PRÉSENTATION DU DOMAINE DE RECHERCHE ET DES TRAVAUX

Pierre-Loïc Méliot

Né le 18 décembre 1985 à Saint-Saulve (59), France.

Maître de conférences en mathématiques (section CNU 25) à l'Université Paris-Sud, au sein du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay (LMO, UMR 8628), depuis septembre 2013.

Ce document présente mes activités de recherche, et les travaux correspondants depuis que je suis maître de conférences à Orsay. Il détaille également des projets de recherches pour les années à venir. Des informations complémentaires (en particulier, un curriculum vitæ et le mémoire d'habilitation) peuvent être trouvées sur ma page web : https://www.math.u-psud.fr/∼meliot/.

Dans le cadre de mes recherches, j'étudie des objets aléatoires de natures diverses (matrices et graphes aléatoires, fonctions arithmétiques d'entiers aléatoires, objets combinatoires, *etc.*) en utilisant des outils d'analyse harmonique. L'analyse harmonique s'entend ici au sens large : l'analyse de Fourier classique sur la droite réelle (transformée de Fourier de lois de variables numériques), et la théorie des représentations des groupes finis, compacts ou de Lie (transformée de Fourier non-commutative de fonctions sur un groupe). Les deux sections de ce document expliquent ces deux aspects de mes travaux, en précisant les publications correspondantes, ainsi que les projets de recherche actuellement en cours et qui prolongeront ces avancées.

1. Comportement asymptotique de variables aléatoires par le prisme de la convergence mod-ϕ

1.1. Ratio de transformées de Fourier ou de Laplace. Le premier sous-domaine de mes recherches porte sur des techniques générales d'étude du comportement asymptotique de variables aléatoires numériques. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. S'il existe une renormalisation $(X_n/s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie un théorème central limite, alors on peut assez souvent préciser ce résultat en exhibant une suite de paramètres $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et une fonction continue $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX_n}]\,\mathrm{e}^{-\frac{t_n z^2}{2}} \to_{n\to\infty} \psi(z) \quad \text{localement uniformément sur le plan complexe.}$$

Autrement dit, X_n est égale à une gaussienne de variance t_n, plus un résidu qui est asymptotiquement encodé au sens des transformées de Laplace ou de Fourier par la fonction ψ. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens mod-gaussien avec paramètres $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et fonction limite ψ. La théorie de la convergence mod-gaussienne a été développée au cours des dix dernières années, avec le double objectif suivant :

- identifier les conséquences probabilistes d'un énoncé de convergence mod-gaussienne : précisions sur le théorème central limite pour $X_n/\sqrt{t_n}$, principes de grandes déviations, estimées pour la vitesse de convergence dans le théorème central limite, théorèmes limites locaux, inégalités de concentration.
- déterminer de larges classes de variables aléatoires qui convergent au sens mod-gaussien (ce qui en général demande sensiblement plus de travail que la preuve d'un simple théorème central limite).

Ainsi, la convergence des ratios de transformées de Laplace permet une approche unifiée de tous les types de résultats asymptotiques possibles pour les lois d'une suite de variables aléatoires (§1.2), et par ailleurs, on peut donner des conditions suffisantes assez générales qui impliquent cette convergence des ratios (§1.3). Notons qu'une généralisation de cette méthode est possible avec à la place de la gaussienne une loi de référence ϕ infiniment divisible arbitraire : c'est la théorie de la convergence mod-ϕ (en particulier, avec un exposant de Lévy–Khintchine $e^z - 1$ au lieu de z^2, on obtient la convergence mod-Poisson).

1.2. **Conséquences probabilistes et principaux exemples.** Dans (A6), il a été montré que la convergence mod-ϕ impliquait des principes de grandes déviations ou de déviations modérées précises (c'est-à-dire avec un équivalent asymptotique de la probabilité de déviation, au lieu d'un équivalent du logarithme). Dans (A5) et (A4), ces résultats sont complétés par l'estimation de la vitesse de convergence dans le théorème central limite, et par des théorèmes limites locaux pour les variables mod-gaussiennes ou plus généralement mod-stables. Le cas spécifique des variables aléatoires discrètes qui convergent au sens mod-Poisson est traité en détail dans (A3) : dans ce contexte, on dispose de très bonnes estimées de la distance en variation totale par rapport à la loi de référence, ainsi que de techniques pour améliorer la vitesse de convergence de ces schémas d'approximation. Finalement, dans un cadre restreint de la convergence mod-gaussienne (celui de la méthode des cumulants, voir §1.3), les résultats précédents ont été complétés dans (A2) par des inégalités de concentration.

Donnons quelques exemples importants d'applications de ces résultats théoriques (pour chacun de ces exemples, le type d'estimées qui ont été nouvellement obtenues grâce à nos méthodes est indiqué par l'article correspondant, conformément au paragraphe ci-dessus) :

— nombre de cycles ou de montées dans une permutation aléatoire (A3)-(A6) ; plus généralement, statistique d'objets combinatoires aléatoires avec série génératrice à singularité algébrique-logarithmique (A3) ;

— nombre de diviseurs premiers d'un entier aléatoire, ou plus généralement fonction arithmétique dont la fonction L satisfait les hypothèses de Selberg–Delange (A3)-(A6) ;

— polynômes caractéristiques de grandes matrices aléatoires choisies dans des groupes compacts (A4)-(A6) ;

— magnétisation du modèle d'Ising : (A7) pour la dimension 1, avec vitesse de convergence dans le cas critique, et (A5) pour la dimension $d \geq 2$;

— nombre de points d'un processus ponctuel déterminantal à noyau localement de carré intégrable (A4)-(A5)-(A6) ;

— motifs dans un graphe ou dans une permutation aléatoire (A2)-(A5)-(A6) ;

— observable polynomiale d'une partition aléatoire choisie suivant une mesure spectrale centrale, ou d'un modèle d'espace métrique mesuré aléatoire (A1)-(A2)-(A5)-(A6).

1.3. **Techniques d'analyse et méthode des cumulants.** Pour chaque type d'objet précédemment décrit, il a été nécessaire de perfectionner des techniques déjà existantes et donnant l'asymptotique des transformées de Fourier ou de Laplace, ou de développer de nouvelles techniques à cet effet. Donnons une liste non-exhaustive de ces techniques, et leurs champs d'application respectifs.

— méthode de Selberg–Delange (A3)-(A6) : elle permet le transfert des propriétés analytiques des fonctions L de fonctions arithmétiques vers des théorèmes limites taubériens vérifiés par les transformées de Laplace de ces fonctions arithmétiques évaluées en un entier aléatoire $n \in [\![1, N]\!]$.

— analyse de singularité (A3)-(A6) : c'est l'analogue de la méthode précédente lorsque l'entier aléatoire est remplacé par un objet combinatoire aléatoire, et lorsque la fonction L est remplacée par la fonction génératrice de la statistique étudiée.

— intégrales de Selberg ou déterminants de Toeplitz (A4)-(A6) : une formule exacte pour une intégrale matricielle, éventuellement en termes d'un déterminant de Toeplitz ou de Fredholm, peut être analysée pour obtenir l'asymptotique de fonctions de matrices aléatoires (polynôme caractéristique, nombre de valeurs propres dans un domaine).

Une autre méthode cruciale pour démontrer une convergence mod-gaussienne et ses conséquences probabilistes est l'étude des cumulants

$$\kappa^{(r)}(X_n) = [z^r]\ \left(\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX_n}]\right)$$

de la suite de variables aléatoires. Ces quantités ont des propriétés combinatoires remarquables, et elles sont dans certains cas bien mieux adaptées que les moments pour l'étude asymptotique. La raison en est que, dans de nombreux cas de normalité asymptotique, on a non seulement

$$\kappa^{(r)}(Y_n) \to 0 \qquad \forall r \geq 3$$

pour une renormalisation convenable Y_n des variables X_n, mais en fait $\kappa^{(r)}(Y_n) = O((\varepsilon_n)^{r-2})$ avec $\varepsilon_n \to 0$; autrement dit, les cumulants d'ordre élevé tendent de plus en plus vite vers 0. C'est cette propriété qui mène à des estimées de vitesse de convergence, de grandes déviations ou des inégalités de concentration. Dans (A5)-(A6), des inégalités fondamentales pour un tel contrôle des cumulants ont été établies lorsque le modèle aléatoire sous-jacent admet un graphe de dépendance ou un graphe de dépendance pondéré. Dans (A2), ces techniques ont permis la découverte de familles très larges de modèles aléatoires dont les observables sont génériquement mod-gaussiennes. Ces familles de modèles ont été appelées espaces de modules mod-gaussiens, et une question importante dans ce contexte est la détermination des modèles singuliers de ces familles. Dans (A1), il a été montré que l'approximation d'un espace métrique mesuré complet par un modèle discret était singulière (avec des fluctuations beaucoup plus petites que génériquement, et non gaussiennes) si et seulement si l'espace métrique mesuré en question était un espace homogène compact. Une conjecture du même type porte sur les modèles de graphons singuliers, voir le paragraphe suivant.

1.4. **Projets de recherche.** Détaillons maintenant quelques projets de recherche en lien avec la théorie de la convergence mod-gaussienne précédemment décrite : ils sont tous en cours de réalisation avec mes collaborateurs, et classés par avancement décroissant (la liste est non exhaustive).

— *identification des modèles de graphons singuliers*. Dans (A2), la convergence mod-gaussienne des nombres de sous-graphes dans un graphe aléatoire associé à un graphon ω a été établie, avec des fluctuations génériquement d'ordre $n^{-1/2}$ pour les densités de sous-graphes. Dans (A6), le même résultat a été établi pour les graphes d'Erdős–Rényi, mais cette fois-ci avec des fluctuations d'ordre n^{-1}. Il est conjecturé que les seuls graphons donnant des fluctuations de cet ordre (donc, plus petites) sont les graphons constants correspondant aux graphes aléatoires d'Erdős–Rényi. Très récemment, j'ai montré que tout graphon singulier satisfaisait au même type de théorème central limite qu'un graphon constant (voir la prépublication (A0)). La preuve de ce résultat utilise en particulier des équations cachées vérifiées par les cumulants de tout modèle singulier d'un espace de module mod-gaussien. Cette avancée relie la conjecture sur les graphons singuliers à un problème de perturbation aléatoire du spectre d'un opérateur linéaire.

— *grandes déviations précises de modèles matriciels*. Dans (A6), la convergence mod-gaussienne des logarithmes $\log(\det(I_N - M_N))$ des polynômes caractéristiques de matrices aléatoires choisies dans des groupes compacts classiques a donné des estimées des déviations modérées d'ordre $O(\log N)$. Très récemment, il a été réalisé que la méthode pouvait être perfectionnée pour obtenir cette fois-ci les grandes déviations précises, jusqu'à l'ordre $O(N)$. Par ailleurs, un théorème de comparaison permet de traiter également les polynômes caractéristiques des matrices des ensembles β circulaires, seul le cas $\beta = 2$

étant connu jusqu'ici pour les grandes déviations. Enfin, les variables aléatoires en question étant à valeurs complexes, des phénomènes multi-dimensionnels non triviaux se produisent lors du calcul de ces probabilités de déviations.

— *vitesse de convergence en loi des ensembles β circulaires*. Dans le même contexte des CβE ensembles, un résultat très célèbre dû à Johansson affirme que pour $\beta = 2$, les traces de puissances $\mathrm{Tr}((M_N)^k)$ convergent pour $k \geq 1$, $N \to \infty$ vers des gaussiennes complexes indépendantes, avec une vitesse de convergence pour la distance de Kolmogorov super-exponentielle d'ordre $O(\exp(-cN \log N))$. Si $\beta \neq 2$, il est conjecturé que la vitesse de convergence pour le théorème central limite analogue (démontré assez récemment par Jiang–Matsumoto) est beaucoup plus faible. Des calculs exacts sur les cumulants de ces variables, soit à l'aide des polynômes de Jack, soit en utilisant les modèles matriciels penta-diagonaux sous-jacents, tendent à montrer que l'ordre de grandeur de la vitesse de convergence pour $\beta \neq 2$ est $O(N^{-1})$. L'adaptation de la technique combinatoire des cumulants à ces objets est un défi majeur, qui permettrait sans doute une meilleure compréhension des « théorèmes centraux limites sans renormalisation » fréquents en théorie des matrices aléatoires.

— *méthode des cumulants pour les systèmes dynamiques mélangeants*. Dans (A5), il a été redémontré à l'aide de la méthode des cumulants que les fonctionnelles linéaires de chaînes de Markov vérifiaient des estimées de normalité asymptotique de type Berry–Esseen. La preuve repose sur un argument combinatoire à l'aide de graphes de dépendance pondérés, et sur le théorème de Perron–Frobenius isolant la plus grande valeur propre de la matrice de transition. L'argument passe assez facilement au cas où l'on a un opérateur markovien quasi-compact en dimension infinie (en particulier, on peut l'adapter aux mouvements browniens sur des groupes de Lie compacts). Plus généralement, on pense pouvoir adapter cet argument aux systèmes dynamiques mélangeants dont les fonctionnelles linéaires ont des transformées de Fourier qui ont une représentation de type Nagaev–Guivarc'h avec un opérateur quasi-compact. L'exemple type est fourni par les produits de matrices aléatoires et le théorème central limite de Furstenberg–Kesten. L'intérêt de la méthode des cumulants dans ce contexte est que les preuves ne requiéreraient plus de théorie de perturbation des opérateurs (c'est souvent l'un des points délicats). On obtiendrait aussi des inégalités de concentration nouvelles pour ces systèmes dynamiques.

(A0) *A central limit theorem for singular graphons*. Soumis, 2021.
https://www.math.u-psud.fr/~meliot/files/singular_final.pdf

(A1) *Fluctuations of the Gromov–Hausdorff sample model*, avec Jacques De Catelan. À paraître dans Electronic Journal of Probability, 2021.
https://www.math.u-psud.fr/~meliot/files/samplemodel.pdf

(A2) *Graphons, permutons and the Thoma simplex : three mod-Gaussian moduli spaces*, avec Valentin Féray et Ashkan Nikeghbali. Proc. London Math. Soc., 121(4) :876-926, 2020.

(A3) *Mod-ϕ convergence : Approximation of discrete measures and harmonic analysis on the torus*, avec Reda Chhaibi, Freddy Delbaen et Ashkan Nikeghbali. Ann. Inst. Fourier, 70(3) :1115-1197, 2020.

(A4) *Local limit theorems and mod-ϕ convergence*, avec Martina dal Borgo et Ashkan Nikeghbali. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, 16(1) :817-853, 2019.

(A5) *Mod-ϕ convergence, II: Estimates on the speed of convergence*, avec Valentin Féray et Ashkan Nikeghbali. Séminaire de Probabilités L, 405-478, LNM 2252, Springer-Verlag, 2019.

(A6) *Mod-ϕ convergence : Normality Zones and Precise Deviations*, avec Valentin Féray et Ashkan Nikeghbali. Springer Briefs in Probability and Mathematical Statistics, 152+xii p., Springer-Verlag, 2016.

(A7) *Mod-Gaussian convergence and its applications for models of statistical mechanics*, avec Ashkan Nikeghbali. In Memoriam Marc Yor – Séminaire de Probabilités XLVII, 369-425, LNM 2137, Springer-Verlag, 2015.

---

2. Objets aléatoires choisis sur un groupe, un espace homogène ou dans un dual de groupe

2.1. **Probabilités et dualité des groupes.** Mon second sous-domaine de recherche est l'utilisation des représentations linéaires des groupes pour étudier des objets aléatoires liés à ces structures algébriques, en particulier lorsque la taille du groupe ou de l'objet tend vers l'infini. La méthode générale est la suivante. Soit G un groupe (fini, ou compact, ou de Lie réductif), et G^* l'ensemble de ses représentations irréductibles $\lambda = (V^\lambda, \rho^\lambda : G \to \mathrm{GL}(V^\lambda))$.

— Supposons donnée une variable aléatoire X à valeurs dans G, ou un objet aléatoire dessiné sur G construit à partir de telles variables : par exemple, une marche aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ tracée sur G, ou un graphe reliant des sommets aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ choisis dans G. Alors, les matrices aléatoires $\rho^\lambda(X)$ ou les caractères aléatoires $\mathrm{ch}^\lambda(X) = \mathrm{tr}\, \rho^\lambda(X)$ avec λ parcourant G^* fournissent une famille d'observables matricielles ou numériques, et ces observables permettent des calculs sur la loi de la variable X ou de l'objet aléatoire construit à partir de X. La méthode s'adapte aussi au cas où X est à valeurs dans un quotient G/H (espace homogène), à condition de remplacer G^* par l'ensemble des représentations sphériques de la paire (G, H), et les caractères ch^λ par les fonctions zonales sphériques zon^λ.

— Considérons de façon duale une variable aléatoire Λ à valeurs dans G^*. Les représentations irréductibles des groupes classiques sont indexées par des suites d'entiers, et de nombreuses classes d'objets aléatoires sont en correspondance avec des mesures naturelles sur ces suites, et donc sur les représentations irréductibles d'un groupe (on parle alors de mesure spectrale sur les représentations). Pour étudier Λ, on peut comme précédemment considérer les matrices aléatoires $\rho^\Lambda(g)$ ou les caractères aléatoires $\mathrm{ch}^\Lambda(g)$, cette fois-ci avec g parcourant G. Ces observables déterminent la loi de la variable Λ et permettent des calculs autour de celle-ci.

Nous parlerons ici assez peu de la seconde partie : elle est classiquement impliquée dans la résolution du problème de la longueur du plus long sous-mot croissant d'une permutation aléatoire, et des théorèmes centraux limites liés à ce problème et aux mesures de Plancherel et mesures spectrales sur les partitions d'entiers formaient l'essentiel de ma thèse, voir (B4)-(B5)-(B6)-(B7)-(B8). Mentionnons néanmoins deux travaux plus récents sur ce thème. La monographie (B2) explique en détail la combinatoire des représentations du groupe symétrique, et son utilisation pour l'étude de modèles de partitions aléatoires ; elle contient en particulier des théorèmes centraux limites nouveaux pour les mesures centrales sur les partitions d'entiers (voir aussi (B5)). La preuve de ces théorèmes centraux limites « algébriques » utilise justement la méthode des cumulants expliquée dans la première section, et ce sont ces exemples un peu exotiques qui ont en fait motivé le développement de cette théorie. En particulier, le simplexe de Thoma qui indexe les caractères extrémaux du groupe $\mathfrak{S}(\infty)$ et les mesures centrales sur les partitions d'entiers est un espace de modules mod-gaussien (A2), avec un sous-ensemble de modèles singuliers en bijection avec $\mathbb{Z}$ et avec les mesures dites de Schur–Weyl. Des extensions de ce résultat forment l'un de nos projets pour cette partie.

2.2. **Vitesses de convergence de processus tracés sur des groupes.** Une application classique du premier aspect de la méthode générale décrite dans le précédent paragraphe est l'estimation de la vitesse de convergence en loi d'une marche aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ tracée sur un groupe G fini ou compact ; ceci a été popularisé par les travaux de Diaconis dans les années 80. En effet, la formule de Parseval pour les groupes compacts donne une borne supérieure sur la distance en variation totale entre la loi μ_t de X_t, et la mesure de Haar μ_∞ du groupe. Cette borne supérieure est une série indexée par les représentations irréductibles de G (ou les représentations sphériques de la paire (G,H) dans le cas d'une marche G-invariante sur un quotient G/H), et dans de nombreux cas, le terme principal de cette série fournit aussi une borne inférieure en temps court. En particulier, on observe souvent un phénomène de coupure, avec une distance en variation totale qui reste proche de 1 pendant un temps assez long, puis décroît subitement vers 0. L'article (B3) démontre ce phénomène de coupure pour tout mouvement brownien tracé sur un espace symétrique compact, avec une coupure à un temps $t = c \log N$ si l'espace est de rang N ; ceci résoud une conjecture de Saloff–Coste.

2.3. **Grands graphes aléatoires géométriques.** Plus récemment, des techniques similaires ont été employées pour étudier le spectre de grands graphes aléatoires géométriques tracés sur des espaces symétriques compacts. Soit S un tel espace (par exemple, $S = \mathrm{SU}(3)$ ou $S = \mathbb{S}^3$), et L un niveau fixé. Le graphe aléatoire géométrique avec N points et niveau L est le graphe $\Gamma_{\text{geom}}(N,L)$ dont les sommets sont N points aléatoires indépendants $X_1,\ldots,X_N$ choisis uniformément sur S, et dont les arêtes relient les sommets X_i et X_j tels que $d(X_i,X_j) \leq L$, d étant la distance géodésique sur S. Lorsque N tend vers l'infini, le spectre $e_1(N,L) \geq \cdots \geq e_N(N,L)$ de la matrice d'adjacence de $\Gamma_{\text{geom}}(N,L)$ a des propriétés asymptotiques remarquables, qui sont détaillées dans (B1). Supposons pour simplifier que $S = G$ est un groupe de Lie compact simplement connexe.

1. Dans le régime où $N \to \infty$ et L est fixé, les plus grandes valeurs propres en module tendent presque sûrement après renormalisation vers les valeurs propres d'un opérateur intégral de type Hilbert–Schmidt, que l'on peut expliciter à l'aide de fonctions de Bessel sur l'espace des poids de l'algèbre de Lie du groupe G.
2. Lorsque $N \to \infty$ et $L = L_N = O(N^{-1/\dim G})$, le graphe aléatoire $\Gamma_{\text{geom}}(N,L_N)$ a une limite au sens de la convergence locale de Benjamini–Schramm, et ceci implique que la mesure spectrale $\mu_N = N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{e_i(N,L_N)}$ converge en probabilité vers une mesure déterministe μ qui est déterminée par ses moments.

Les résultats pour le second régime dit poissonien sont liés à une conjecture assez générale sur certaines fonctionnelles des représentations irréductibles du groupe compact G. Par ailleurs, la mesure limite μ ne dépend pas du groupe, mais seulement de sa dimension et de la limite ℓ de $L_N\,N^{1/\dim G}$. Cette mesure limite est la mesure spectrale d'un graphe géométrique poissonien infini dans $\mathbb{R}^{\dim G}$; elle semble être un objet pertinent pour la résolution de problèmes autour de la percolation continue.

2.4. **Projets de recherche.** Comme dans la première partie, nous expliquons maintenant quatre projets de recherche en lien avec les techniques d'analyse harmonique non commutative que nous venons de présenter, et de nouveau classés par ordre décroissant d'avancement.

— *étude de la mesure spectrale d'un graphe géométrique poissonien.* Dans (B1), les mesures spectrales limites $\mu(d,\ell)$ des grands graphes poissoniens sont construites, mais on donne assez peu d'informations sur ces mesures en dehors du fait qu'elles ne dépendent que de la dimension d de l'espace et du niveau renormalisé ℓ de connection des sommets. Une étude plus approfondie de ces lois $\mu(d,\ell)$ montre qu'elles ne sont jamais à support compact, qu'elles ont toujours une partie atomique et qu'elles semblent admettre également une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour $\ell > \ell_c$, ℓ_c étant un certain paramètre critique. Cette transition de phase est en lien avec celle observée pour la percolation continue sur $\mathbb{R}^d$: l'apparition d'une partie absolument continue dans $\mu(d,\ell)$ a lieu lorsque le paramètre ℓ dépasse le seuil de percolation critique pour le modèle poissonien-booléen sur $\mathbb{R}^d$. Les points suivants sont conjecturés :

(1) Pour tout paramètre ℓ, la mesure $\mu(d,\ell)$ décroît exponentiellement vite à l'infini.

(2) La mesure spectrale limite $\mu(d,\ell)$ dépend continuement du paramètre ℓ (y compris au voisinage de ℓ_c).

Le second point est très important, car il s'agirait d'un résultat de continuité en percolation : à l'inverse, pour $d \geq 3$, on ne sait pas encore si la probabilité de percolation $p_\infty(d,\ell)$ est continue au paramètre critique ℓ_c. Ainsi, l'étude détaillée des mesures limites des graphes géométriques poissoniens sur des espaces compacts semble ouvrir la voie à des méthodes spectrales en théorie de la percolation continue (l'absence de telles méthodes à ce jour étant liée au fait que l'on travaille avec des spectres de graphes aléatoires infinis, la théorie de ceux-ci étant tout juste naissante).

— *stabilité du phénomène de coupure vis-à-vis du générateur d'un mouvement brownien.* Dans (B3), le phénomène de coupure dans la convergence vers la stationnarité est démontré pour les mouvements browniens « standards » G-invariants sur G groupe compact et sur G/K espace symétrique compact. Il convient toutefois de noter que la convergence vers la mesure de Haar a lieu pour des processus beaucoup plus généraux, par exemple tout processus de Lévy G-invariant sur G dont la partie continue admet un générateur infinitésimal hypoelliptique (du type Laplacien partiel $\sum_{i=1}^{e \leq \dim G} \partial_i \otimes \partial_i$ avec des champs de vecteurs G-invariants $(\partial_i)_{1\leq i\leq e}$ qui engendrent l'algèbre de Lie de G). Il est alors naturel de se demander à quelle condition la convergence vers la stationnarité admet encore une coupure, et éventuellement à quel moment. Par exemple, si $G = \mathrm{SU}(N)$, $d = N^2-1$ et si l'on remplace l'opérateur de Laplace–Beltrami standard $\sum_{i=1}^{d} X_i \otimes X_i$ par une version hypoelliptique $\sum_{i=1}^{e<d} X_i \otimes X_i$, a-t-on encore coupure pour la diffusion aléatoire continue correspondante ? La théorie des représentations de G devrait fournir une borne supérieure sur la distance à la loi stationnaire, mais l'estimation de cette série semble nettement plus difficile que dans le cas elliptique.

— *vitesses de convergence pour les théorèmes centraux limites non-euclidiens.* Les articles (A3)-(A5) de la précédente section donnent des conditions générales sur des transformées de Fourier de variables réelles pour mesurer la distance de leurs lois à une loi de référence. Similairement, dans un contexte d'analyse harmonique non commutative, la borne supérieure de Diaconis–Shashahani (utilisée dans (B3)) permet de mesurer la distance en variation totale à la mesure de Haar d'un espace homogène compact. Plus généralement, il est naturel de se demander si des outils d'analyse harmonique pour mesurer des distances entre lois existent dans d'autres contextes géométriques, par exemple pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace symétrique non compact. Un point d'entrée vers ces questions est le théorème central limite pour les convolées de mesures sur un espace non compact G/K, par exemple le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \mathrm{SL}(2)/\mathrm{SO}(2)$. Le calcul de la vitesse de convergence pour ce théorème central limite est un problème intéressant, dont la solution devrait mettre en jeu l'analyse harmonique bien connue de $\mathrm{SL}(2)$. Celle-ci implique une partie non discrète dans les formules de Parseval et d'inversion, et c'est l'une des différences essentielles avec le cas compact considéré dans le précédent paragraphe.

— *espaces de modules mod-gaussiens issus de la théorie asymptotique des représentations.* Comme expliqué dans le premier paragraphe de cette section, le simplexe de Thoma est un exemple important d'espace compact indexant les caractères extrémaux d'un groupe infini (le groupe symétrique $\mathfrak{S}(\infty)$), les approximations aléatoires finies de ceux-ci admettant des fluctuations mod-gaussiennes. Il existe d'autres exemples de tels espaces classifiants en théorie des représentations des groupes infinis ; en particulier, Borodin et Bufetov ont démontré un théorème central limite analogue à celui précité dans le contexte des caractères extrémaux du groupe unitaire infini $\mathrm{U}(\infty)$, et en lien avec le champ gaussien libre en dimension 2. Il serait intéressant de comprendre ces résultats à l'aide de la méthode des cumulants exposée au paragraphe 1.3, et de les étendre à d'autres espaces classifiants, en particulier l'analogue quantique du précédent correspondant aux caractères de $\mathrm{U}_q(\infty)$ et étudié par Gorin. Une autre question importante qui lie théorie des représentations et convergence mod-gaussienne est l'étude des fluctuations d'un point singulier du simplexe de Thoma, à savoir celui correspondant aux mesures de Plancherel. Les fluctuations des modèles de partitions aléatoires de Plancherel sont encore asymptotiquement normales, mais avec des covariances plus petites que dans le cas générique, et à ce jour aucune estimée de type grandes déviations. La convergence mod-gaussienne de ces modèles est conjecturée, en lien avec des problèmes combinatoires d'énumération de surfaces et de factorisations dans les groupes symétriques. Notons que des travaux récents de Moll remplacent ces objets géométriques par des objets combinatoires dont l'énumération est plus simple (chemins enrubanés) ; ceci ouvre peut-être la voie à une solution de cette conjecture.

(B1) *Asymptotic representation theory and the spectrum of a random geometric graph on a compact Lie group*. Electronic Journal of Probability, 24(43) :1-85, 2019.

(B2) *Representation Theory of Symmetric Groups*. Discrete Mathematics and Applications, 666 + xvi p., CRC Press, 2017.

(B3) *The cut-off phenomenon for Brownian motions on compact symmetric spaces*, Potential Analysis, 40(4) :427-509, 2014.

(B4) *Partial isomorphisms over finite fields*, Journal of Algebraic Combinatorics, 40(1) :83-136, 2014.

(B5) *Fluctuations of central measures on partitions*, Proceedings of the 24th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Nagoya, Japan), p. 387-398, 2012.

(B6) *Asymptotics of q-Plancherel measures*, avec Valentin Féray. Probability Theory and Related Fields, 152(3-4) :589-624, 2012.

(B7) *Kerov's central limit theorem for Schur–Weyl and Gelfand measures,* Proceedings of the 23rd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Reykjavík, Iceland), p. 669-680, 2011.

(B8) *Products of Geck–Rouquier conjugacy classes and the algebra of composed permutations*, Proceedings of the 22nd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (San Francisco, USA), p. 789-800, 2010.
