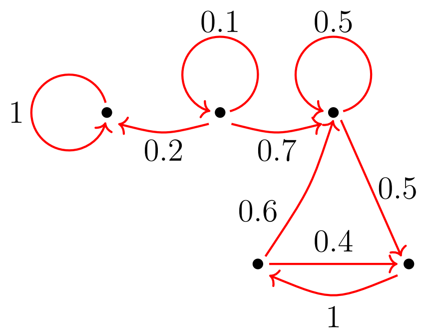
1. Classification des états. Dessinons le graphe de la chaîne de matrice P :



L'état 1 est absorbant : $P(1,1) = 1$. Sous $\mathbb{P}_1$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1. En particulier, 1 est un état récurrent.

L'état 2 n'a aucune flèche pointant vers lui depuis un autre état. Donc, si $X_1 \neq 2$ sous $\mathbb{P}_2$, alors $\tau_2^+ = +\infty$. On a ainsi :

$$\mathbb{P}_2[\tau_2^+ = +\infty] \geq \mathbb{P}_2[X_1 \neq 2] = 0.2 + 0.7 = 0.9 > 0.$$

Ceci implique 2 est un état transient.

Les états $3, 4, 5$ correspondent à une sous-matrice de P qui est encore stochastique. Autrement dit, sous $\mathbb{P}_x$ avec $x \in \{3, 4, 5\}$, tout se passe comme si on regardait une chaîne de Markov de matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, cette matrice est irréductible, donc les 3 états $3, 4, 5$ sont récurrents puisqu'ils ont tous même statut (ils communiquent tous ensemble), et qu'au moins l'un deux est récurrent. Ainsi, la chaîne de matrice P admet un état transient 2, et deux classes d'états récurrents : $\{1\}$ et $\{3, 4, 5\}$.

Sous la mesure $\mathbb{P}_3$, $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 5\}$ avec probabilité 1 : tous les états de la classe de récurrence sont visités infiniment souvent. Sous la mesure $\mathbb{P}_2$, X_n reste en l'état 2 un certain temps, jusqu'à une première transition vers 1 avec probabilité $\frac{2}{9}$, et vers 3 avec probabilité $\frac{7}{9}$. Dans le premier cas, $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2\}$, et dans le second cas, $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 5\}$, puisqu'après avoir atteint l'état 3, la chaîne explore la classe de récurrence $\{3, 4, 5\}$, et visite ces états une infinité de fois.

2. Récurrence ou transience de la marche aléatoire sur la droite.

(a) La chaîne de Markov de matrice P est irréductible si et seulement si le graphe orienté associé $\mathcal{G}_P$ est connexe, et ici c'est clairement le cas. On peut aussi donner une preuve plus explicite de l'irréductibilité, en raisonnant comme suit. Soit $k \neq l$ deux états de $\mathbb{Z}$; on supposera $k < l$, l'autre cas étant tout à fait analogue. Alors, $P^{l-k}(k,l) > 0$, car :

$$P^{l-k}(k,l) \geq P(k,k+1)\, P(k+1,k+2) \cdots P(l-1,l) = p^{k-l} > 0.$$

Donc, pour toute paire d'états $(k \neq l)$, il existe $n \geq 1$ tel que $P^n(k,l) > 0$: la chaîne est donc irréductible.

(b) Une représentation de la chaîne de Markov est

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

avec les variables ξ_n i.i.d., et $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p$. Par la loi des grands nombres, avec probabilité 1,

$$\frac{X_n}{n} \to \mathbb{E}[\xi_1] = 2p - 1.$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $2p - 1 \neq 0$, et on a donc

$$X_n \to \begin{cases} +\infty & \text{si } p > \frac{1}{2}, \\ -\infty & \text{si } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Or, si $X_n \to +\infty$ par exemple, alors la chaîne ne peut visiter l'état 0 qu'un nombre fini de fois, donc 0 est transient. Comme la chaîne est irréductible, on en déduit que tous les états sont transients si $p \neq \frac{1}{2}$.

(c) Comme les variables ξ_n sont dans ± 1, $X_n \equiv n \bmod 2$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_0$. Alors,

$$P^{2n+1}(0,0) = \mathbb{P}_0[X_{2n+1} = 0] \leq \mathbb{P}_0[X_{2n+1} \text{ est pair}] = 0.$$

Calculons maintenant $P^{2n}(0,0) = \mathbb{P}_0[X_{2n} = 0]$. Chaque chemin $0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{2n} = 0$ avec $|x_i - x_{i-1}| = 1$ pour tout i a pour probabilité $(\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{4^n}$. Pour construire un tel chemin, il suffit de choisir quels pas $x_i - x_{i-1}$ seront égaux à $+1$; les autres pas seront égaux à -1, et comme $x_{2n} = 0$, il y a autant de pas positifs $+1$ que de pas négatifs -1. On a donc :

$$(\text{nombre de chemins}) = (\text{nombre de façons de choisir } n \text{ pas positifs parmi } 2n) = \binom{2n}{n}.$$

On conclut que

$$P^{2n}(0,0) = (\text{nombre de chemins}) \times (\text{probabilité d'un chemin}) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

(d) On remarque que :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2}\binom{2n-2}{n-1} = 4\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\binom{2n-2}{n-1}.$$

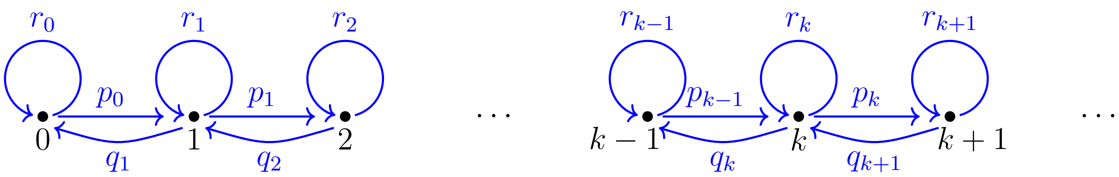
Ceci implique par récurrence sur n que $P^{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. Si $n = 1$, on a en effet $P^2(0,0) = \frac{1}{2}$. Supposons le résultat établi jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} P^{2n}(0,0) &= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)P^{2n-2}(0,0) \\ &\geq \frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{2n-2} \geq \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Donc, avec $p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(0,0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{2n}(0,0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$. Ceci implique la récurrence de la chaîne (irréductible) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $\mathbb{Z}$.

3. Chaîne de vie et de mort, I.

(a) Le graphe de la chaîne de vie et de mort est :



On retrouve le modèle de file d'attente en posant $r_k = 0$ pour tout k, $p_0 = 1$, $p_{k\geq 1} = p$ et $q_{k\geq 1} = 1 - p$.

(b) Pour avoir l'irréductibilité, il faut et il suffit que le graphe orienté dessiné précédemment soit connexe. Ceci est le cas si :

$$p_k > 0 \quad \forall k \geq 0 \quad ; \quad q_k > 1 \quad \forall k \geq 1.$$

(c) On introduit comme dans le modèle de file d'attente la fonction

$$f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty].$$

Cette fonction vérifie $f(k) = 1$, $f(l) = 0$ et pour $k < x < l$,

$$f(x) = r_x\, f(x) + q_x\, f(x-1) + p_x\, f(x+1).$$

C'est une conséquence immédiate de la méthode d'un pas en avant (voir le corrigé de l'exercice 2 de la feuille 1). Comme $r_x = 1 - p_x - q_x$, on peut réécrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$f(x+1) - f(x) = \frac{q_x}{p_x}\,(f(x) - f(x-1)).$$

On a donc $\delta_f(x) = A \prod_{j=1}^{x} \frac{q_j}{p_j}$ pour une certaine constante A, et pour tout x dans l'intervalle $[\![k, l]\!]$. Avec la définition de ϕ donnée dans l'énoncé, on peut donc écrire :

$$\delta_f(x) = A\,(\phi(x+1) - \phi(x)).$$

Puis, $f(x) = f(k) + \sum_{y=k}^{x-1} \delta_f(y) = 1 + A\,(\phi(x) - \phi(k))$, et la constante A est obtenue en évaluant cette identité en $x = l$:

$$0 = f(l) = 1 + A\,(\phi(l) - \phi(k)) \qquad ; \qquad A = -\frac{1}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

Ainsi,

$$f(x) = 1 - \frac{\phi(x) - \phi(k)}{\phi(l) - \phi(k)} = \frac{\phi(l) - \phi(x)}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

(d) Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] = r_0 + p_0\,\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] \geq (r_0 + p_0)\,\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty].$$

Par ailleurs, sous $\mathbb{P}_1$, la suite des temps d'atteinte $(\tau_l)_{l\geq 1}$ est strictement croissante, donc la suite $(\mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty])_{l\geq 1}$ est croissante et

$$\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \lim_{l\to\infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty] = \lim_{l\to\infty} 1 - \frac{1}{\phi(l)} = 1 - \frac{1}{\phi(+\infty)}.$$

Si $\phi(+\infty) = +\infty$, alors $\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = 1$, donc $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] = 1$ et la chaîne est récurrente irréductible.

Pour la réciproque, notons qu'on a de nouveau par la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = p_0\,\mathbb{P}_1[\tau_0 = +\infty] = p_0\,(1 - \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty]) = \frac{p_0}{\phi(+\infty)}.$$

Si la chaîne est récurrente irréductible, alors $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = 0$, donc $\phi(+\infty) = +\infty$.

(e) Par transience de la chaîne, pour tout intervalle fini $[\![0, M]\!]$, la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne visite qu'un nombre fini de fois les états de cet intervalle, donc il existe N (aléatoire) tel que $X_n > M$ pour tout $n \geq N$. Ceci veut dire que $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ avec probabilité 1.

(f) Le rapport $\frac{q_j}{p_j}$ est équivalent à $\frac{1-2Cj^{-\alpha}}{1+2Cj^{-\alpha}} \simeq 1 - 4Cj^{-\alpha} \simeq \exp(-4Cj^{-\alpha})$. Le produit $\prod_{j=1}^{l} \frac{q_j}{p_j}$ a donc le même comportement asymptotique que

$$\exp\left(-4C\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j^\alpha}\right).$$

Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{j^\alpha}$ est convergente, donc le produit est borné inférieurement par une constante strictement positive. Alors, $\phi(l) \geq Kl$ pour une certaine constante $K > 0$, et $\phi(+\infty) = +\infty$. Ceci implique que la chaîne est récurrente.

Si $\alpha < 1$, alors la série $\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{j^\alpha}$ est divergente, et de comportement asymptotique équivalent à

$$\int^{l} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, l^{1-\alpha}.$$

Les termes de la série $\phi(+\infty) = \sum_{l=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{l-1}\frac{q_j}{p_j}$ décroissent donc comme $\exp(-K\, l^{1-\alpha})$, et $\phi(+\infty) < +\infty$: la chaîne est donc transiente.

Finalement, si $\alpha = 1$, en supposant que $\frac{q_j}{p_j} \simeq \exp(-4Cj^{-1} + O(j^{-\beta}))$ avec $\beta > 1$, on voit que $\prod_{j=0}^{l-1}\frac{q_j}{p_j}$ a le même comportement asymptotique que

$$\exp(-4C\,\log l) = l^{-4C}.$$

La série $\phi(+\infty)$ est donc convergente si et seulement si $C > \frac{1}{4}$; dans ce cas, on a une chaîne transiente. Si $C \leq \frac{1}{4}$, alors la chaîne est récurrente.

4. Matrices sous-stochastiques et critère de transience.

(a) Comparons $\sigma_{Q^n}(x)$ et $\sigma_{Q^{n+1}}(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{Q^{n+1}}(x) &= \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q^{n+1}(x,y) = \sum_{y,z\in\mathfrak{X}} Q^n(x,z)\,Q(z,y)\\ &\leq \sum_{z\in\mathfrak{X}} Q^n(x,z) \quad \text{car } Q \text{ est sous-stochastique,}\\ &\leq \sigma_{Q^n}(x).\end{aligned}$$

En particulier, $\sigma_{Q^n}(x) \leq \sigma_Q(x) \leq 1$, et la matrice Q^n est sous-stochastique pour tout $n \geq 1$.

(b) Par définition, $h(x)$ est la limite décroissante de la suite $(\sigma_{Q^n}(x))_{n\geq 1}$. On calcule alors :

$$(Qh)(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y)\,h(y) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y)\,\sigma_{Q^n}(y)\right) = \lim_{n\to\infty}\sigma_{Q^{n+1}}(x) = h(x).$$

Justifions l'interversion de somme et de limite : les éléments $\sigma_{Q^n}(y)$ sont dans $[0,1]$, et la série $\sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y)$ est convergente, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

Soit k une solution positive de l'équation $k = Qk$ avec $0 \leq k(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. On a :

$$k(x) = (Qk)(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y)\,k(y) \leq \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y) = \sigma_Q(x).$$

Comme on a aussi $k = Q^n k$ pour tout $n \geq 1$, la même preuve donne $k(x) \leq \sigma_{Q^n}(x)$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $k(x) \leq h(x)$.

(c) La matrice Q est obtenue à partir de P en changeant la colonne x_0 et en mettant des 0 à la place : elle est donc évidemment sous-stochastique. Posons $k(x) = \mathbb{P}_x[\forall n \geq 1,\ X_n \neq x_0]$. Par la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} k(x) &= \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\,\mathbb{P}_y[\forall n \geq 0,\ X_n \neq x_0] \\ &= \sum_{y\neq x_0} P(x,y)\,\mathbb{P}_y[\forall n \geq 1,\ X_n \neq x_0] \\ &= \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y)\,k(y) = (Qk)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, k est solution dans $[0,1]$ de l'équation $k = Qk$.

(d) Si la chaîne de Markov est transiente, alors

$$k(x_0) = \mathbb{P}_{x_0}[\forall n \geq 1,\ X_n \neq x_0] = \mathbb{P}_{x_0}[\tau_{x_0}^+ = +\infty] > 0,$$

donc il existe une solution non nulle au système. Pour la réciproque, on va montrer que la fonction k de la question précédente est en fait la solution *maximale* de l'équation $k = Qk$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \sigma_{Q^n}(x) &= \sum_{y_1,\ldots,y_n\in\mathfrak{X}} Q(x,y_1)\,Q(y_1,y_2)\cdots Q(y_{n-1},y_n) \\ &= \sum_{y_1,\ldots,y_n\in\mathfrak{X}\setminus\{x_0\}} \mathbb{P}_x[X_1 = y_1,\ X_2 = y_2,\ldots,X_n = y_n] \\ &= \mathbb{P}_x[\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ X_k \neq x_0]. \end{aligned}$$

Donc, $h(x) \leq \mathbb{P}_x[\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ X_k \neq x_0]$ pour tout $n \geq 1$, et en passant à la limite, on obtient $h(x) \leq k(x)$. Donc, k est la solution maximale, et s'il existe une solution non nulle, alors $k \neq 0$, ce qui implique que la chaîne est transiente. En effet, fixons x tel que $k(x) > 0$. Si $x = x_0$, c'est fini, car $k(x_0) = \mathbb{P}_{x_0}[\tau_{x_0}^+ = +\infty]$. Sinon, comme la chaîne est irréductible, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $Q^n(x_0,x) > 0$, et alors,

$$k(x_0) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q^n(x_0,y)\,k(y) \geq Q^n(x_0,x)\,k(x) > 0.$$

(e) Pour le modèle de file d'attente, l'équation $k = Qk$ avec $x_0 = 0$ s'écrit :

$$k(0) = k(1) = A \text{ constante} \qquad ; \qquad k(2) = \frac{k(1)}{p} = \frac{A}{p}$$

et

$$k(x) = p\,k(x+1) + (1-p)\,k(x-1)$$

pour tout $x \geq 2$. Ainsi,

$$k(x+1) - k(x) = \frac{1-p}{p}\,(k(x) - k(x-1)) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x-1}(k(2)-k(1)) = A\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}.$$

Avec $r = \frac{1-p}{p}$, on a donc

$$k(x) = k(2) + \sum_{y=2}^{x-1} k(y+1) - k(y) = \begin{cases} A\,\frac{1-r^x}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \\ A\,x & \text{si } r = 1, \end{cases}$$

pour tout $x \geq 2$. Pour avoir une solution bornée dans $[0,1]$ et non triviale, il faut donc $r < 1$, c'est-à-dire que $p > \frac{1}{2}$. La chaîne est donc transiente pour $p > \frac{1}{2}$ et récurrente pour $p \leq \frac{1}{2}$.

5. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, II.

(a) Soit f harmonique sur $\mathfrak{X} \setminus A$, égale à 0 sur A. On considère un point $x_0 \notin A$ tel que $f(x_0)$ soit maximum, égal à M. Supposons $M > 0$. Alors,

$$M = f(x_0) = (Pf)(x_0) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x_0, y)\, f(y)$$

est la moyenne d'éléments plus petits que M, donc tous les voisins y de x_0 dans le graphe $\mathcal{G}_P$ de la chaîne de Markov doivent aussi vérifier $f(y) = M$. Alors, de proche en proche, comme la chaîne est irréductible, on atteint un point $y \in A$ tel que $f(y) = M$, ce qui contredit l'hypothèse $f(y) = 0$ pour $y \in A$. Ainsi, $M \leq 0$, et symétriquement, on montre que $m = \min\{f(y),\, y \notin A\} \geq 0$, donc f est constante égale à 0.

(b) Dans le cas général, si f_1 et f_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet pour la paire (A, g), alors la différence $f_1 - f_2$ est solution pour la paire $(A, 0)$, donc par la question précédente, $f_1 - f_2 = 0$ et $f_1 = f_2$. On a donc établi en toute généralité l'unicité de la solution à un problème de Dirichlet.

(c) La chaîne finie irréductible est automatiquement récurrente irréductible, donc tous les états $x \in \mathfrak{X}$ sont visités (et même infiniment souvent). Ceci implique, quelque soit π_0, $\tau_A < +\infty$ presque sûrement.

(d) Comme $\tau_A < +\infty$, on peut bien définir la variable X_{τ_A}, puis $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_A)})]$. Si $x \in A$, alors $\tau_A = 0$, donc $X_{\tau_A} = x$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_x$, et $f(x) = g(x)$. Supposons maintenant $x \notin A$. Alors, par la propriété de Markov,

$$f(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x, y)\, f(y) = (Pf)(x).$$

Donc, la fonction f est l'unique solution du problème de Dirichlet.

6. La chaîne de Markov des arbres de Galton–Watson.

(a) Notons $\xi_n = (\xi_{n,m})_{m \geq 1}$, qui est un élément aléatoire de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. On peut écrire $X_{n+1} = f(X_n, \xi_n)$ pour une certaine fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$:

$$f(k, (x_m)_{m \geq 1}) = \sum_{m=1}^{k} x_m.$$

Comme les suites aléatoires ξ_n sont des variables i.i.d. dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et indépendantes de X_0, par le théorème de représentation des chaînes de Markov, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est :

$$P(k, l) = \mathbb{P}[f(k, \xi_0) = l] = \mathbb{P}[\xi_{0,1} + \xi_{0,2} + \cdots + \xi_{0,k} = l] = \sum_{l = l_1 + \cdots + l_k} \mu(l_1) \cdots \mu(l_k) = \mu^{*k}(l).$$

(b) Par définition, si $X_n = 0$, alors $X_{n+1} = 0$, donc $P(0, 0) = 1$ et 0 est un état absorbant, donc récurrent. La chaîne n'est donc pas irréductible, puisque 0 ne communique qu'avec lui-même.

(c) Si $\mu(0) > 0$, alors $P(k, 0) = (\mu(0))^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc tout état communique avec 0. Tout état $k \geq 1$ est donc transient. En effet, supposons par l'absurde $k \geq 1$ récurrent. La relation de communication est une relation d'équivalence sur les états récurrents, donc comme k communique avec 0, 0 communique avec k. C'est une contradiction, car 0 ne communique qu'avec lui-même.

Une trajection de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc deux possibilités sous $\mathbb{P}_1$:

- soit elle visite 0 à un certain temps t, et elle reste alors stationnaire à 0 : $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ (extinction de l'espèce).
- soit elle ne visite pas 0. Alors, toute partie finie $A = [\![1, M]\!]$ n'est visitée qu'un nombre fini de fois par transience des éléments de cette partie, donc :
$$\forall M \geq 1,\ \exists N \geq 0,\ (n \geq N) \Rightarrow (X_n > M).$$
avec probabilité 1. On a donc dans ce cas $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$.

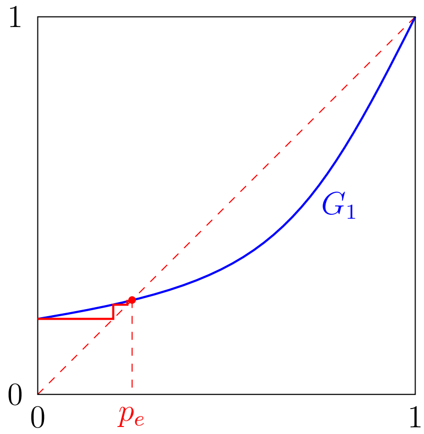
On conclut que $\mathbb{P}_1[\lim_{n\to\infty} X_n = 0] + \mathbb{P}_1[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty] = 1$.

(d) Comme 0 est un état absorbant,
$$\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\!\uparrow \{X_n = 0\}.$$
Par conséquent, $p_e = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1[X_n = 0]$. Sous la mesure $\mathbb{P}_1$, X_1 a pour loi μ, donc
$$G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_1 = k]\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k.$$
Supposons établie jusqu'au rang n la formule $G_n(s) = (G_1)^{\circ n}(s)$. Alors,
$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_{n+1} = k]\, s^k \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j,\ X_{n+1} = k]\, s^k \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j]\, P(j,k)\, s^k. \end{aligned}$$
Or, si j est fixé, alors
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(j,k)\, s^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_j=k} \mu(k_1)\cdots\mu(k_j)\, s^k \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \mu(k_1)\, s^{k_1}\right)\cdots\left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \mu(k_j)\, s^{k_j}\right) \\ &= (G_1(s))^j. \end{aligned}$$
Donc, $G_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j]\, (G_1(s))^j = G_n(G_1(s)) = (G_1)^{\circ(n+1)}(s)$. La formule $G_n = (G_1)^{\circ n}$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

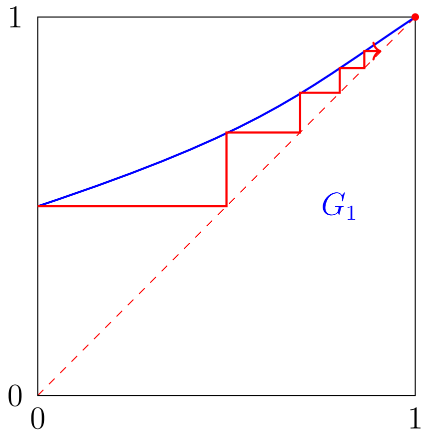
Si l'on pose $s = 0$, on obtient
$$G_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = k]\, 0^k = \mathbb{P}_1[X_n = 0].$$
Donc, $p_e = \lim_{n\to\infty} G_n(0) = \lim_{n\to\infty} (G_1)^{\circ n}(0)$.

(e) La fonction $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k$ est croissante, convexe, bien définie au moins pour $s \in [0,1]$. Sa dérivée sur cet intervalle est
$$G_1'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mu(k)\, s^{k-1}.$$

En particulier, $G_1'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mu(k) = m$. Si $m > 1$, G_1 et la suite $(G_1)^{\circ n}(0)$ ont l'aspect suivant (considérer les abscisses successives des points sur l'"escalier" et sur la diagonale) :



On a donc dans ce cas $p_e < 1$. Inversement, si $m \leq 1$, alors G_1 et la suite $(G_1)^{\circ n}(0)$ ont l'aspect suivant :



On a donc dans ce cas $p_e = 1$.