Corrigé

1. Pour la proposition 1, si l'on pose $\theta_n = (\xi_n, \xi_n^x, \xi_n^y, \xi_n^0)$, alors les règles de transition peuvent se réécrire sous la forme
$$X_{n+1} = F(X_n, \theta_{n+1}),$$
où $F : \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est une fonction mesurable, $\mathfrak{Y} \subset \mathbb{Z}^8$ et $(\theta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathfrak{Y}$. Cette relation implique que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (théorème de représentation). Finalement, si les supports des lois des pas sont comme indiqués ci-dessous, alors le graphe des transitions possibles de la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le réseau $\mathbb{N}^2$. Ce réseau est connexe, donc la chaîne est irréductible.

   Pour le lemme 2, posons $M_n = f(X_{\min(n,\tau_F)})$, et calculons l'espérance conditionnelle de M_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$. Suivant l'indication du texte, on décompose en fonction de la valeur de τ_F :
$$\mathbb{E}_x[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_x[1_{(\tau_F \geq n+1)}\, f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}_x[1_{(\tau_F \leq n)}\, f(X_{\tau_F}) \,|\, \mathcal{F}_n].$$
   Comme τ_F est un temps d'arrêt, l'événement $\{\tau_F \leq n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$, donc l'indicatrice $1_{(\tau_F\leq n)}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et de même pour $1_{(\tau_F\geq n+1)} = 1 - 1_{(\tau_F\leq n)}$. On peut donc sortir cette indicatrice de la première espérance conditionnelle, et
$$\mathbb{E}_x[1_{(\tau_F\geq n+1)}\, f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] = 1_{(\tau_F\geq n+1)}\, \mathbb{E}_x[f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] = 1_{(\tau_F\geq n+1)}\, (Pf)(X_n).$$
   Pour la seconde espérance conditionnelle, si $\tau_F \leq n$, alors X_{τ_F} est la valeur de $X_\cdot$ en un temps avant n, donc c'est une variable $\mathcal{F}_n$-mesurable. Ainsi, on a simplement :
$$\mathbb{E}_x[1_{(\tau_F\leq n)}\, f(X_{\tau_F}) \,|\, \mathcal{F}_n] = 1_{(\tau_F\leq n)}\, f(X_{\tau_F}).$$
   On a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] &= 1_{(\tau_F\geq n+1)}\, (Pf)(X_n) + 1_{(\tau_F\leq n)}\, f(X_{\tau_F}) \\ &\leq 1_{(\tau_F\geq n+1)}\, f(X_n) + 1_{(\tau_F\leq n)}\, f(X_{\tau_F}) = M_n.\end{aligned}$$
   L'inégalité vient du fait que si $\tau_F \geq n+1$, alors $X_n \notin F$, donc $(Pf)(X_n) \leq f(X_n)$. Ceci montre que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale sous $\mathbb{P}_x$ (toutes les variables sont intégrables, puisque celle de plus grande intégrale est $M_0 = f(x)$).

2. Sauf au point $x = 0$, la fonction $f(x) = |x|$ est harmonique (donc surharmonique) pour le noyau $P(x,y) = \frac{1}{2}(1_{(y=x+1)} + 1_{(y=x-1)})$. Elle tend bien à l'infini en l'infini, donc, par le critère de Foster faible, la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est récurrente (elle est clairement irréductible). Cette marche n'est en revanche pas récurrente positive, car elle admet pour mesure invariante $\mu = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \delta_x$, qui est de masse infinie.

3. Si $\sigma_L \leq \tau_F$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sort de l'ensemble où f est plus petite que L avant de sortir de F, donc
$$f(X_{\min(\sigma_L,\tau_F)}) = f(X_{\sigma_L}) \geq L.$$
   Alors,
$$\mathbb{E}_x[f(X_{\min(\sigma_L,\tau_F)})] \geq \mathbb{E}_x[1_{(\sigma_L\leq\tau_F)}\, f(X_{\min(\sigma_L,\tau_F)})] \geq L\,\mathbb{E}_x[1_{(\sigma_L\leq\tau_F)}] = L\,\mathbb{P}_x[\sigma_L \leq \tau_F].$$

4. On reconnaît l'identité classique pour une variable aléatoire entière :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\tau_F] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}_x[\tau_F = k] = \sum_{k,l=1}^{\infty} 1_{(l\leq k)}\,\mathbb{P}_x[\tau_F = k] \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k\geq l}\mathbb{P}_x[\tau_F = k]\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{P}_x[\tau_F \geq l].\end{aligned}$$

Comme on a pour tout n

$$f(x) \geq \varepsilon \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}_x[\tau_F \geq l],$$

le passage à la limite $n \to \infty$ donne bien $f(x) \geq \varepsilon\,\mathbb{E}_x[\tau_F]$.

Établissons maintenant la suite d'(in)égalités. La première identité découle de la propriété de Markov simple, car si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est issue de $x \in F$, alors $\tau_F^+((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 1 + \tau_F((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$, d'où en prenant les espérances et en conditionnant le terme de droite par rapport à la valeur de X_1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\tau_F^+] &= 1 + \mathbb{E}_x[\tau_F((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})] = 1 + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\tau_F((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})\,|\,\mathcal{F}_1]] \\ &= 1 + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[\tau_F]] = 1 + \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\,\mathbb{E}_y[\tau_F].\end{aligned}$$

Dans la somme, on peut ôter les termes avec $y \in F$, car dans ce cas $\mathbb{E}_y[\tau_F] = 0$. Pour les autres termes, $\mathbb{E}_y[\tau_F] \leq \varepsilon^{-1} f(y)$, d'où

$$\mathbb{E}_x[\tau_F^+] \leq 1 + \varepsilon^{-1}\sum_{y\notin F} P(x,y)\,f(y) \leq 1 + \varepsilon^{-1}\sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\,f(y) = 1 + \varepsilon^{-1}\,(Pf)(x)$$

et cette quantité est finie.

5. On voit que si $X_n = (c,d)$ et $X_{n+1} = X_n + (s_1,s_2)$ avec $(s_1,s_2) \in \{\xi_{n+1}, \xi_{n+1}^x, \xi_{n+1}^y, \xi_{n+1}^0\}$, alors

$$f(X_{n+1}) = f(X_n + (s_1,s_2)) = f(c,d) + f(s_1,s_2) + \left(\frac{b}{a}s_1 - ws_2\right)c + \left(\frac{a}{b}s_2 - ws_1\right)d,$$

cette formule étant la formule de duplication pour une forme quadratique. Prenons maintenant les espérances sachant $X_n = (c,d)$. Le terme de gauche devient $(Pf)(c,d)$ puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, et le terme de droite ne dépend que de $\mathbb{E}[(s_1,s_2)\,|\,X_n = (c,d)]$:

— Si (c,d) est à l'intérieur du quart de plan, alors $(s_1,s_2) = \xi_{n+1}$ a pour espérance (a,b), donc on obtient

$$f(c,d) + \mathbb{E}[f(\xi_1)] + \left(\frac{b}{a}a - wb\right)c + \left(\frac{a}{b}b - wa\right)d = f(c,d) + \mathbb{E}[f(\xi_1)] + (1-w)(bc+ad).$$

— Si $c > 0$ et $d = 0$, alors $(s_1,s_2) = \xi_{n+1}^x$ a pour espérance (a^x,b^x), donc on obtient

$$f(c,d) + \mathbb{E}[f(\xi_1^x)] + \left(\frac{b}{a}a^x - wb^x\right)c + \left(\frac{a}{b}b^x - wa^x\right)0 = f(c,d) + \mathbb{E}[f(\xi_1^x)] + \left(\frac{b}{a}a^x - wb^x\right)c.$$

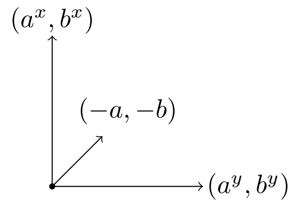
— De même, si $c = 0$ et $d > 0$, alors $(s_1, s_2) = \xi_{n+1}^y$ a pour espérance (a^y, b^y), donc on obtient

$$f(c,d)+\mathbb{E}[f(\xi_1^y)]+\left(\frac{b}{a}a^y - wb^y\right)0+\left(\frac{a}{b}b^y - wa^y\right)d = f(c,d)+\mathbb{E}[f(\xi_1^y)]+\left(\frac{a}{b}b^y - wa^y\right)d.$$

— Finalement, si $c = d = 0$, alors on a $f(X_{n+1}) = f(0,0)+f(\xi_{n+1}^0)$, d'où la dernière formule.

6. Les vecteurs de drift pour cette marche sont respectivement :

$$(a,b) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) \quad ; \quad (a^x, b^x) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad (a^y, b^y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$



L'ordre trigonométrique est bien respecté pour les vecteurs (a^y, b^y), $(-a, -b)$, (a^x, b^x), donc le critère de récurrence positive s'applique. Examinons plus en détail la preuve du théorème dans ce cas particulier. Pour fixer les idées, prenons $w = \varepsilon = \frac{1}{2}$.

— Pour tout pas (c,d)dans $\{N, S, E, O\}$, on a $cd = 0$ et $c^2 + d^2 = 1$, donc $f(c,d) = \frac{1}{2}$. En particulier, $\mathbb{E}[f(\xi_1)] = \mathbb{E}[f(\xi_1^x)] = \mathbb{E}[f(\xi_1^y)] = \frac{1}{2}$

— Pour avoir $Pf \leq f - \frac{1}{2}$ à l'intérieur du quart de plan, il faut que

$$\big((1-w)(bc+ad) \leq -1\big) \iff \big((c+d) \geq 12\big).$$

C'est donc en particulier vrai en dehors du rectangle $[\![1, L]\!]^2$ avec $L = 11$.

— Sur l'axe des abscisses, $\left(\frac{b}{a}a^x - wb^x\right)c = -\frac{c}{4}$ compense $1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$ si c est plus grand que 4. C'est donc en particulier vrai pour $c > 11$. Le même calcul donne le même résultat pour $d > 11$ sur l'axe des ordonnées.

Conclusion : si $w = \frac{1}{2}$, une partie F convenable telle que $Pf \leq f - \frac{1}{2}$ en dehors de F est le carré $F = [\![0, 11]\!]^2$.

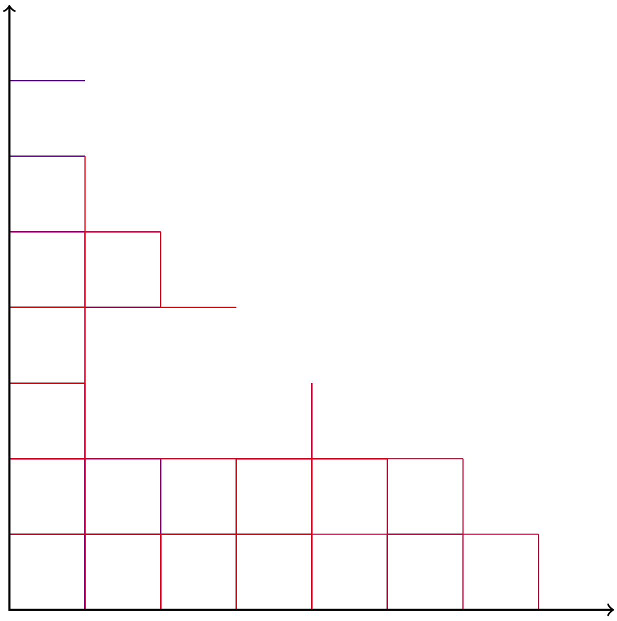
7. Voici un programme Python qui, étant données les lois des pas ξ_n, ξ_n^x, ξ_n^y et ξ_n^0, renvoie les n premières positions de la marche aléatoire correspondante sur $\mathbb{N}^2$:

```
N = (0,1)
S = (0,-1)
E = (1,0)
O = (-1,0)

p = [1/6,1/3,1/6,1/3] #NSEO
px = [1/2,1/4,1/4] #NEO
py = [1/4,1/4,1/2] #NSE
p0 = [1/2,1/2] #NE

def random_step():
```

```
    alea = random()
    if alea < p[0]:
        return N
    elif alea < p[0] + p[1]:
        return S
    elif alea < p[0] + p[1] + p[2]:
        return E
    else:
        return O

def random_stepx():
    alea = random()
    if alea < px[0]:
        return N
    elif alea < px[0] + px[1]:
        return E
    else:
        return O

def random_stepy():
    alea = random()
    if alea < py[0]:
        return N
    elif alea < py[0] + py[1]:
        return S
    else:
        return E

def random_step0():
    alea = random()
    if alea < p0[0]:
        return N
    else:
        return E

def random_walk(N,x0=0,y0=0):
    res = [(x0,y0)]
    pos = (x0,y0)
    for i in range(N):
        if pos[0]>0 and pos[1]>0:
            step = random_step()
        elif pos[0]>0 and pos[1]==0:
            step = random_stepx()
        elif pos[0]==0 and pos[1]>0:
            step = random_stepy()
        else:
            step = random_step0()
        pos = (pos[0]+step[0],pos[1]+step[1])
```

```
        res.append(pos)
    return res
```

Voici une trajectoire dessinée pour les paramètres de la question 6 (les 500 premiers pas) :



On constate que la trajectoire reste confinée au voisinage de $(0,0)$, ce qui est en adéquation avec la récurrence positive. L'objet pertinent est alors la mesure de probabilité invariante π, qui est la limite des fréquences des visites le long d'une trajectoire :

$$\pi(c,d) = \lim_{n\to\infty,\,\text{p.s.}} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!] \mid X_k = (c,d)\}}{n}.$$

Le programme suivant calcule les fréquences des visites sur un intervalle de temps $[\![1,N]\!]$, et renvoie un dictionnaire de ces fréquences :

```
def frequencies(N):
    res = random_walk(N)[1:]
    d = {}
    for i in range(N):
        if res[i] in d.keys():
            d[res[i]] += 1
        else:
            d[res[i]] = 1
    for x in d.keys():
        d[x] = d[x]/N
    return d
```

On a représenté ci-après le résultat de ce programme pour une trajectoire de taille $N = 10^6$ (en ne gardant que les fréquences supérieures à 10^{-4}). L'inverse de $\pi(c,d)$ est égal au temps moyen de retour en (c,d), donc un estimateur consistant de $\mathbb{E}_{(0,0)}[\tau^+_{(0,0)}]$ est donné par le programme suivant :

```
def ret(N):
    return N/(random_walk(N)[1:]).count((0,0))
```

.0001	.0002														
.0002	.0003	.0001													
.0004	.0005	.0002													
.0007	.0009	.0004	.0002												
.0011	.0015	.0006	.0003	.0001											
.0018	.0024	.0011	.0004	.0002											
.0028	.0037	.0016	.0007	.0003	.0002										
.0044	.0060	.0027	.0012	.0006	.0003	.0001									
.0070	.0096	.0042	.0019	.0009	.0005	.0003	.0001								
.0112	.0153	.0069	.0032	.0017	.0009	.0005	.0003	.0002	.0001						
.0179	.0246	.0116	.0057	.0029	.0016	.0010	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001				
.0277	.0388	.0194	.0104	.0057	.0033	.0021	.0013	.0008	.0005	.0003	.0002	.0001			
.0419	.0616	.0337	.0195	.0117	.0070	.0044	.0028	.0017	.0010	.0007	.0004	.0002	.0002		
.0583	.0987	.0613	.0389	.0248	.0155	.0098	.0062	.0038	.0023	.0016	.0009	.0006	.0004	.0002	.0001
.0291	.0574	.0419	.0285	.0182	.0115	.0073	.0046	.0029	.0018	.0012	.0007	.0004	.0003	.0002	.0001

Une simulation avec une trajectoire de taille $n = 10^7$ donne $\mathbb{E}_{(0,0)}[\tau^+_{(0,0)}] \simeq 34.33$.

8. Supposons d'abord que $\mathbb{P}_x[V_F = +\infty] = 1$ pour un certain état x et une partie F finie. Comme F est une partie finie, $V_F = \sum_{y \in F} V_y$ et si V_F est infinie, alors l'un des nombres de visites V_y est infini. On en déduit qu'au moins un état y (dans F) vérifie :

$$\mathbb{P}_x[V_y = +\infty] > 0,$$

car sinon, on aurait $\mathbb{P}_x[V_F = +\infty] = 0$. Si $x = y$, la récurrence de la chaîne est démontrée. Sinon, en utilisant la propriété de Markov forte au temps d'atteinte τ_y, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 < \mathbb{P}_x[V_y((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = +\infty] &= \mathbb{P}_x[\tau_y((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \text{ et } V_y((X_{n+\tau_y})_{n\in\mathbb{N}})) = +\infty] \\ &= \mathbb{P}_x[\tau_y((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty]\, \mathbb{P}_y[V_y((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = +\infty]. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}_y[V_y = +\infty] > 0$. Or, cette probabilité vaut 0 ou 1 (V_y est sous $\mathbb{P}_y$ soit une variable géométrique, soit $+\infty$ presque sûrement), donc y est un état récurrent, et la chaîne est récurrente.

Supposons maintenant $\mathbb{P}_x[\tau_F < +\infty] = 1$ pour tout état $x \in \mathfrak{X}$. Montrons que ceci implique $\mathbb{P}_x[V_F = +\infty] = 1$ pour tout état $x \in \mathfrak{X}$, et donc la récurrence positive par l'argument précédent. Il suffit de montrer que $\mathbb{P}_x[V_F \geq k] = 1$ pour tout entier positif k. Notons $\tau_F^{(k)}$ le temps de k-ième passage dans F (égal à $+\infty$ si la chaîne visite F moins de k fois). On a :

$$\{V_F \geq k\} = \{\tau_F^{(k)} < +\infty\};$$
$$\{V_F \geq k+1\} = \bigsqcup_{y \in F} \{\tau_F^{(k+1)} < +\infty \text{ et } X_{\tau_F^{(k)}} = y\}.$$

En calculant la probabilité du second événement et en utilisant la propriété de Markov forte au temps d'arrêt $\tau_F^{(k)}$, on obtient :

$$\mathbb{P}_x[V_F \geq k+1] = \sum_{y \in F} \mathbb{P}_x[\tau_F^{(k)} < +\infty \text{ et } X_{\tau_F^{(k)}} = y]\, \mathbb{P}_y[\tau_F^+ < +\infty].$$

Si $\mathbb{P}_y[\tau_F^+ < +\infty] = 1$ pour tout état $y \in F$ (le temps de retour en F partant de l'état y est fini), alors l'identité ci-dessus devient

$$\mathbb{P}_x[V_F \geq k+1] = \sum_{y \in F} \mathbb{P}_x[\tau_F^{(k)} < +\infty \text{ et } X_{\tau_F^{(k)}} = y] = \mathbb{P}_x[\tau_F^{(k)} < +\infty] = \mathbb{P}_x[V_F \geq k],$$

d'où par récurrence $\mathbb{P}_x[V_F \geq k] = \mathbb{P}_x[V_F \geq 1] = \mathbb{P}_x[\tau_F < +\infty] = 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout $k \geq 1$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}_y[\tau_F^+ < +\infty] = 1$ pour tout état y dans F. Or, par la propriété de Markov simple (méthode d'un pas en avant), si $y \in F$, alors

$$\mathbb{P}_y[\tau_F^+ < +\infty] = \sum_{x \in \mathfrak{X}} P(y,x)\, \mathbb{P}_x[\tau_F < +\infty].$$

Par hypothèse, le terme de droite est égal à $\sum_{x \in \mathfrak{X}} P(y,x)\, 1 = 1$, d'où le résultat.

9. Si $\mathbb{E}_x[\tau_F^+] < +\infty$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$, alors en particulier $\mathbb{P}_x[\tau_F < +\infty] = 1$ pour tout état x, donc d'après la question précédente, la chaîne de Markov est récurrente. Ceci permet de définir comme suggéré par l'énoncé le processus $Y_n = X_{\tau_F^{(n)}}$, qui est la chaîne de Markov observée aux instants où elle passe dans la partie F (en supposant $X_0 = x$ dans F). Pour montrer que c'est une chaîne de Markov, on calcule :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_x[Y_1 = y_1, \ldots, Y_k = y_k] \\ &= \sum_{\substack{0<t_1<\cdots<t_k \\ x_1,\ldots,x_{t_1-1} \notin F \\ \vdots \\ x_{t_{k-1}+1},\ldots,x_{t_k-1} \notin F}} P(x,x_1)\, P(x_1,x_2) \cdots P(x_{t_1-1},y_1) \cdots P(y_{k-1},x_{t_{k-1}+1}) \cdots P(x_{t_k-1},y_k) \\ &= Q(x,y_1)\, Q(y_1,y_2) \cdots Q(y_{k-1},y_k),\end{aligned}$$

où $Q(y,y')$ est la matrice de transition sur F définie par

$$Q(y,y') = \mathbb{P}_y[X_{\tau_F^+} = y'] = \sum_{\substack{t>0 \\ x_1,\ldots,x_{t-1} \notin F}} P(y,x_1)P(x_1,x_2) \cdots P(x_{t-1},y').$$

Comme la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, il en va de même pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: si $y \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{k-1} \to y'$ est un chemin possible pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reliant y à y' avec ces deux états dans F, alors la sous-suite extraite en ne gardant que les éléments de F est un chemin possible pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme F est une partie finie, la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc irréductible récurrente positive. Fixons un état $y \in F$, et notons T_y^+ le temps de retour de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en y ; on a donc $\mathbb{E}_y[T_y^+] < +\infty$. Relions maintenant les temps de retour de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sous $\mathbb{P}_y$, notons que si $\tau_y^+ = t$, alors la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est passée dans F aux instants $\tau_F^{(1)}, \ldots, \tau_F^{(k)} = t$, avec $k = T_y^+$ et $X_{\tau_F^{(1)}}, \ldots, X_{\tau_F^{(k-1)}} \neq y$. Par conséquent,

$$\tau_y^+ = \tau_F^{(T_y^+)} = \sum_{k=0}^{\infty} 1_{(k<T_y^+)}\,(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)}).$$

Notons maintenant que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[1_{(k<T_y^+)}\,(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)})] &= \sum_{x\in F\setminus\{y\}} \mathbb{E}_y\left[1_{(\tau_F^{(k)}<\tau_y^+)}\,1_{(Y_k=x)}\,(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)})\right] \\ &= \sum_{x\in F\setminus\{y\}} \mathbb{P}_y\left[\tau_F^{(k)} < \tau_y^+ \text{ et } Y_k = x\right]\,\mathbb{E}_x[\tau_F^+]\end{aligned}$$

par la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt $\tau_F^{(k)}$. Or, toutes les quantités $\mathbb{E}_x[\tau_F^+]$ avec $x \in F$ sont bornées par une constante finie M, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[1_{(k<T_y^+)}\,(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)})] \leq M \sum_{x\in F\setminus\{y\}} \mathbb{P}_y[\tau_F^{(k)} < \tau_y^+ \text{ et } Y_k = x] &= M\,\mathbb{P}_y[\tau_F^{(k)} < \tau_y^+] \\ &= M\,\mathbb{P}_y[k < T_y^+].\end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathbb{E}_y[\tau_y^+] \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_y[k < T_y^+] = M\,\mathbb{E}_y[T_y^+] < +\infty,$$

d'où la récurrence positive.