Examen de seconde session de "Chaînes de Markov"

Vendredi 14 Février 2020 de 13h30 à 16h30

- Les résultats seront **encadrés**, et toute réponse devra être justifiée (sauf exception).
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- Le barème est donné à titre indicatif, pour vous permettre de proportionner vos efforts. Il est sur 25 points.
- Le sujet comporte 3 pages.
- Le devoir dure 3h.
- Les téléphones sont rangés éteints dans les sacs ; en guise d'aide mémoire, vous avez droit au recto d'une feuille manuscrite (par vos soins, pas de photocopie) sur la table.

Exercice 1. [5 points] [Lemme de la cible aléatoire] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible sur un ensemble Ω fini, qui admet une mesure de probabilité stationnaire π. On pose

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{E}_x[\tau_\pi] := \sum_{z\in\Omega} \pi(z)\, \mathbb{E}_x[\tau_z]. \end{aligned}$$

où, comme d'habitude,

$$\tau_z = \tau_z(X) = \min\{t \geq 0, X_t = z\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

est le temps d'atteinte de z par la chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$.

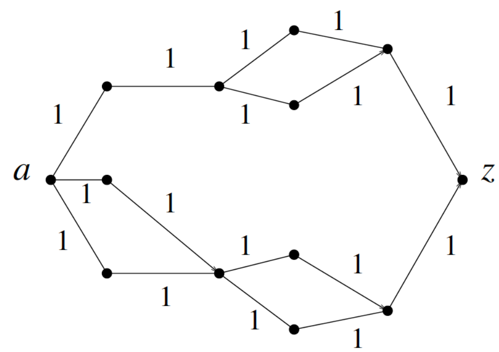
1. Montrer soigneusement que pour tout $x, z \in \Omega$,

$$\mathbb{E}_x[\tau_z^+] = 1 + \sum_{y\in\Omega} P(x,y)\, \mathbb{E}_y[\tau_z].$$

2. Quelle relation vue en cours lie $\mathbb{E}_x[\tau_x^+]$ et $\pi(x)$?
3. En déduire que la fonction f est harmonique pour P sur Ω.
4. Que peut-on en déduire sur la fonction f ? Écrire en toute lettres ce que signifie ce résultat.

Exercice 2. [5 points] [Réseau électrique] Chaque arête du graphe ci-dessous est muni d'une conductance unité ($= 1$).

1. Trouver la résistance équivalente entre les sommets a et z, notée $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$, dans ce réseau. (On précisera bien les differentes étapes de réduction du réseau qui mènent au calcul de la résistance équivalente, à l'aide de schémas par exemple).
2. En déduire $\mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+)$



3. En déduire également le temps de transport entre a et z, $t_{a\leftrightarrow z} := \mathbb{E}_a[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_a]$.

Exercice 3. [15 points] [Fonction génératrice du temps d'atteinte dans le problème de la ruine du joueur] Soit $(X_t; t \geq 0)$ la chaîne de Markov de matrice de transition P sur $\mathbb{N}$ donnée par :

$$P(i,j) = \frac{1}{2} \cdot 1_{|j-i|=1} \text{ pour } i \geq 1, j \geq 0. \tag{1}$$

(On précisera le moment venu la transition depuis l'état 0). Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$\tau_i = \tau_i(X) = \min\{t \geq 0, X_t = i\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ et } \tau_i^+ = \tau_i^+(X) = \min\{t \geq 1, X_t = i\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

le temps d'atteinte de i et le temps de retour en i par la chaîne X respectivement. On notera comme à l'accoutumée $\mathbb{P}_k$ la loi de la chaîne issue de $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(\cdot\,|X_0 = k)$.

On considère, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé *tel que* $|s| < 1$, la fonction génératrice du temps d'atteinte de 0 :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, k \mapsto f(k) := \mathbb{E}_k[s^{\tau_0}] = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}_k(\tau_0 = j)\, s^j \in [-1, 1]$$

1. Que vaut $f(0)$? Observer que $\mathbb{P}_n(\tau_0 \geq n) = 1$ et en déduire $\lim_{n\to\infty} f(n)$.
2. Soit $k \geq 1$. Exprimer $f(k)$ en fonction de $f(k-1)$ et $f(k+1)$.
3. Pour s tel que $0 < |s| < 1$, quelles sont les deux racines du polynôme $x^2 - (2/s)x + 1$?
4. Exprimer la solution générale de la récurrence double satisfaite par $f(k)$ obtenue en question 2 puis, à l'aide des valeurs au bord établies en question 1, en déduire la valeur de $f(k)$.
5. Au vu de la valeur de $f(k)$, trouver une expression simple de $f(k)$ en fonction de $f(1)$ et k.
6. Retrouver ce résultat à l'aide de la propriété de Markov forte.
7. On suppose de plus désormais que $P(0,1) = 1$. Calculer la fonction génératrice du premier temps de retour en 0 pour la marche issue de 0, c'est-à-dire la quantité $\mathbb{E}_0[s^{\tau_0^+}]$.
8. Est-ce que la variable τ_0^+ sous $\mathbb{P}_0$ est intégrable ?

Les deux questions suivantes concernent des extensions du problème précédent

9. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et s comme précédemment. Déterminer par la même méthode la fonction :

$$g : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}, k \mapsto g(k) := \mathbb{E}_k[s^{\tau_0 \wedge \tau_n}] \in [-1, 1].$$

On commencera par déterminer la relation de récurrence satisfaite par $g(k)$ puis on résoudra cette relation étant donné les conditions au bord $g(0)$ et $g(n)$.

10. On suppose *pour cette question seulement* $P(i,j) = p1_{j=i+1} + q1_{j=i-1}$ pour $i \geq 1, j \geq 0$ et $0 < p, q < 1$ avec $p + q = 1$. Déterminer par la même méthode, avec ces nouvelles transitions et pour s comme précédemment, la fonction f. Calculer enfin $\lim_{s\to 1, s<1} \mathbb{E}_1[s^{\tau_0}]$ lorsque $p \leq 1/2$ et lorsque $p > 1/2$. Commenter.

La suite du problème revient sur le premier temps de retour τ_0^+ étudié en question 7. On reprend en particulier les transitions données en (1).

11. Montrer[1] que

$$1 - \sqrt{1-x} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} 2^{-(2k-1)} x^k$$

12. En déduire l'expression suivante :

$$\mathbb{P}_0(\tau_0^+ = 2k) = \frac{1}{k} \binom{2(k-1)}{k-1} 2^{-(2k-1)}$$

et trouver un équivalent de cette quantité à l'aide de la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. Retrouver le résultat sur l'intégrabilité[2] de τ_0^+ établi en question 8.

13. On introduit l'ensemble :

$$\left\{ (x_i; 1 \leq i \leq 2k) \in \{-1, 1\}^{2k} : \left(0 < j < 2k \Rightarrow \sum_{i=0}^{j} x_i > 0 \right); \sum_{i=0}^{2k} x_i = 0 \right\}$$

Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de cet ensemble.

14. <u>Facultatif, seulement s'il vous reste du temps</u> : la forme simple obtenue à la dernière question invite à une preuve directe, de nature combinatoire ; réfléchir à une telle preuve.

---

1. On pourra utiliser librement le fait suivant : le développement de Taylor $x \mapsto (1+x)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$ vaut encore pour α non entier ($\alpha \in \mathbb{C}$) sous réserve d'adopter comme définition du coefficient binomial le coefficient binomial généralisé suivant :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!}$$

(noter que si $\alpha \notin \mathbb{N}$ alors les coefficients associés à des valeurs de $k \geq \alpha$ sont non nuls)

2. (ou son défaut)