Couples de variables aléatoires à densité

Les exercices et questions précédés d'une étoile ($\star$) peuvent être passés dans un premier temps.

Exercice 1 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f qui est égale à une constante k sur le carré $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ et nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

1. Déterminer k.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y. Sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la probabilité d'avoir à la fois $\min(X, Y) \leq \dfrac{2}{3}$ et $\max(X, Y) \geq \dfrac{3}{2}$.
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{1 + XY}$.

Exercice 2 : *(Polycopié de S3)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$h(x, y) = \begin{cases} axy^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. A quelle condition la fonction h est-elle la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles ?

   Dans la suite on suppose cette condition réalisée et on se donne un tel couple (X, Y).
2. Soit $B_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < t\}$ (pour $t \in \mathbb{R}$) et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. Calculer $P((X, Y) \in B_t)$; qu'est-ce que cela représente ? Calculer $P((X, Y) \in D)$; qu'est-ce que cela représente ?
3. Déterminer les densités (marginales) de X et de Y.
4. Calculer la covariance entre X et Y. Pouvait-on prévoir le résultat ?
5. On pose $Z = \frac{X}{\sqrt{Y}}$. Pourquoi peut-on considérer que Z est une variable aléatoire bien définie ? Calculer $E(Z)$.

Exercice 3 : *(Examen 2009)*

1. Dans cette question, on se donne un réel $\lambda > 0$, et on considère un certain type de composant électronique, dont la durée de vie est une variable aléatoire T suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ admettant pour densité la fonction f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Soit $h > 0$. Calculer la probabilité pour qu'un composant électronique fonctionne au moins h heures.

   (b) Soit $t > 0$. Calculer la probabilité pour qu'un composant électronique fonctionne au moins $t + h$ heures sachant qu'il a fonctionné au moins t heures. Quelle conclusion peut-on tirer de ce calcul ?
2. On considère un système formé de deux composants électroniques et on note X et Y leurs durées de vies respectives. On suppose que le couple (X, Y) a pour densité la fonction h donnée par :

$$h(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que h est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer les densités de probabilités de X et de Y.

(c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Que vaut leur covariance ?

(d) Calculer la probabilité que le premier composant cesse de fonctionner avant le deuxième, soit la probabilité $P(X \leq Y)$.
Indication : dessiner le secteur angulaire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$.

3. On suppose que ces deux composants sont montés en série, et donc que le système fonctionne si et seulement si les deux composants fonctionnent. Soit S la durée de vie du système. On admet que les durées de vie X et Y des deux composants sont indépendantes, que X suit la loi $\mathcal{E}(1)$ et que Y suit la loi $\mathcal{E}(2)$.
   (a) Soit $t > 0$. Que vaut $P(S > t)$?
   (b) En déduire la loi de la variable aléatoire S.

Exercice 4 : *(Oral Agro A 2013)*

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0;1]$. On note $U = X - Y$ et $V = X + Y$.

1. Déterminer une densité de V.
2. Calculer la covariance du couple aléatoire (U, V).
3. Déterminer $\mathbb{P}(U < -\frac{1}{2})$ et $\mathbb{P}(V > \frac{3}{2})$ (on pourra faire un dessin). Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Calculer, pour $0 < u < 1$ et $0 < v < 2$, $\mathbb{P}(\{U \leq u\} \cap \{V \leq v\})$.

Exercice 5 :

Dans les cas (i) puis (ii), traiter les questions qui suivent

$$(i)\ h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(ii)\ h(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que h est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité h. Déterminer les densités de ses lois marginales, i.e. celles de X et de Y. Pour quels y peut-on donner la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$? Celle-ci dépend-elle de y ?
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Que valent la covariance du couple (X, Y) et la corrélation de ce couple (appelée aussi coefficient de corrélation) ? Quelles conclusions peut-on tirer de ces résultats ?

N.B. Pour le cas (ii), on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$

Exercice 6 : *(Oral Veto B 2008)*

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1\}$, et soit f la fonction qui est égale à une constante k sur D et nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$. On suppose que f est la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

1. Déterminer k.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 : *(Examen 2011)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$h(x, y) = \begin{cases} k\,(2x + y) & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Dessiner le domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.
   (b) Lorsque $x \in [0, 1]$, quelles sont les valeurs de y pour lesquelles $(x, y) \in \Delta$?
   (c) Lorsque $y \in [0, 1]$, quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $(x, y) \in \Delta$?
2. Montrer que $k = 2$.
3. Calculer $E\left(\dfrac{3}{2X + Y}\right)$.
4. Déterminer les densités de probabilité de X et Y.
5. Pour $y \in [0, 1[$, calculez la densité de X sachant $Y = y$.
6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 : *Erreur de visée comme racine carrée d'un chi-deux*

Au lieu de faire sa dissertation de philosophie, Pierre décide de s'entraîner au jeu des fléchettes et fabrique une cible à l'aide de sa copie double sur laquelle il trace un repère orthonormé (Ox, Oy) avec pour unité le décimètre. On note X et Y les coordonnées du point d'impact M de la fléchette et on pose $D = OM$. On admet que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite. On pourra utiliser la formule de changement de variable en coordonnées polaires dans une intégrale double.

1. Montrer que la probabilité que D soit inférieur à 2 centimètres est d'environ $0,1$.
2. Calculer la moyenne de D.
3. Déterminer la densité de probabilité de D.

Exercice 9 : *(d'après des oraux du Concours A 2009)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = k \exp(-x^2 - xy + \frac{y^2}{2})$.

1. Déterminer la constante réelle k.
2. Déterminer les lois de X et Y. On note Φ la fonction de répartition de Y.
3. Calculer la covariance du couple (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer une densité de $Z = \Phi(Y)$.