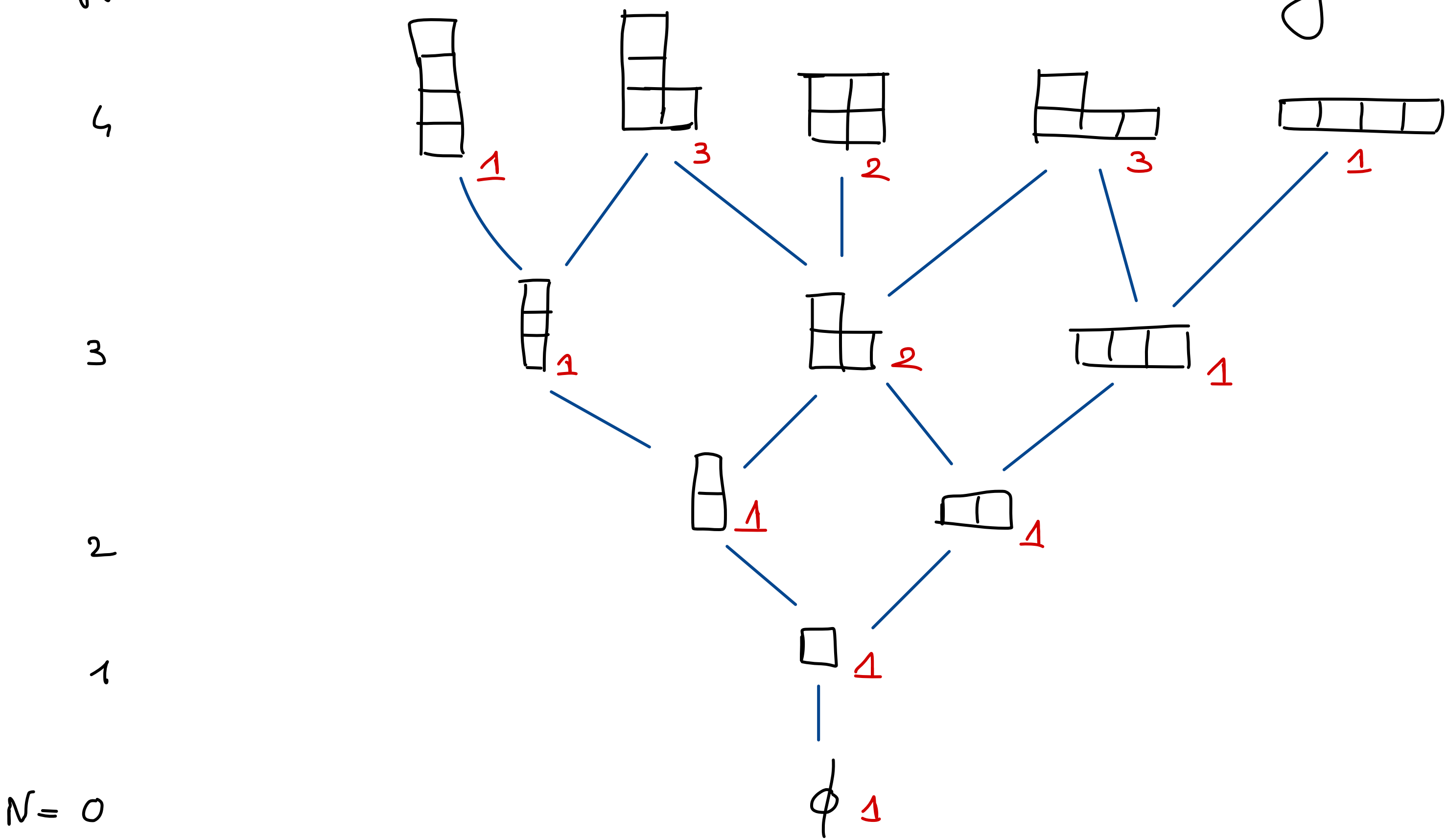
- il y a concurrence entre les puissances $|\mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda]|^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et les dimensions $\dim \lambda \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$.

$\leadsto$ on a coupure pile au temps n où les quantités se compensent.

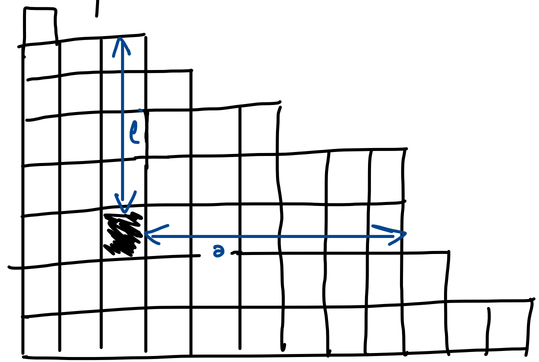
2. La formule des équerres

On a besoin d'estimer pour $\lambda \in \mathfrak{Y}(N)$ la dimension $\dim \lambda$ de la représentation de $\mathfrak{S}(N)$ indicée par la partition λ.

<u>rappel</u> : $\dim \lambda$ = nbre de tableaux standards de forme λ.



Formule plus pratique :



$$h(\blacksquare) = 1 + a(\blacksquare) + \ell(\blacksquare)$$

$=$ longueur d'équerre

Théorème : (Frame, Robinson, Thrall) $\dim \lambda = \dfrac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}$.

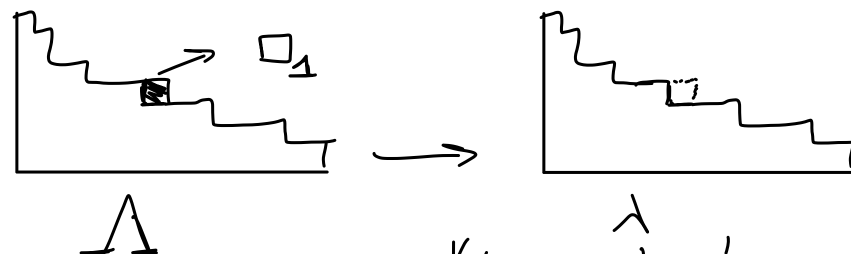
Preuve On considère une marche aléatoire qui descend le long du graphe de Young $\mathcal{Y}$. Notons $\lambda \nearrow \Lambda$ si $\Lambda \setminus \lambda =$ une boîte.

On définit une transition à partir de $\Lambda \in \mathcal{Y}(N+1)$ comme suit :

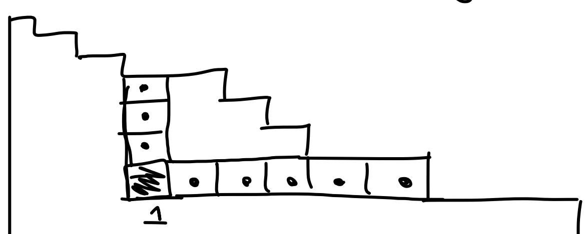
- on tire au hasard l'une des cellules $\square_1$ de Λ avec probabilité uniforme $\frac{1}{N+1}$.

- Si cette cellule est dans le coin supérieur droit, on pose

$\lambda = \Lambda \setminus \square_1$.



- Sinon, on choisit $\square_2$ uniformément dans l'équerre basée en $\square_1$:



puis, $\square_3$ dans l'équerre basée en $\square_2$

$\vdots$

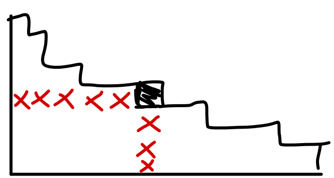
etc. jusqu'à ce qu'on atteigne le bord en $\square_r$

On pose alors $\lambda = \Lambda \setminus \square_r$.

$\longrightarrow$ ceci définit une probabilité de transition $p(\Lambda, \lambda)$ pour $\Lambda \in \mathbb{Y}(N+1)$, $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$, $\lambda \nearrow \Lambda$.

Lemme : $p(\Lambda, \lambda) = \dfrac{1}{N+1} \dfrac{\prod_{\square \in \Lambda} h(\square, \Lambda)}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square, \lambda)}$.

Preuve : Si (x, y) sont les coordonnées de la case qui est dans Λ et pas dans λ, alors les longueurs d'équerres dans λ et dans Λ diffèrent uniquement pour les cases (x', y) avec $x' < x$.
$(x, y') \longrightarrow y' < y$.



Le ratio est donc :

$$\frac{1}{N+1}\prod_{x'=1}^{x-1}\frac{h(x',y)}{h(x',y)-1}\prod_{y'=1}^{y-1}\frac{h(x,y')}{h(x,y')-1}.$$

$$=\frac{1}{N+1}\prod_{x'=1}^{x-1}\left(1+\frac{1}{h(x',y)-1}\right)\prod_{y'=1}^{y-1}\left(1+\frac{1}{h(x,y')-1}\right)$$

$$=\frac{1}{N+1}\sum_{\substack{I\subset[\![1,x-1]\!]\\ J\subset[\![1,y-1]\!]}}\left(\prod_{i\in I}\frac{1}{h(i,y)-1}\prod_{j\in J}\frac{1}{h(x,j)-1}\right)$$

Il faut montrer que cette somme est aussi $p(\Lambda,\lambda)$.

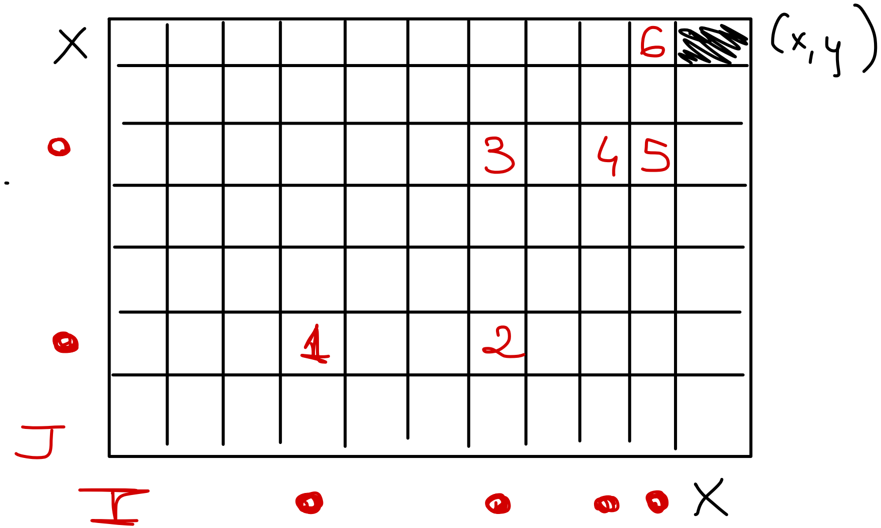
Soit $\square_1=(x_1,y_1)$, $\square_2=(x_2,y_2)$, ..., $\square_r=(x_r,y_r)=(x,y)$.

une suite possible de cases.

On lui associe les deux ensembles :

$$I = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \setminus \{x\}$$

$$J = \{y_1, y_2, \dots, y_r\} \setminus \{y\}.$$



⚠ il peut y avoir des répétitions dans les x_i / y_j

⚠ on peut obtenir (I, J) de plusieurs façons.

On va montrer que :

$$p(\Lambda, \lambda, I, J) = \frac{1}{N+1} \prod_{i \in I} \frac{1}{h(i, y) - 1} \prod_{j \in J} \frac{1}{h(x, j) - 1}.$$

récurrence sur $|I| + |J|$:

- si $|I| + |J| = 0$, la seule possibilité est $\square_1 = \square_r = (x,y)$, qui est choisie avec probabilité $\dfrac{1}{N+1}$.

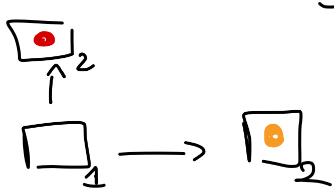
- supposons le résultat vrai jusqu'au rang $s-1$, et considérons I, J tels que $|I| + |J| = s$.

notons que $(x_1, y_1) = \square_1$ peut être obtenu en prenant

$$x_1 = \min(I \cup \{x\})$$
$$y_1 = \min(J \cup \{y\})$$

Alors, (x_2, y_2) est soit $(x_1, \min(J \cup \{y\} \setminus \{y_1\}))$,

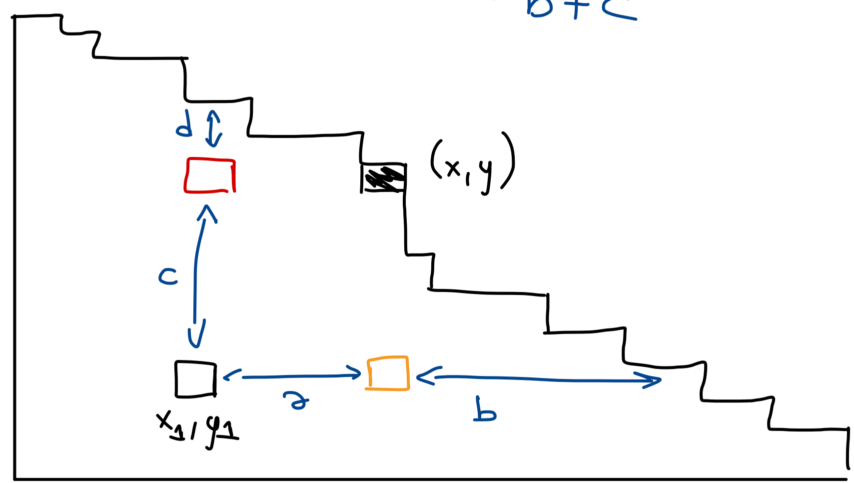
soit $(\min(I \cup \{x\} \setminus \{x_1\}), y_1)$.



Donc, $p(\Lambda, \lambda, I, J) = \dfrac{1}{h(x_1, y_1) - 1}\Big(p(\Lambda, \lambda, I \setminus \{x_1\}, J) + p(\Lambda, \lambda, I, J \setminus \{y_1\})\Big).$

Il faut alors montrer que :

$$1 = \frac{1}{\underbrace{h(x_1, y_1) - 1}_{a+b+c+d}} \Big(\underbrace{h(x_1, y) - 1}_{b+c} + \underbrace{h(x, y_1) - 1}_{a+d} \Big)$$



$\square$.

Preuve de la formule des équerres :

Posons $f(\lambda) = \dfrac{|\lambda|!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square, \lambda)}$, On a $p(\Lambda, \lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{f(\Lambda)}$.

$$1 = \sum_{\lambda \nearrow \Lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\Lambda)} \implies f(\Lambda) = \sum_{\lambda : \lambda \nearrow \Lambda} f(\lambda).$$

Mais cette relation de récurrence est aussi vérifiée par $\dim \lambda = |ST(\lambda)|$

Donc $f(\lambda) = \dim \lambda$. $\square$.

__remarque__ : on a donc une marche aléatoire descendante de transitions $p_{\downarrow}(\Lambda, \lambda) = \dfrac{\dim \lambda}{\dim \Lambda}$.

On peut aussi faire une marche aléatoire montante sur $\mathbb{Y}$ de transitions $p^{\uparrow}(\lambda, \Lambda) = \dfrac{\dim \Lambda}{(N+1)\dim \lambda}$.

<u>exercice</u> : Si $\lambda \sim$ Plancherel $(\mathfrak{S}(n))$, alors $\lambda^{\uparrow} \sim$ Plancherel$(\mathfrak{S}(n+1))$

$\lambda^{\downarrow} \sim$ ——— $(\mathfrak{S}(n-1))$.

3. Les éléments de Jucys–Murphy.

La première formule $\dim \lambda = \operatorname{card} ST(\lambda)$ indique qu'il doit y avoir une base de V^{λ} indexée par les tableaux standards et forme λ.

$$V^{(3,2)} = \operatorname{Vect}\left(e_{\substack{45\\123}} ,\ e_{\substack{35\\124}} ,\ e_{\substack{34\\125}} ,\ e_{\substack{25\\134}} \quad e_{\substack{24\\135}} \right).$$

Situation gênante :

- on sait combien $\mathfrak{S}(N)$ admet de représentations irréductibles.
- on connaît les dimensions de ces représentations.
- on sait calculer les caractères de ces représentations.

mais on ne sait absolument pas décrire l'espace V^λ lui même, et le morphisme $\rho : \mathfrak{S}(N) \to V^\lambda$.

!!!

<u>aparté culturel</u> : construction explicite (inutile) de V^λ.

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_3 & & & \\ \hline x_2 & x_5 & x_7 & \\ \hline x_1 & x_4 & x_6 & x_8 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \Delta_\lambda(x_1, \dots, x_8)$$

$(4,3,1)$

$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_4 - x_5)(x_6 - x_7)$$

Plus généralement, à un tableau standard T de forme λ, on associe

$$\Delta_T(x_1, \dots x_N) = \prod_{\text{colonnes}} \left(\prod_{i<j \in \text{colonne}} (x_i - x_j) \right)$$

Par exemple, si $T =$

4			
3	5	8	
1	2	6	7

,

$$\Delta_T = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)(x_2 - x_5)(x_6 - x_8).$$

<u>Théorème</u> (pénible à démontrer à partir de ce qu'on connaît)

Soit $V^\lambda = \mathrm{Vect}(\sigma \cdot \Delta_\lambda) \subseteq \mathbb{R}[x_1, x_2 \dots x_N]$.

V^λ est la représentation irréductible de $\mathfrak{S}(N)$ de type λ.

Une base de V^λ est formée par les Δ_T, $T \in ST(\lambda)$.

Il existe une autre base plus naturelle de V^λ...

Définition Pour $i \leq N$, le i-ième élément de Jucys-Murphy est $J_i = (1,i) + (2,i) + \cdots + (i-1,i) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}(N)$.

(avec par convention $J_1 = 0$).

Si $i<j$, $$J_i J_j = \sum_{\substack{i' \neq j' \\ i' < i \\ j' < j}} (i',i)(j',j) + \sum_{\substack{a<j \\ a \neq i}} (a,i,j) + (a,j,i).$$

$$= J_j J_i$$

Les $J_{i \leq N}$ engendrent donc une sous-algèbre commutative unitaire dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}(N)$: l'algèbre de Gelfand-Tsetlin $GZ(N)$.

Théorème (Jucys, Murphy, Vershik, Okounkov, ...)

1. $GZ(N)$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathbb{C}\mathfrak{S}(N)$

2. Elle est isomorphe via la transformée de Fourier à

$$\underbrace{\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}(N)} \mathrm{Diag}\left(V^\lambda, (e_T)_{T \in ST(\lambda)}\right)}_{\overset{\wr}{GZ(N)}} \subset \underbrace{\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}(N)} \mathrm{End}(V^\lambda)}_{\overset{\wr}{\mathbb{C}\mathfrak{S}(N)}}$$

où dans chaque V^λ, $(e_T)_{T \in ST(\lambda)}$ est une base indexée par les tableaux standards de type λ, unique à l'action d'une matrice diagonale près si l'on impose :

3. $J_i \cdot e_T = c(i,T)\, e_T$, où $c(i,T)$ est le contenu de la case numérotée i dans T.

$$\text{contenu} = \text{abscisse} - \text{ordonnée}$$

<u>exemple</u> :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5_{-2} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} 3_{-1} & 7_{0} & 8_{1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1_{0} & 2_{1} & 4_{2} & 6_{3} \\ \hline \end{array}$$

$$J_4 \cdot e_T = 2 e_T .$$

4. $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}(N)) \subset GZ(N)$ est l'ensemble des polynômes <u>symétriques</u> en les $J_1, J_2, \dots J_N$.

Application : la classe de conjugaison des transpositions $C_{21^{N-2}}$ est $J_1 + J_2 + \dots + J_N$.

On a donc $C_{21^{N-2}} \cdot e_T = \sum_{\square \in \lambda} c(\square, \lambda) \cdot e_T$ $\forall T \in ST(\lambda)$

et $ch^\lambda(21^{N-2}) \times \binom{N}{2} = \left(\sum_{\square \in \lambda} c(\square, \lambda) \right) (\dim \lambda)$.

$$\chi^\lambda(21^{N-2}) \times \binom{N}{2} = \sum_{\square \in \lambda} c(\square, \lambda).$$

Ce qui permettra de calculer $\mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda]$ avec $\mu = \frac{id}{N} + \frac{2}{N^2} C_{21^{N-2}}$.

...