Probabilités et variables aléatoires discrètes

Les exercices et questions précédés d'une étoile (⋆) peuvent être passés dans un premier temps.

Exercice 1 : *Formules de probabilités composées*

Un oral de concours, auquel se présente 50 candidats, se déroule ainsi : l'examinateur dispose d'une boîte contenant 50 questions, le premier candidat tire au hasard sa question dans la boîte, le second tire au hasard parmi les 49 questions restantes, et ainsi de suite. Un candidat à l'oral a fait l'impasse sur une seule question.
On note B_k l'événement "la $k^{\text{ième}}$ question tirée est celle sur laquelle le candidat a fait l'impasse" et on pose $A_k = \bar{B_k}$.

1. Calculer $P(B_1)$.
2. Montrer que $B_2 \subset A_1$ et calculer $P(B_2)$.
3. Montrer que $B_3 \subset A_1 \cap A_2$ et calculer $P(B_3)$.
4. Calculer $P(B_k)$. Y a-t-il un rang de passage préférentiel pour le candidat ?

Exercice 2 : *Probabilité d'une intersection et probabilité conditionnelle*

Dans un important verger sont cultivées trois sortes de pruniers A_1, A_2, A_3, dont 30% d'arbres A_1. Un parasite sévit : 40% des arbres A_1 et 30% des arbres A_3 sont touchés ; de plus les arbres qui sont atteints et qui sont de l'espèce A_2 représentent 9% du verger.

1. Quelle est la probabilité qu'un arbre du verger soit atteint et soit de l'espèce A_1 ?
2. On sait que, dans ce verger, un arbre atteint a 50% de chances d'être de l'espèce A_1.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un arbre du verger soit de l'espèce A_3 ?
   (b) En utilisant les observations faites dans ce verger, déterminer celle des trois espèces de pruniers qui résiste le mieux à l'atteinte parasitaire.

Exercice 3 : *On répète indéfiniment une expérience*

On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

1. Soit E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au $n^{\text{ième}}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni la somme de 7 n'apparaît". Calculer $P(E_n)$.
2. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.
3. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

⋆ Exercice 4 : *Un schéma géométrique* (Oral Véto 2009)

Les personnes A, B, C veulent le même cigare. Afin de déterminer qui l'obtiendra, elles décident de jouer deux fois à pile ou face (avec une pièce équilibrée) de la façon suivante :
- si le résultat est pile/pile, A gagne,
- si le résultat est pile/face, B gagne,
- si le résultat est face/pile, C gagne,
- si le résultat est face/face, elles rejouent de la même façon.

Déterminer la probabilité que ces personnes ne parviennent pas à décider qui gagne le cigare. (Indication non donnée au candidat : quelle est la probabilité que le cigare ne soit pas attribué au bout de n (doubles) lancers de la pièce ?)

Exercice 5 : *Les allumettes de S. Banach*

Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables ; l'une, disons la boîte "B", contient 5 allumettes, l'autre, disons la boîte "b", contient 2 allumettes. Paul choisit au hasard une de ces boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

1. En utilisant le modèle équiprobable des tirages avec remise, proposer un ensemble Ω représentant les résultats de cette expérience aléatoire ; les événements B_k (resp. b_k) correspondant au tirage de la boîte "B" (resp. "b") au k-ième tirage ($k = 1, 2...$) sont-ils indépendants ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 6 : *Familiarisation avec les variables aléatoires, loi uniforme*
On considère $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ muni de la probabilité uniforme P.

1. Que vaut $P(\{2\})$? $P(\{3, 5, 6\})$? $P(\{x \in \Omega \, : \, |x - 3| = 2\})$? Quel est l'ensemble des valeurs prises par P ?
2. On définit la v.a. X sur Ω par : $X(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Quelle est la loi de X ?
3. Donner un autre exemple de v.a. Y définie sur Ω et de même loi que X.
4. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Espérance et variance de la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

EXERCICE 7 : *Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète* (d'après Oral Veto 2005)
On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geqslant 3 \\ \frac{4}{5}, & \text{si } 2 \leqslant t < 3 \\ \frac{1}{5}, & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 0, & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction F.
2. Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
3. Quelles sont les valeurs prises par cette variable aléatoire ?
4. Déterminer sa loi de probabilité, son espérance et son écart-type.

EXERCICE 8 : *Reconnaître les lois discrètes usuelles, savoir les définir et justifier leur utilisation*
Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules blanches.

1. On tire au hasard une boule dans l'urne et on pose $X = 1$ si la boule tirée est rouge, $X = 0$ sinon. Quelle est la loi de la variable aléatoire X, son espérance et sa variance ?
2. On décide d'effectuer 3 tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule sortie dans l'urne. Quelle est la probabilité qu'on tire trois boules rouges ? d'abord une rouge puis deux blanches ? une rouge et deux blanches ?
3. Quelle est la loi du nombre de boules rouges tirées au cours de 3 tirages avec remise ? de n tirages avec remise ? En donner l'espérance et la variance.
4. Même question pour 3 tirages sans remise. Pour n tirages sans remise (cas de M boules rouges et $N - M$ boules blanches ; trouver l'espérance).
5. On effectue successivement des tirages avec remise dans cette urne. Quelle est la probabilité qu'on tire pour la première fois une boule rouge lors du dixième tirage ?
6. Pour des tirages avec remise, quelle est la loi du premier temps où l'on tire une boule rouge ?

EXERCICE 9 : *Loi géométrique*

1. On pose $S_N(q) = \sum_{n=0}^{N} q^n$.

   (a) Que vaut $S_N(q)$ si $q \neq 1$? Calculer les dérivées $S'_N(q)$ et $S''_N(q)$ pour $q \neq 1$.

   (b) En déduire que, pour $|q| < 1$, on a les formules (à connaître) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

2. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = pq^{n-1}$ où $q = 1 - p$.

   (a) Vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$. On dit que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

   (b) Montrer que le temps d'attente (rang) du premier succès, lors d'une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p (i.e. ayant chacune deux résultats possibles : succès avec probabilité p $(0 < p < 1)$, échec avec probabilité $1 - p$), est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Pourquoi la probabilité de n'avoir jamais de succès est-elle nulle ?

   (c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Que vaut $P(X > N)$?

   (d) Déterminer $E(X), E(X(X-1)$ puis $\mathrm{Var}(X)$.

   (e) On se replace dans le schéma précédent d'une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p. Déterminer la loi, l'espérance et la variance du nombre Y d'échecs avant le premier succès.

3. Une population très nombreuse (considérée ici comme infinie) contient une proportion, égale à $2/1000$, d'individus porteurs d'une certaine anomalie génétique. Quelle est l'espérance du nombre d'individus que l'on doit examiner jusquà ce que l'on trouve un porteur ? Quelle est la probabilité qu'il faille tirer plus de n individus ($n = 500$ ou 1000) pour trouver un premier porteur ?

Exercice 10 : *Le jeu de fléchettes*

Un joueur vise une cible avec des fléchettes. À chaque lancer, il atteint la cible avec probabilité $0 < p < 1$, et la rate avec probabilité $q = 1 - p$.

Après n lancers, le joueur gagne s'il n'a pas perdu avant et si, pour la première fois, le nombre de fois où il a atteint la cible excède de deux unités le nombre de fois où il l'a ratée.
Inversement, le joueur perd au bout de n lancers s'il n'a pas gagné avant et si, pour la première fois, le nombre de fois où il a raté la cible excède de deux unités le nombre de fois où il l'a atteint.

La partie s'arrête lorsque le joueur a gagné ou perdu. On note A_n l'événement "le joueur gagne au n-ième lancer" ; B_n l'événement "le joueur gagne au n-ième lancer" ; A l'événement "le joueur gagne la partie" ; et B l'événement "le joueur perd la partie."

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$ (indication : à quelle condition sur n ces deux probabilités sont-elles non nulles ? dessiner dans ce cas l'aspect typique de la courbe (nombre de lancers gagnants) − (nombre de lancers perdants) au cours du temps jusqu'au temps n, sachant A_n ou sachant B_n).
2. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Déterminer la probabilité pour que la partie dure indéfiniment.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers que comporte la partie. Déterminer la loi de X. En déduire l'ésperance et la variance éventuelles de X.

$\star$ Exercice 11 : *Une loi non standard*

Une urne contient b boule blanches, n boules noires et r boules rouges ; $b, n \geq 1$ et $r \geq 0$. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne : il gagne si elle est blanche, perd si elle est noire, et retire la boule de l'urne si elle est rouge : dans ce cas il effectue un autre tirage (avec une boule rouge de moins). Il réitère cette opération jusqu'à ce qu'il gagne ou perde. On note G_r l'événement "le joueur gagne en commençant ses tirages avec b boules blanches, n boules noires et r boules rouges" (b et n sont fixés, r est variable).

1. Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.
2. Trouver une relation entre $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.
3. Calculer $P(G_r)$.

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie se termine (sur une victoire ou une défaite). Déterminer la loi de X (indication : commencer avec le cas $r = 2$).

$\star$ EXERCICE 12 : *Encore la formule des probabilités totales*

On choisit au hasard une famille dans une population donnée. Soit X le nombre d'enfants quelle peut contenir ; on admet que X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'espérance μ. On admet d'autre part, qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est $1/2$.

1. Exprimer la probabilité d'observer k garçons dans une famille dont on sait qu'elle contient n enfants.
2. Déterminer la loi de probabilité du nombre de garçons que l'on peut observer dans une famille prise au hasard dans la population.

EXERCICE 13 : *Approximations classiques de lois discrètes*

Pour étudier une certaine mutation dans une population, constituée de N individus, on considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de mutants dans un échantillon de n individus de cette population.

1. On suppose que la population contient M mutants ($M \leq N$). Quelle est la loi de X_n (pour simplifier, supposer $n \leq M$ et $n \leq N - M$) ?
2. On suppose que la taille n de l'échantillon est très petite devant N et on pose $p = \dfrac{M}{N}$. Déterminer la loi que suit alors pratiquement X_n, son espérance et sa variance.
3. On admet de plus que $p = 10^{-6}$. Pour quelles valeurs de n a-t-on au moins 95% de chances d'observer au moins un mutant dans l'échantillon ?
4. On suppose $n = 3 \times 10^6$. Quelle est la probabilité d'observer au moins 4 mutants dans l'échantillon ?

$\star$ EXERCICE 14 : *Fonction d'une v.a.*

On dispose d'un stock de maillons dont une proportion p de 4 cm et les autres de 6 cm. On choisit au hasard n maillons avec lesquels on confectionne une chaîne de longueur L. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de L. Quelles sont, en fonction de p, les valeurs extrêmes de $\mathrm{Var}(L)$?

$\star$ EXERCICE 15 : *Le gardien de nuit*

Un gardien de nuit dispose de 10 clés, indiscernables dans l'obscurité, et dont une seule permet d'ouvrir une certaine porte. En état d'ébriété, il perd la mémoire. Il a donc deux méthodes possibles pour ouvrir cette porte.

A Méthode rationnelle : à jeûn, il effectue des essais successifs en retirant les clés déjà essayées.

B Méthode amnésique : ivre, à chaque nouvel essai, il utilise une clé prise au hasard parmi les 10 clés.

Soit X_A (resp. X_B) le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas A (resp. dans le cas B).

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_A, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Mêmes questions pour la variable aléatoire X_B.
3. On sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.