Chapitre 2

Chaînes de Markov

Résumé. Une *chaîne de Markov* est un processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les transitions sont données par une matrice stochastique $P(X_n, X_{n+1})$. Ces processus vérifient la propriété de Markov, c'est-à-dire qu'observés à partir d'un temps (d'arrêt) T, $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend que de X_T et est de nouveau une chaîne de Markov. Les états d'une chaîne de Markov peuvent être classés en deux catégories : les *états transitoires*, qui ne sont visités qu'un nombre fini de fois p.s., et les *états récurrents*, qui une fois atteints sont visités p.s. une infinité de fois, ainsi que tous les autres états dans la même classe de récurrence. Pour une chaîne de Markov irréductible récurrente, la mesure empirique et la loi marginale du processus convergent soit vers l'unique mesure de probabilité P-invariante (*récurrence positive*), soit vers le vecteur nul (*récurrence nulle*). Cette théorie s'applique en particulier aux *marches aléatoires* et aux modèles de *files d'attente*.

Dans ce qui suit, on fixe un espace d'états $\mathfrak{X}$ fini ou dénombrable, muni de la tribu de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$. Si $\mathfrak{X}$ est fini, on notera N son nombre d'éléments.

1. Matrices stochastiques et propriété de Markov

1.1. Chaînes de Markov. Une *matrice stochastique* sur $\mathfrak{X}$ est une fonction $P : (x,y) \in \mathfrak{X} \mapsto P(x,y) \in [0,1]$ telle que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$,

$$\sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y) = 1.$$

Autrement dit, tout $x \in \mathfrak{X}$ définit une mesure de probabilité $P(x,\cdot)$ sur $\mathfrak{X}$, appelée *probabilité de transition* à partir de x.

Définition 2.1 (Chaîne de Markov). *Une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice de transition P est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathfrak{X}$, telle que pour tout n, et tous points $x_0, \ldots, x_{n+1}$,*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = P(x_n, x_{n+1}). \qquad (\star\star)$$

Ainsi, la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{X_{n+1}|(X_0,\ldots,X_n)}$ est la probabilité de transition $P(X_n,\cdot)$. Il est utile de représenter les mesures de probabilité π sur $\mathfrak{X}$ par des vecteurs en ligne $(\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_k), \ldots)$. Alors, si π_0 est la loi de X_0, qui peut être arbitraire, on a

$$\mathbb{P}[(X_0, X_1, \ldots, X_n) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)] = \pi(x_0)\, P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n)$$

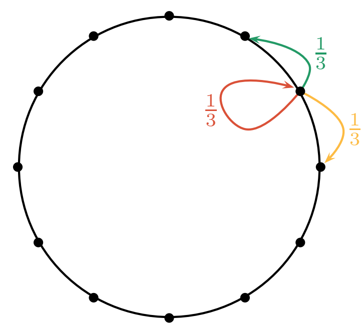
par conditionnement successif, de sorte qu'en particulier la loi π_n de X_n est donnée par le produit matriciel $\pi_n = \pi_0\, P^n$. D'un point de vue dual, si f est une fonction bornée sur $\mathfrak{X}$, vue comme un vecteur colonne, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] &= (Pf)(x_n);\\ \mathbb{E}[f(X_n)] &= \pi_n\, f = \pi_0\, P^n f.\end{aligned}$$

Notons que les produits matriciels considérés sont licites même lorsque l'espace d'états est infini dénombrable, puisqu'on a des bonnes bornes sur les sommes de coefficients sur chaque ligne de la matrice de transition.

Exemple. On représente usuellement une chaîne de Markov d'espace d'états $\mathfrak{X}$ par un graphe orienté étiqueté $G = (V, E)$ dont les sommets sont les éléments de $\mathfrak{X}$, et dont les arêtes étiquetées sont les couples (x, y) avec $P(x, y) > 0$, la valeur de la probabilité de transition étant l'étiquette de l'arête $x \to y$. Considérons par exemple la chaîne de Markov d'espace d'états $[\![1, N]\!]$, et de matrice de transition

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ;$$



Le graphe associé est dessiné ci-dessus, et la chaîne considérée est la marche aléatoire sur le cercle $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ où, à chaque étape, on a probabilité $1/3$ de rester au même endroit, et probabilité $1/3$ de sauter à gauche ou à droite. Les lois marginales de cette chaîne peuvent être calculées comme suit. Pour tout vecteur $v \in (\mathbb{C})^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$, notons

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} v(j)\, \zeta^{jk}$$

sa transformée de Fourier discrète, avec $\zeta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$. D'autre part, notons C_N la matrice circulante

$$C_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \frac{I + C_N + (C_N)^{-1}}{3}.$$

Pour tout vecteur v, $\widehat{(v\, C_N)}(k) = \zeta^k\, \hat{v}(k)$, c'est-à-dire que la conjuguée de C_N par la transformée de Fourier discrète agit diagonalement, avec valeurs propres $\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^N$. Il s'ensuit que si D est la matrice diagonale

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1 + 2\cos\frac{2\pi}{N}}{3}, \frac{1 + 2\cos\frac{4\pi}{N}}{3}, \ldots, \frac{1 + 2\cos\frac{2N\pi}{N}}{3}\right),$$

alors pour toute mesure initiale π_0, on a

$$\pi_n = \pi_0 \, P^n = \widetilde{\widehat{\pi_0} \, D^n},$$

où $\widetilde{\cdot}$ indique la transformée de Fourier inverse :

$$\widetilde{v}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} v(k) \, \zeta^{-kl}.$$

En particulier, comme D^n converge vers la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1)$, on voit que pour toute mesure initiale π_0, la loi marginale π_n converge vers le vecteur $(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$. C'est un cas particulier des théorèmes ergodiques qui seront évoqués au paragraphe 3.

On peut montrer que pour toute mesure initiale π_0 sur $\mathfrak{X}$, et toute matrice de transition P, il existe effectivement une chaîne de Markov avec cette mesure initiale et cette matrice de transition. On notera $\mathbb{P}_{\pi_0}$ et $\mathbb{E}_{\pi_0}$ les probabilités et espérances relatives à cette chaîne de Markov, et dans le cas particulier où $\pi_0 = \delta_x$ est concentrée en un seul point $x \in \mathfrak{X}$, on notera $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{E}_x$. Ces probabilités portent sur l'espace des trajectoires

$$(\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathfrak{X})^{\otimes \mathbb{N}})$$

muni de la tribu produit, et sur cet espace, on a unicité en lois trajectorielles d'une chaîne de Markov de loi initiale et matrice de transition données : la loi $\mathbb{P}_{\pi_0}$ est entièrement déterminée par l'équation ($\star\star$). Cette propriété ($\star\star$) assure que les transitions d'une chaîne de Markov au temps n sont homogènes en temps (P ne dépend pas de n), et ne dépendent que de l'état présent, c'est-à-dire que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant toute la trajectoire $(X_0, \ldots, X_n)$ ne dépend en fait que de X_n. Une reformulation de ces observations est donnée par la *propriété de Markov* :

Proposition 2.2. *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{\pi_0}$, alors pour tout temps $m \geq 0$, la chaîne décalée en temps $(X_{m+n})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une chaîne de Markov, de loi $\mathbb{P}_{\pi_m}$. De plus, la chaîne décalée est conditionnellement à X_m indépendante de $(X_0, \ldots, X_{m-1})$.*

En effet, on peut calculer les lois trajectorielles de la chaîne de Markov décalée :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_m = y_0, X_{m+1} = y_1, \ldots, X_{m+n} = y_n] \\
&= \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_{m-1} = x_{m-1}, X_m = y_0, \ldots, X_{m+n} = y_n] \\
&= \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}} \pi_0(x_0) \, P(x_0, x_1) \cdots P(x_{m-1}, y_0) \, P(y_0, y_1) \cdots P(y_{n-1}, y_n) \\
&= (\pi_0 P^m)(y_0) \, P(y_0, y_1) \cdots P(y_{n-1}, y_n) \\
&= \pi_m(y_0) \, P(y_0, y_1) \cdots P(y_{n-1}, y_n),
\end{aligned}$$

et ce sont bien celles d'une chaîne de matrice P et de mesure initiale π_m.

1.2. Temps d'arrêt et propriété de Markov forte. Une généralisation de ce principe à des temps aléatoires met en jeu la notion de temps d'arrêt, elle même dépendant de la notion de filtration d'espace. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité ; une *filtration* de cet espace est une suite croissante de sous-tribus

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}.$$

Tout processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n);$$

en particulier, une chaîne de Markov définit automatiquement une filtration. Il faut comprendre $\mathcal{F}_n$ comme l'ensemble des événements qu'on peut mesurer entre les temps 0 et n (à partir des observations de la chaîne de Markov $X_0, X_1, \ldots, X_n$). Dans ce contexte, un *temps d'arrêt* (relativement à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est une variable aléatoire $T : (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$ telle que pour tout n, l'événement $\{T = n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$. En d'autres termes, lorsque la filtration est celle associée à une chaîne de Markov, un temps d'arrêt T est un temps aléatoire tel qu'on puisse décider de $\{T = n\}$ (ou de $\{T \leq n\}$) à partir des seules observations de $X_0, \ldots, X_n$. Par exemple, si A est une partie de $\mathfrak{X}$, alors le temps d'atteinte

$$T_A = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n \in A\}$$

est un temps d'arrêt ; par contre, le temps de dernier passage

$$Q_A = \sup\{n \in \mathbb{N},\ X_n \in A\}$$

n'en est pas un.

On peut associer une sous-tribu $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{B} \mid \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$ à tout temps d'arrêt T ; c'est la tribu des événements observables jusqu'au temps T. On note alors π_T la loi de X_T. Cette définition est ambiguë lorsque $\{T = +\infty\}$ a probabilité non nulle : on convient alors que X_T n'est définie que sur l'événement $\mathcal{F}_T$-mesurable $\{T < \infty\}$.

Théorème 2.3 (Propriété de Markov). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P, et T un temps d'arrêt pour sa filtration canonique. Pour toute fonction mesurable bornée f sur l'espace des trajectoires,*

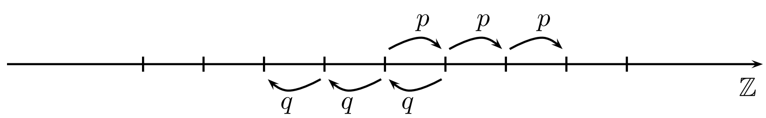
$$\mathbb{E}_{\pi_0}[\mathbb{1}_{T<\infty}\, f((X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}})|\mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{T<\infty}\, \mathbb{E}_{X_T}[f((X_n)_{n\in\mathbb{N}})],$$

les deux membres de l'identité étant $\mathcal{F}_T$-mesurables. En particulier, si $\{T < +\infty\}$ a probabilité 1, alors la loi conditionnelle de $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$ sachant $\mathcal{F}_T$ est $\mathbb{P}_{X_T}$.

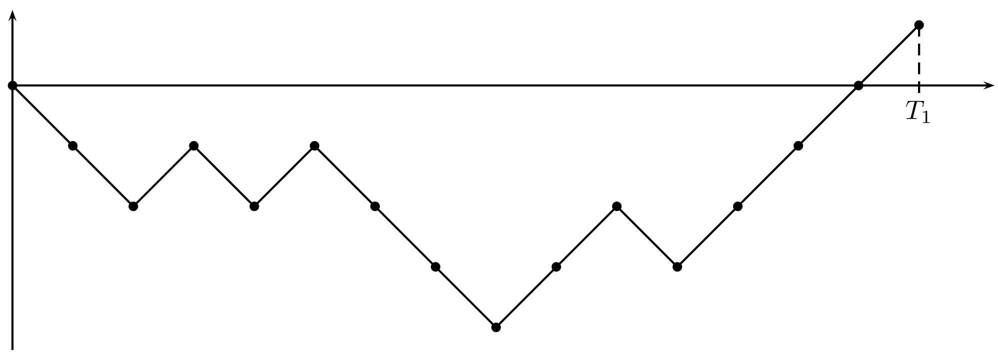
En particulier, si $X_T = x$ est presque sûrement une constante, et si l'événement $\{T < +\infty\}$ a probabilité 1, alors $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$ a loi $\mathbb{P}_x$ et est indépendante de $\mathcal{F}_T$. Plus généralement, si $\{T < +\infty\}$ a probabilité non nulle et si $X_T = x$ p.s., alors conditionnellement à cet événement, $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$ a loi $\mathbb{P}_x$ et est indépendante de $\mathcal{F}_T$. La preuve de cette propriété de Markov avec des temps d'arrêt découle immédiatement du cas classique $T = m$, en décomposant les probabilités trajectorielles en fonction de la valeur du temps d'arrêt T.

Exemple. Étant donné un réel $p \in (0,1)$, on note $q = 1-p$. Considérons alors la marche aléatoire sur $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ issue de $x_0 = 0$, et avec probabilités de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1; \\ q & \text{si } j = i-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Soit $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 1\}$ le temps d'atteinte de 1 par la marche aléatoire ; c'est un temps d'arrêt. On peut déterminer complètement la loi de T_1. En effet, la marche issue de 0 occupe des états pairs aux temps pairs et des états impairs aux temps impairs, donc T_1 est soit un nombre impair, soit $+\infty$. Supposons $T_1 = 2n+1$; alors la marche jusqu'au temps $2n$ est une excursion négative de taille $2n$:



Le nombre d'excursions de taille $2n$ est le nombre de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!},$$

et chaque excursion a probabilité $(pq)^n$ sous la loi $\mathbb{P}_0$: il y a n transitions vers le bas avec probabilité q, et n transitions vers le haut avec probabilité p. La dernière transition $P(0,1)$ ayant probabilité p, on obtient donc :

$$\mathbb{P}_0[T_1 = 2n+1] = p^{n+1}\,q^n\,\frac{2n!}{(n+1)!\,n!}.$$

En particulier, la probabilité pour que T_1 soit fini est

$$\mathbb{P}_0[T_1 < \infty] = p \sum_{n=0}^{\infty} C_n (pq)^n = \frac{2p}{1+|2p-1|} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}; \\ \frac{p}{1-p} & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

puisque $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$. Supposons $p \geq \frac{1}{2}$. Alors, la marche aléatoire $(X_{T_1+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon non ambiguë, et elle suit la loi $\mathbb{P}_1$ par la propriété de Markov ; de plus, elle est indépendante de l'excursion $(X_0, \ldots, X_{T_1})$.

En poursuivant le même exemple, on peut identifier deux comportements pour les points de l'espace d'états. Supposons dans un premier temps $p = \frac{1}{2}$. La marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de 0 visite presque sûrement l'état 1 au bout du temps fini T_1, et le même raisonnement appliqué à la marche $(1 - X_{T_1+n})_{n\in\mathbb{N}}$ montre qu'il existe un temps fini T_0' tel que $X_{T_1+T_0'} = 0$. Le temps de retour en 0

$$R_0^1 = \inf\{n \geq 1,\ X_n = 0\} \leq T_1 + T_0'$$

est donc presque sûrement fini, et c'est un temps d'arrêt. Appliquant la propriété de Markov à $(X_{R_0^1+n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient de même l'existence d'un temps de second retour

$$R_0^2 = \inf\{n \geq R_0^1 + 1,\ X_n = 0\}$$

presque sûrement fini, et plus généralement de temps de k-ième retour R_0^k pour tout k. Ainsi, la marche aléatoire revient presque sûrement en 0 une infinité de fois. Il n'est alors pas très difficile de voir qu'elle visite aussi une infinité de fois l'état 1, et en fait tous les états $n \in \mathbb{Z}$.

Supposons maintenant $p > 1/2$. La marche aléatoire atteint l'état 1 en un temps fini p.s. T_1, et la marche aléatoire décalée (X_{T_1+n}) retourne en 0 avec probabilité $r = \frac{1-p}{p} < 1$. En effet, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la marche $(1 - X_{T_1+n})_{n\in\mathbb{N}}$. Conditionnellement à l'événement

$$A_0 = \text{“ } \textit{retourner en } 0 \textit{ après un passage par l'état } 1 \text{ ”},$$

notant S_0 le temps de premier retour en 0 après le passage en 1, la marche aléatoire décalée $(X_{S_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_0[\cdot|A_0]$ une marche aléatoire de loi $\mathbb{P}_0$ et indépendante de $\mathcal{F}_{S_0}$. On en déduit immédiatement que le nombre de retours en 0 après un passage par l'état 1 suit une loi géométrique de paramètre $1 - r$, donc est fini presque sûrement. Par conséquent, la marche aléatoire ne visite p.s. qu'un nombre fini de fois l'état 0, et au-delà d'un temps aléatoire $Q_0 = \sup\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 0\}$, elle reste supérieure ou égale à 1. En réalité, le résultat est vrai pour tous les états $n \in \mathbb{Z}$.

2. Classification des états d'une chaîne de Markov

La discussion du paragraphe précédent sur les marches aléatoires a permis d'identifier deux comportements pour un état $x \in \mathfrak{X}$ d'une marche aléatoire ; le résultat se généralise en fait à toutes les chaînes de Markov. Si $x \in \mathfrak{X}$, notons

$$V_x = \mathrm{card}\,\{n \in \mathbb{N},\ X_n = x\}\ \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\},$$

et définissons récursivement les temps d'arrêt

$$R_x^{k\geq 1} = \begin{cases} \inf\{n \geq R_x^{k-1} + 1,\ X_n = x\} & \text{si } V_x \geq k + \mathbb{1}_{X_0=x}; \\ +\infty & \text{sinon}, \end{cases}$$

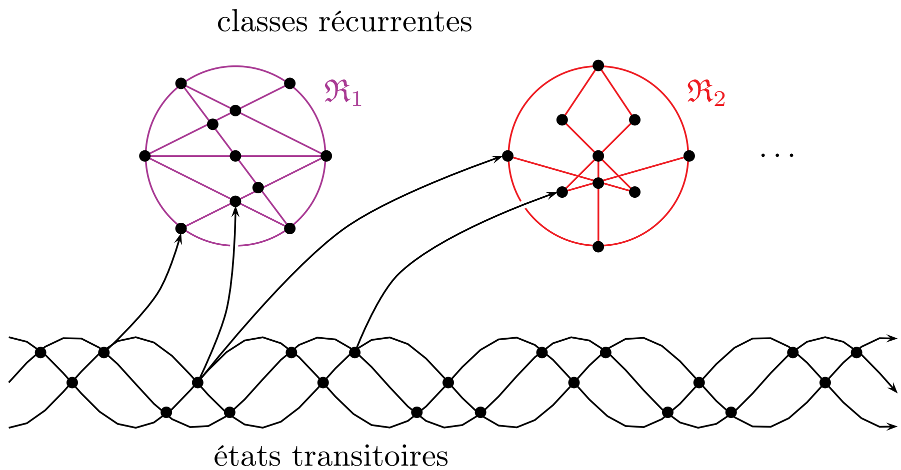
avec $R_x^0 = 0$ par convention.

Théorème 2.4 (Récurrence et transience). *Soit P une matrice stochastique sur l'espace d'états $\mathfrak{X}$. Chaque état x est :*

(1) soit récurrent, c'est-à-dire que sous $\mathbb{P}_x$, $V_x = +\infty$ presque sûrement et R_x^k est fini p.s. pour tout k ;

(2) soit transitoire, c'est-à-dire que sous $\mathbb{P}_x$, $V_x < +\infty$ presque sûrement. Dans ce cas, $V_x - 1$ suit sous $\mathbb{P}_x$ une loi géométrique de paramètre $1 - r$ pour un certain $r < 1$, et pour tout k, $\mathbb{P}_x[R_x^k < +\infty] = \mathbb{P}_x[V_x \geq k+1] = r^k$.

Notons en particulier que $V_x < +\infty$ si et seulement $\mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,x) < +\infty$, ce qui fournit un critère numérique de récurrence ou de transience des états d'une chaîne de Markov.



D'après le théorème 2.4, une fois un état x atteint, on y retourne p.s. soit un nombre fini de fois suivant une loi géométrique (transience), soit un nombre infini de fois. Cette classification est complétée par le résultat suivant :

Théorème 2.5 (Partition de Markov). *Soit $K(x,y) = \mathbb{E}_x[V_y] = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,y)$ le noyau de la chaîne de Markov, $\mathfrak{R}$ l'ensemble de ces états récurrents, et $\mathfrak{T}$ l'ensemble de ces états transitoires.*

(1) La relation

$$x \, R \, y \iff K(x,y) > 0,$$

qui est la clôture transitive du graphe orienté associé à la chaîne de Markov de matrice P, est une relation d'équivalence lorsqu'on la restreint à $\mathfrak{R}$. De plus, si $x \in \mathfrak{R}$ et $y \in \mathfrak{T}$, alors $K(x,y) = 0$.

(2) La partition d'ensembles $\mathfrak{R} = \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{R}_i$ associée à la relation R est telle que, si $x \in \mathfrak{R}_i$, alors sous $\mathbb{P}_x$, $V_y = +\infty$ p.s. pour tout $y \in \mathfrak{R}_i$, et $V_y = 0$ p.s. pour tout $y \notin \mathfrak{R}_i$. En d'autres termes, dans une classe de récurrence $\mathfrak{R}_i$, on n'en sort pas et on visite chaque état de la classe une infinité de fois.

(3) Soit $x \in \mathfrak{T}$. Sous $\mathbb{P}_x$, soit la chaîne ne visite que des états transitoires (chacun un nombre fini de fois), soit $T = T_{\mathfrak{R}} < \infty$ et il existe un entier aléatoire $i \in I$ tel que $X_T \in \mathfrak{R}_i$. Dans ce cas, $(X_{T+n})_{n \in \mathbb{N}}$ reste dans cette classe $\mathfrak{R}_i$ (et visite chaque état de $\mathfrak{R}_i$ une infinité de fois).

Une chaîne de Markov est dite *irréductible* si $K(x,y) > 0$ pour tout couple x, y. Dans ce cas, soit la chaîne consiste en une seule classe d'états récurrents, soit la chaîne consiste seulement en états tous transitoires. Le second cas est exclus pour une chaîne de Markov finie :

Proposition 2.6. *Une chaîne de Markov d'espace d'états finis a toujours au moins un état récurrent. Si elle est irréductible, tous ses états sont donc récurrents et visités une infinité de fois presque sûrement.*

Exemple. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est récurrente irréductible. Plus généralement, toute chaîne de Markov finie dont le graphe orienté est connexe est récurrente irréductible.

Exemple. Considérons la marche aléatoire de paramètre p sur $\mathbb{Z}$. Elle est clairement irréductible, et d'après la discussion de §1, l'état 0 est récurrent si $p = \frac{1}{2}$, et transitoire si $p > \frac{1}{2}$. Par symétrie, l'état 0 est aussi transitoire si $p < \frac{1}{2}$, donc la chaîne est récurrente irréductible si $p = \frac{1}{2}$, et transitoire irréductible dans le cas contraire.

3. Théorie de Perron-Frobenius et théorèmes ergodiques

La classification des états donne une information qualitative sur les positions visitées par une chaîne de Markov ; les *théorèmes ergodiques* vont pour leur part donner une information quantitative.

3.1. Valeurs propres des matrices positives. Dans le cas d'une chaîne de Markov finie, ces théorèmes ergodiques sont liés à la théorie de Perron-Frobenius des matrices positives. Soit P une matrice de taille $N \times N$ à coefficients positifs ou nuls. La matrice est dite irréductible si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(1) Si $(e_1, \ldots, e_N)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$, il n'existe pas de sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ non trivial et laissé stable par P.

(2) Il n'existe pas de matrice de permutation M_σ telle que
$$M_\sigma P M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec } B \text{ et } D \text{ matrices non vides.}$$

(3) Pour tous indices i, j, il existe un exposant n tel que $P^n(i,j) > 0$; autrement dit, la chaîne de Markov associée à P est irréductible.

La période d'un indice i pour une matrice positive P est le plus grand commun diviseur des entiers n tels que $P^n(i,i) > 0$. Si la matrice est irréductible, alors cette période $h(P,i) = h(P)$ ne dépend pas de $i \in [\![1, N]\!]$, et est simplement appelée la *période de la matrice*. Une chaîne de Markov finie est dite *apériodique* si la période de sa matrice de transition est 1. On peut montrer que si la période d'une matrice irréductible est plus grande que 1, alors il existe une partition $\mathfrak{X} = \bigsqcup_{i=1}^{h} \mathfrak{X}_i$ de l'espace d'états $\mathfrak{X} = [\![1, N]\!]$ et une matrice de permutation M_σ adaptée à cette partition telle que

$$M_\sigma P M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_{h-1} \\ P_h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.7 (Perron-Frobenius). *Soit P une matrice positive irréductible de taille N et de période h. Il existe un réel positif $r = r(P)$ tel que :*

(1) Toute valeur propre complexe de P est de module plus petit que r.

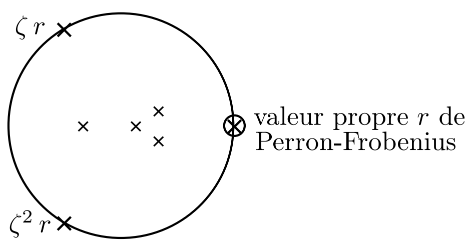
(2) Une valeur propre complexe de P est de module égal à r si et seulement si elle s'écrit $\zeta\, r$ avec ζ racine h-ième de l'unité. Ces h valeurs propres sont des valeurs propres simples de P.

(3) Un vecteur propre de P est à coordonnées positives ou nulles si et seulement si c'est un vecteur propre pour la valeur propre r. Dans ce cas, ces coordonnées sont toutes strictement positives.

(4) Le réel r vérifie :

$$\min_{i \in [\![1,N]\!]} \left(\sum_{j=1}^{N} P(i,j) \right) \leq r \leq \max_{i \in [\![1,N]\!]} \left(\sum_{j=1}^{N} P(i,j) \right).$$

En particulier, pour toute matrice stochastique, $r = 1$.



3.2. Théorèmes ergodiques pour les espaces d'états finis. Le théorème 2.7 relatif à la répartition des valeurs propres d'une matrice stochastique implique les deux théorèmes ergodiques suivants. Soit P une matrice stochastique irréductible sur l'espace d'états fini $\mathfrak{X} = [\![1, N]\!]$, et π_∞ le vecteur de Perron-Frobenius de P normalisé de sorte que

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_\infty(i) = 1.$$

C'est l'unique mesure de probabilité invariante sous P : $\pi_\infty P = \pi_\infty$.

THÉORÈME 2.8 (Convergence en loi vers la mesure stationnaire, cas des espaces finis). *Si la chaîne de Markov est apériodique, alors pour toute mesure initiale* π_0, $\pi_n = \pi_0\, P^n$ *converge vers* π_∞. *Dans le cas d'un chaîne de Markov de période* $h > 1$, *on a convergence de la moyenne* $\frac{\pi_n+\pi_{n+1}+\cdots+\pi_{n+h-1}}{h}$ *vers* π_∞.

En effet, on peut décomposer le vecteur π_0 sur une base adaptée à la décomposition de Jordan de P, et dans l'asymptotique $n \to \infty$, seules les composantes de π_0 correspondant aux valeurs propres de module 1 de P subsistent dans $\pi_n = \pi_0\, P^n$ (les autres tendent vers 0 exponentiellement vite). Ceci démontre le théorème dans le cas apériodique $h = 1$, et dans le cas périodique, la combinaison linéaire

$$\frac{\pi_n + \pi_{n+1} + \cdots + \pi_{n+h-1}}{h} = \left(\frac{\pi_0 + \pi_0 P + \cdots + \pi_0 P^{h-1}}{h}\right) P^n$$

a ses composantes correspondant aux valeurs propres ζ avec $\zeta \neq 1$, $\zeta^h = 1$ qui s'annulent, ce qui permet de se ramener au cas apériodique.

THÉORÈME 2.9 (Convergence presque sûre des mesures empiriques, cas des espaces finis). *Soit* P *une matrice stochastique irréductible sur l'espace d'états fini* $\mathfrak{X} = [\![1, N]\!]$, *et* π_∞ *le vecteur de Perron-Frobenius de* P. *Pour toute mesure initiale* π_0, *on a* $\mathbb{P}_{\pi_0}$ *presque sûrement*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i} \to \pi_\infty.$$

Ainsi, la mesure empirique observée converge presque sûrement vers la mesure invariante π_0. *De plus, on a*

$$\pi_\infty(k) = \frac{1}{\mathbb{E}_k[R_k^1]}.$$

En effet, en utilisant la propriété de Markov, on peut appliquer la loi des grands nombres aux suites $(R_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui s'écrivent presque comme sommes de variables indépendantes et identiquement distribuées ; et ces suites régissent l'asymptotique de la mesure empirique, car

$$\mathbb{P}[R_k^{\lceil n\alpha \rceil} \leq n < R_k^{\lfloor n\beta \rfloor + 1}] = \mathbb{P}[\mu_n(k) \in [\alpha, \beta]]$$

si μ_n est la mesure empirique aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$.

EXEMPLE. Pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on a vu déjà que la loi marginale π_n convergeait vers $\pi_\infty = (\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$, qui est la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. D'après le théorème 2.9, on a également

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i} \to \left(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right),$$

ce qui signifie que pour tout état $x \in [\![1, N]\!]$, le nombre de visites de l'état x défini par $V_{x,n} = \mathrm{card}\,\{i \in [\![1, n]\!]\,,\ X_i = x\}$ satisfait la loi des grands nombres

$$\frac{V_{x,n}}{n} \to \frac{1}{N} \quad \text{presque sûrement.}$$

Dans le cas des espaces finis, on a également un théorème central limite, qui peut s'énoncer comme suit :

PROPOSITION 2.10. *Soit P une matrice stochastique irréductible, π_∞ son vecteur de Perron-Frobenus. Pour toute fonction bornée f sur $\mathfrak{X}$,*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \pi_0(f)\right) \rightharpoonup \mathcal{N}\left(0\,,\,\big(\pi_0(f^2) - \pi_0(f)^2\big) + 2\sum_{i=1}^{\infty}\big(\pi_0(f\,P^i f) - \pi_0(f)^2\big)\right)$$

la variance de la loi normale limite étant toujours finie.

Il existe également un principe de grande déviations pour la mesure empirique, le théorème de Sanov ; ainsi, la plupart des résultats usuels sur les sommes de variables indépendantes admettent une généralisation au cas des chaînes de Markov d'espaces d'états finis.

3.3. Mesures invariantes et théorèmes ergodiques pour les espaces d'états infinis. Pour les espaces d'états infinis, la notion importante qui permet d'étendre les théorèmes 2.8 et 2.9 est celle de *mesure invariante*. Soit ν une mesure positive (non nulle) sur $\mathfrak{X}$, et P une matrice stochastique ; la mesure est dite invariante si $\nu P = \nu$. Si la mesure $\nu = \pi_0$ est une mesure de probabilité invariante, alors les lois marginales $\pi_n = \mathbb{P}_{X_n}$ de la chaîne de Markov de matrice P et mesure initiale π_0 sont constantes et égales à π_0.

PROPOSITION 2.11. *Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov récurrente irréductible. À un coefficient multiplicatif positif près, il existe une unique mesure invariante par P. Une mesure invariante est donnée par*

$$\nu(x) = \mathbb{E}_{x_0}\left[\sum_{i=1}^{R^1_{x_0}} \delta_{X_i}(x)\right]$$

où x_0 est un point de $\mathfrak{X}$.

Il existe donc deux classes de chaînes de Markov récurrentes irréductibles :

(1) Soit $\mathbb{E}_{x_0}[R^1_{x_0}] < \infty$ pour un point $x_0 \in \mathfrak{X}$, et en fait pour tout point de $\mathfrak{X}$. Alors, on dit que la chaîne de Markov est *récurrente positive*, et il existe une unique mesure de probabilité invariante, donnée par $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[R^1_x]}$.

(2) Soit $\mathbb{E}_{x_0}[R^1_{x_0}] = +\infty$ pour un point $x_0 \in \mathfrak{X}$, et en fait tout point de $\mathfrak{X}$. Alors, on dit que la chaîne de Markov est *récurrente nulle*, et toutes les mesures invariantes pour P ont masse infinie. Pour tout couple (x, y), $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = 0$.

Pour les chaînes de Markov d'espaces d'états finis, on est toujours dans le cas récurrent positif. La terminologie de récurrence positive et récurrence nulle est justifiée par le théorème ergodique suivant :

THÉORÈME 2.12 (Théorème ergodique pour les chaînes de Markov, cas général). *Soit P une matrice stochastique récurrente irréductible sur un espace d'états $\mathfrak{X}$.*

(1) Si la chaîne est récurrente positive, alors la mesure empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}$ *converge au sens vague presque sûrement vers* π_∞*, l'unique mesure de probabilité invariante par* P*. Si de plus la chaîne de Markov est apériodique, alors les lois marginales convergent également :* $\pi_n \rightharpoonup \pi_\infty$*.*

(2) Si la chaîne est récurrente nulle, alors la mesure empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}$ *converge au sens vague presque sûrement vers* 0*.*

Remarque. Sur un espace d'états infini (discret), on doit utiliser la notion de *convergence vague*, définie comme suit : une suite de mesures de probabilité $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers une mesure positive ν si pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\nu_n(x) \to \nu(x)$. Notons dans ce cas que par le lemme de Fatou, ν a une masse comprise entre 0 et 1. De façon équivalente, pour toute fonction $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 à l'infini, $\nu_n(f) \to \nu(f)$; cette définition de la convergence vague s'étendant à des espaces mesurables plus généraux que les espaces discrets.

Remarque. D'autre part, on peut montrer que l'existence d'une mesure de probabilité invariante pour une chaîne de Markov irréductible garantit la récurrence (positive) de la chaîne.

4. Marches aléatoires

Appliquons la théorie générale des paragraphes 2 et 3 au cas des marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou dans un réseau $\mathbb{Z}^d$. Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ issue de $x_0 = 0$ et de matrice de transition

$$P(x,y) = \rho(y-x).$$

Le cas particulier où $\rho = (\delta_1 + \delta_{-1})/2$ correspond à la *marche aléatoire simple* sur $\mathbb{Z}$, où l'on saute à chaque étape à gauche ou à droite avec probabilité $\frac{1}{2}$. Une représentation de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes et toutes de loi ρ.

4.1. Récurrence et transience en dimension 1**.** On supposera dans ce qui suit $\sum_{x\in\mathbb{Z}} |x|\,\rho(x) < \infty$.

Théorème 2.13. *La marche aléatoire est :*

— *transitoire si* $\sum_{x\in\mathbb{Z}} x\,\rho(x) \neq 0$*,*
— *récurrente si* $\sum_{x\in\mathbb{Z}} x\,\rho(x) = 0$*.*

Dans ce dernier cas, elle est récurrente irréductible sur l'espace d'états $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}[\operatorname{supp}\rho]$*, le sous-groupe engendré dans* $\mathbb{Z}$ *par le support de la mesure de transition* ρ*.*

Démonstration. Notant Y une variable de loi ρ, si $\mathbb{E}[Y] = m \neq 0$, supposant par exemple $m > 0$, on a $\frac{X_n}{n} \to m$ presque sûrement par la loi forte des grands nombres, donc en particulier $X_n \to +\infty$ presque sûrement, ce qui implique le caractère transitoire de la marche aléatoire.

Inversement, supposons $\mathbb{E}[Y] = 0$. Si 0 est un état transitoire, alors $K(0,0) = \mathbb{E}_0[V_0] < \infty$. Or, par la propriété de Markov forte, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$K(0,x) = \mathbb{P}_0[R^1_x < \infty]\, K(x,x) \leq K(x,x) = K(0,0),$$

donc $\sum_{|x| \leq Cn} K(0,x) \leq (2Cn+1)\, K(0,0)$ pour toute constante C. D'autre part, par la loi forte des grands nombres, $|X_n| \leq \varepsilon n$ avec probabilité tendant vers 1 pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'ensuit que pour n assez grand (choisi en fonction de ε),

$$\sum_{|x| \leq \varepsilon n} \mathbb{E}_0\left[\sum_{i=1}^n \delta_{X_i} = x\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[|X_i| \leq \varepsilon n] \geq \frac{n}{2}.$$

Or, le terme de droite est plus petit que $\sum_{|x| \leq \varepsilon n} K(0,x) \leq (2\varepsilon n + 1)\, K(0,0)$. Choisissant un ε suffisamment petit, on obtient une contradiction, donc 0 est forcément un état récurrent si $\mathbb{E}[Y] = 0$. Dans ce cas, comme $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, la chaîne de Markov ne visite que des états dans $\mathfrak{X} = \mathbb{N}[\operatorname{supp} \rho]$, le sous-semi-groupe engendré par le support de ρ dans $\mathbb{Z}$; et tous ces états satisfont $K(0,x) > 0$, donc la chaîne de Markov est récurrente irréductible sur $\mathfrak{X}$. Comme $K(x,y) > 0$ est une relation d'équivalence entre états récurrents, $K(0,x) > 0$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$ implique $K(x,0) > 0$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. Or, $K(x,0) = K(0,-x)$, donc si $x \in \mathfrak{X}$, alors $-x \in \mathfrak{X}$, et $\mathfrak{X}$ est en fait un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. □

Supposons la chaîne récurrente irréductible, avec $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$. On a toujours récurrence nulle : en effet, la mesure de comptage N est invariante par la matrice de transition :

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \ (NP)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} N(y)\, P(y,x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \rho(y-x) = 1 = N(x).$$

Comme c'est une mesure de masse infinie, on a bien récurrence nulle, et ainsi, on a par exemple $\mathbb{E}_0[R^1_0] = +\infty$, quelle que soit la mesure de transition ρ.

4.2. Principe de réflexion. Dans le cas de la marche aléatoire simple, qui est récurrente nulle, on peut étudier plus en détail les trajectoires de la marche aléatoire, les résultats qui suivent se généralisant à la limite d'échelle des marches renormalisées $(X_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n})_{t \geq 0}$, qui est le mouvement brownien. Rappelons que les lois marginales de la marche aléatoire simple sont données par :

$$\mathbb{P}[X_n = k] = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}\, \mathbb{1}_{k \equiv n \bmod 2}.$$

En effet, on peut compter les trajectoires qui atteignent l'état k en n étapes par un coefficient binomial. D'autre part, des propriétés importantes de la marche aléatoire simple sont :

(1) l'homogénéité en temps et en espace : pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $(X_{T+n} - X_T)_{n\in\mathbb{N}}$ est de nouveau une marche aléatoire simple issue de 0, indépendante de $\mathcal{F}_T$.

(2) la symétrie : le processus $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une marche aléatoire simple.

(3) la réversibilité : pour tout temps fini m, le processus aléatoire $(X_{m-n} - X_m)_{0\leq n\leq m}$ est une marche aléatoire simple (à horizon fini).

Pour la troisième propriété, notons $Y_n = X_{m-n} - X_m$, et calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_1 = y_1, \ldots, Y_m = y_m] &= \mathbb{P}[X_{m-1} = X_m + y_1, \ldots, X_0 = X_m + y_m] \\
&= \mathbb{P}_0[X_m = -y_m, X_{m-1} = y_1 - y_m, \ldots, X_1 = y_{m-1} - y_m] \\
&= \rho(-y_1)\,\rho(y_1 - y_2)\,\cdots\,\rho(y_{m-1} - y_m) \\
&= \rho(y_1)\,\rho(y_2 - y_1)\,\cdots\,\rho(y_m - y_{m-1}) \\
&= \mathbb{P}_0[X_1 = y_1, \ldots, X_m = y_m].
\end{aligned}$$

Notons que ces trois propriétés utilisent uniquement les propriétés de Markov et la *symétrie* $\rho(x) = \rho(-x)$ de la loi de transition ; ainsi, une partie de ce qui suit se généralise aux marches aléatoires symétriques.

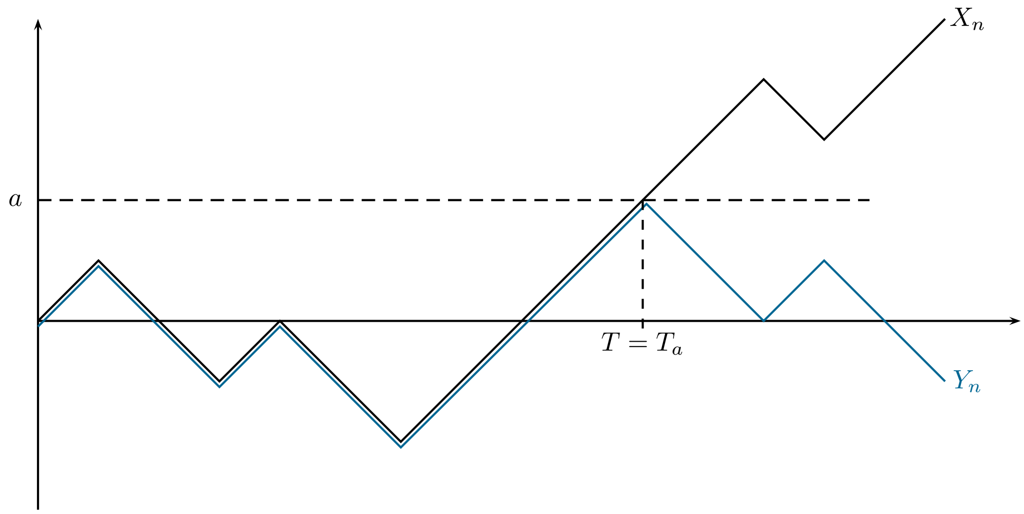
En combinant ces propriétés, on peut démontrer le principe de réflexion suivant, qui a de nombreuses conséquences fines pour les trajectoires de la marche aléatoire simple :

THÉORÈME 2.14 (Principe de réflexion). *Soit $(X_n)_{n\in N}$ une marche aléatoire simple, et T un temps d'arrêt fini presque sûrement. On suppose pour simplifier $X_T = a$ constant presque sûrement, et l'on considère le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est obtenu à partir de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en effectuant une réflection de la trajectoire après le temps T :*

$$Y_n = \begin{cases} X_n & si\ n \leq T; \\ X_T - (X_n - X_T) = 2a - X_n & si\ n \geq T. \end{cases}$$

Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire simple.

Le théorème est le plus souvent utilisé avec le temps d'atteinte $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = a\}$ d'un état a, *cf.* le dessin ci-dessous.



Exemple. Soit $k \geq 0$ un entier. Calculons la probabilité sachant $X_n = k$ pour que $(X_m)_{m \leq n}$ reste positif ou nul. Si $(X_m)_{m \leq n}$ devient négatif, alors le temps d'atteinte T_{-1}^X de l'état -1 par la chaîne $(X_n)_{n \in N}$ est inférieur à n. Notons Y_n la marche aléatoire réfléchie en ce temps d'arrêt, qui est fini p.s. puisque la marche aléatoire est récurrente irréductible. Notons que $T_{-1}^X = T_{-1}^Y$, et que :

$$\{T_{-1}^X \leq n \text{ et } X_n = k\} = \{T_{-1}^Y \leq n \text{ et } Y_n = -2-k\} = \{Y_n = -2-k\}.$$

La probabilité conditionnelle recherchée est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1, \ldots, X_n \geq 0 | X_n = k] &= 1 - \frac{\mathbb{P}[Y_n = -2-k]}{\mathbb{P}[X_n = k]} = 1 - \frac{\mathbb{P}[X_n = k+2]}{\mathbb{P}[X_n = k]} \\ &= 1 - \frac{\binom{n}{\frac{n+k}{2}+1}}{\binom{n}{\frac{n+k}{2}}} = 1 - \frac{n-k}{n+k+2} = \frac{k+1}{\frac{n+k}{2}+1}.\end{aligned}$$

En particulier, sachant que $2n$ est un temps de retour en 0, il y a une probabilité $\frac{1}{n+1}$ pour que la marche aléatoire soit restée positive entre les instants 0 et $2n$. D'autre part, sachant que $2n$ est un temps de retour en 0, il y a probabilité $\frac{1}{2n-1}$ pour qu'il s'agisse du temps de premier retour en 0. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_0^1 = 2n] &= \mathbb{P}[R_0^1 = 2n \text{ et } X_1 = X_{2n-1} = 1] + \mathbb{P}[R_0^1 = 2n \text{ et } X_1 = X_{2n-1} = -1] \\ &= 2\,\mathbb{P}[R_0^1 = 2n \text{ et } X_1 = X_{2n-1} = 1] \\ &= 2\,\mathbb{P}[X_1 = 1,\, \widetilde{X}_1 \geq 0, \ldots, \widetilde{X}_{2n-3} \geq 0,\, \widetilde{X}_{2n-2} = 0, X_{2n} - X_{2n-1} = -1] \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}[\widetilde{X}_1 \geq 0, \ldots, \widetilde{X}_{2n-3} \geq 0, \widetilde{X}_{2n-2} = 0] = \frac{1}{2n}\,\mathbb{P}[\widetilde{X}_{2n-2} = 0]\end{aligned}$$

avec $\widetilde{X}_i = X_{i+1} - X_1$. On conclut que

$$\mathbb{P}[R_0^1 = 2n | X_{2n} = 0] = \frac{1}{2n} \frac{\mathbb{P}[X_{2n-2} = 0]}{\mathbb{P}[X_{2n} = 0]} = \frac{1}{2n-1}.$$

Exemple. Soit $k > 0$ un entier. La probabilité sachant $X_n = k$ pour que $(X_m)_{1\leq m\leq n}$ reste strictement positif est

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}_0[X_1,\dots,X_n > 0 \text{ et } X_n = k]}{\mathbb{P}_0[X_n = k]} &= \frac{\mathbb{P}_0[\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{n-1} \geq 0 \text{ et } X_{n-1} = k-1]}{2\,\mathbb{P}_0[X_n = k]} \\ &= \frac{k}{n+k+1}\,\frac{\mathbb{P}_0[X_{n-1} = k-1]}{\mathbb{P}_0[X_n = k]} = \frac{k}{n}.\end{aligned}$$

Ce résultat est le théorème des scrutins (*ballot theorem*). Il permet également de calculer

$$\mathbb{P}[R^1_k = m | X_m = k] = \frac{k}{m}.$$

En effet, en utilisant la réversibilité et la symétrie de la marche aléatoire simple, notant $-Y_n = X_{m-n} - X_m$, on a :

$$\begin{aligned}\{R^{X,1}_k = m \text{ et } X_m = k\} &= \{X_1 < k,\dots,X_{m-1} < k, X_m = k\} \\ &= \{Y_1 > 0,\dots,Y_{m-1} > 0, Y_m = k\}\end{aligned}$$

et $(Y_n)_{0\leq n\leq m}$ est une marche aléatoire simple.

Une autre utilisation classique du principe 2.14 est dans l'étude de $S_n = \sup_{0\leq i\leq n} X_i$, qui est un processus aléatoire croissant à valeurs entières positives. Soient $a \geq b$ deux entiers, avec a positif. On peut calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n \geq a,\ X_n \leq b] = \mathbb{P}[T^X_a \leq n,\ X_n \leq b] &= \mathbb{P}[T^Y_a \leq n,\ Y_n \geq 2a-b] \\ = \mathbb{P}[Y_n \geq 2a-b] &= \mathbb{P}[X_n \geq 2a-b]\end{aligned}$$

en utilisant le principe de réflexion pour le temps d'arrêt T_a. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n \geq a,\ X_n = b] &= \mathbb{P}[S_n \geq a,\ X_n \leq b] - \mathbb{P}[S_n \geq a,\ X_n \leq b-1] \\ &= \mathbb{P}[X_n \geq 2a-b] - \mathbb{P}[X_n \geq 2a-b+1] = \mathbb{P}[X_n = 2a-b]\end{aligned}$$

si $a \geq b$; dans le cas contraire, $\mathbb{P}[S_n \geq a,\ X_n = b] = \mathbb{P}[X_n = b]$. On obtient ainsi la loi jointe de (S_n, X_n), et par exemple, les lois marginales de S_n sont données par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n \geq a] &= \sum_{b>a} \mathbb{P}[X_n = b] + \sum_{b\leq a} \mathbb{P}[X_n = 2a-b] \\ &= \sum_{b>a} \mathbb{P}[X_n = b] + \sum_{b\geq a} \mathbb{P}[X_n = b] \\ &= \mathbb{P}[X_n > a] + \mathbb{P}[X_n \geq a] \\ &= \mathbb{P}[X_n \geq a+1] + \mathbb{P}[X_n \geq a].\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{P}[S_n = a] = \mathbb{P}[X_n = a+1] + \mathbb{P}[X_n = a]$ pour tout $a \geq 0$.

Il convient de noter que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$. En effet, on peut calculer $\mathbb{P}[S_4 = 3|S_3 = 2] = 0$, qui est différent de $\mathbb{P}[S_3 = 3|S_2 = 2] = \frac{1}{2}$. En revanche, on peut montrer que les deux processus

$$(S_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (2S_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont deux chaînes de Markov, la première ayant la loi d'une marche aléatoire simple réfléchie par l'axe $x = 0$, la seconde ayant la loi d'une marche aléatoire simple "conditionnée à rester positive" en un certain sens, avec probabilités de transition

$$P(k, k+1) = \frac{k+2}{2k+2} \qquad ; \qquad P(k, k-1) = \frac{k}{2k+2}.$$

4.3. Loi de l'arcsinus. Une autre classe de résultats classiques pour les marches aléatoires simples est reliée à la *loi de l'arcsinus*.

Exemple. Fixons $k > 0$, et calculons la loi du temps de dernier passage en 0 sachant $X_n = k$. Si $Y_m = X_n - X_{n-m}$, alors les événements suivants sont les mêmes :

$$\begin{aligned}
&\{X_n = k \text{ et le dernier retour en 0 a lieu au temps } 2j\}\\
&= \{X_{2j} = 0,\ X_{2j+1}, \ldots, X_{n-1} > 0,\ X_n = k\}\\
&= \{Y_1, \ldots, Y_{n-2j-1} < k,\ Y_{n-2j} = Y_n = k\}\\
&= \{T_k^Y = n - 2j,\ Y_n = k\}.
\end{aligned}$$

L'événement sur la seconde ligne s'écrit aussi

$$\{X_{2j} = 0 \text{ et } Z_1, \ldots, Z_{n-2j-1} > 0, Z_{n-2j} = k\},$$

où $Z_i = X_{i+2j} - X_{2j}$ est une marche simple indépendante de $\mathcal{F}_{2j}$. Par conséquent, la probabilité de l'événement considéré est

$$\mathbb{P}_0[X_{2j} = 0]\, \mathbb{P}_0[X_1, \ldots, X_{n-2j-1} > 0, X_{n-2j} = k] = \mathbb{P}_0[X_{2j} = 0]\, \mathbb{P}_0[X_{2n-j} = k]\, \frac{k}{2n-j}.$$

D'autre part, par réversibilité, l'événement sur la dernière ligne de la liste a une probabilité égale à $\mathbb{P}_0[X_{2j} = 0]\, \mathbb{P}_0[T_k = n - 2j]$. On en déduit d'une part la loi des temps d'atteinte :

$$\mathbb{P}_0[T_k = n] = \frac{k}{n}\, \mathbb{P}_0[X_n = k]$$

et d'autre part la loi conditionnelle

$$\mathbb{P}_0[D_{n,0} = 2j | X_n = k] = \frac{k\, \mathbb{P}_0[X_{2j} = 0]\, \mathbb{P}_0[X_{n-2j} = k]}{(n-2j)\, \mathbb{P}_0[X_n = k]},$$

où $D_{n,0}$ désigne le temps de dernier passage en 0. Il s'ensuit que la loi du dernier passage en 0 au temps n est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0[D_{n,0} = 2j] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|k|\, \mathbb{P}_0[X_{n-2j} = k]}{n-2j}\ \mathbb{P}_0[X_{2j} = 0]\\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_0[X_1 \cdots X_{n-2j-1} \neq 0,\ X_{n-2j} = k]\ \mathbb{P}_0[X_{2j} = 0]\\
&= \mathbb{P}_0[X_1 \cdots X_{n-2j} \neq 0]\ \mathbb{P}_0[X_{2j} = 0].
\end{aligned}$$

Supposons le temps pair égal à $2n$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0[X_1\cdots X_{2n}\neq 0] &= 2\,\mathbb{P}_0[X_1=1,\ X_2,\dots,X_{2n}\geq 1]\\ &= 2\,\mathbb{P}_0[X_1=1]\,\mathbb{P}_0[X_1,\dots,X_{2n-1}\geq 0]\\ &= \mathbb{P}_0[X_1,\dots,X_{2n-1}\geq 0] = \mathbb{P}_0[X_1,\dots,X_{2n}\geq 0]\\ &= \mathbb{P}_0[S_{2n}=0] = \mathbb{P}_0[X_{2n}=0]+\mathbb{P}_0[X_{2n}=1]\\ &= \mathbb{P}_0[X_{2n}=0]\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov pour la seconde ligne ; la symétrie pour la quatrième ligne ; et plusieurs fois le fait que X_i a la parité de i. On conclut que la loi du temps de dernier passage en 0 au temps $2n$ est donnée par *la loi de l'arcsinus discrète*

$$\mathbb{P}[D_{2n,0}=2j] = \mathbb{P}_0[X_{2j}=0]\ \mathbb{P}_0[X_{2n-2j}=0].$$

Exemple. La loi de l'arcsinus discrète intervient également dans l'analyse du temps passée par une marche aléatoire simple au-dessus de 0. Soit T_n^+ le nombre d'indices $1\leq i\leq n$ tels que $\max(X_i,X_{i-1})>0$, et T_n^- le nombre d'indices $1\leq i\leq n$ tels que $\min(X_i,X_{i-1})<0$. Les variables T_n^+ et T_n^- sont couplées par la relation $n=T_n^++T_n^-$, et elles mesurent le temps passé au-dessus ou au-dessous de l'axe $x=0$ par la marche aléatoire. On peut montrer que T_{2n}^+ suit elle aussi la loi de l'arcsinus discrète

$$\mathbb{P}[T_{2n,0}=2j] = \mathbb{P}_0[X_{2j}=0]\ \mathbb{P}_0[X_{2n-2j}=0] = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j}.$$

4.4. Utilisation de fonctions harmoniques. Une dernière classe de résultats classiques portant sur les marches aléatoires simples en dimension 1 est reliée à la propriété de martingale de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, voir le chapitre 3. En pratique, ceci permet de calculer des probabilités telles que $\mathbb{P}_0[T_a\leq T_{-b}]$, où a et b sont deux entiers positifs. Notons $F(x)=\mathbb{P}_x[T_a\leq T_{-b}]$; on a clairement $F(a)=1$ et $F(b)=0$. La fonction $F(x)$ est harmonique sur l'intervalle $[-b,a]$, c'est-à-dire que

$$F(x)=\frac{F(x+1)+F(x-1)}{2}$$

si $x\in(-b,a)$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[T_a\leq T_{-b}] &= \mathbb{P}_x[T_a\leq T_{-b}|X_1=x+1]\,\mathbb{P}[X_1=x+1]\\ &\quad+\mathbb{P}_x[T_a\leq T_{-b}|X_1=x-1]\,\mathbb{P}[X_1=x-1]\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_{x+1}[T_a\leq T_{-b}]+\mathbb{P}_{x-1}[T_a\leq T_{-b}]\right).\end{aligned}$$

Or, les seules fonctions harmoniques sur $[-b,a]$ sont les fonctions affines, et comme F a des valeurs fixées aux extrémités de l'intervalle, on a nécessairement

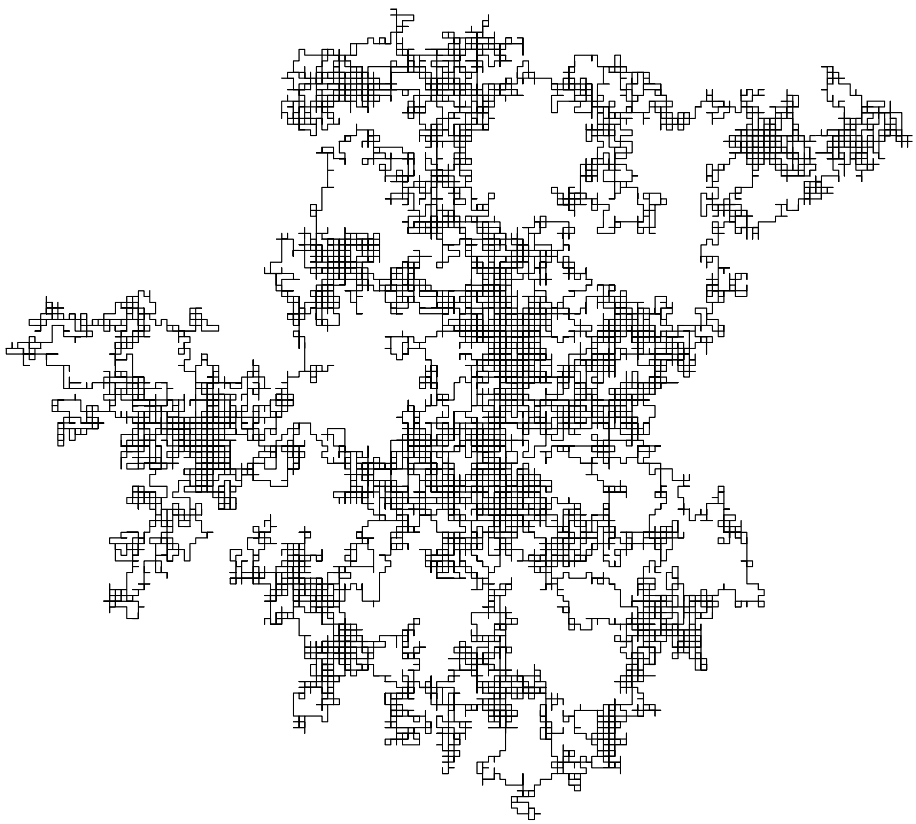
$$F(x)=\frac{x+b}{a+b}.$$

Par conséquent, $\mathbb{P}_0[T_a\leq T_{-b}]=\frac{b}{b+a}$.

4.5. Récurrence et transience en dimension supérieure. En dimension supérieure, le comportement des marches aléatoires est sensiblement différent. Ainsi, considérons la marche simple $(V_n = V_n^{(1)}, \dots, V_n^{(d)})$ sur $\mathbb{Z}^d$ de probabilités de transition

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } \pm(y-x) \text{ est un vecteur de la base canonique,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette marche aléatoire est clairement irréductible sur le réseau $\mathbb{Z}^d$; on a représenté ci-après les 25000 premiers pas de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$.



THÉORÈME 2.15. *La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente nulle si $d = 2$, et transitoire si $d \geq 3$.*

En effet, calculons la valeur de $P^n(0,0)$. On peut décomposer toute trajectoire $(0, V_1, \dots, V_n)$ comme suit : étant données d trajectoires unidimensionnelles

$$(0, X_1^{(1)}, \dots, X_{n_1}^{(1)}), \dots, (0, X_1^{(d)}, \dots, X_{n_d}^{(d)}),$$

avec $n_1 + \cdots + n_d = n$, choisissons une partition d'ensembles

$$[\![1, n]\!] = \{i_1^{(1)} < \cdots < i_{n_1}^{(1)}\} \sqcup \cdots \sqcup \{i_1^{(d)} < \cdots < i_{n_d}^{(d)}\},$$

et appliquons au temps $i = i_j^{(k)} - 1$ la transition $X_{j-1}^{(k)} \to X_j^{(k)}$ à la k-ième coordonnée de $V_{i_j^{(k)}-1}$, en laissant les autres coordonnées invariantes.

La donnée de la partition d'ensembles et des trajectoires unidimensionnelles permet de reconstruire de façon unique la trajectoire multidimensionnelle. Par exemple, la trajectoire

$$(0,0),(0,1),(-1,1),(-1,2),(0,2),(1,2)(1,3)$$

correspond à la partition d'ensembles $[\![1,6]\!] = \{2,4,5\} \sqcup \{1,3,6\}$ et aux trajectoires unidimensionnelles $(0,-1,0,1)$ et $(0,1,2,3)$. Dans cette décomposition, on part et arrive à l'origine si et seulement si les trajectoires unidimensionnelles ont la même propriété. Le nombre de chemins d-dimensionnels de taille $2n$ qui partent et arrivent en 0 est donc

$$\begin{aligned}(2d)^{2n}\, P^n(0,0) &= \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{2n}{2n_1,\ldots,2n_d}\binom{2n_1}{n_1}\cdots\binom{2n_d}{n_d}\\ &= \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{2n}{n_1,n_1,\ldots,n_d,n_d}.\end{aligned}$$

Chaque coefficient multinomial $\binom{n}{n_1,\ldots,n_d}$ est plus petit que $\frac{n!}{((n/d)!)^d} \leq \frac{C_d\, d^n}{n^{(d-1)/2}}$ pour une certaine constante C_d, donc

$$\begin{aligned}P^n(0,0) &= \frac{1}{(2d)^{2n}}\binom{2n}{n} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_d}^2\\ &\leq \frac{B}{\sqrt{n}\, d^{2n}}\, \frac{C_d\, d^n}{n^{(d-1)/2}} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_d} = \frac{BC_d}{n^{d/2}}.\end{aligned}$$

Comme cette série est sommable pour $d \geq 3$, on obtient bien la transience pour $d \geq 3$, car $K(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) < \infty$. D'autre part, pour $d = 2$, on a par l'identité de Vandermonde

$$P^n(0,0) = \frac{1}{16^n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{16^n}\binom{2n}{n}^2 \simeq \frac{C}{n},$$

qui n'est pas sommable ; donc $K(0,0) = +\infty$ et la marche aléatoire est récurrente nulle.

5. Files d'attente

Une autre catégorie de processus aléatoires que l'on peut étudier à l'aide de la théorie des chaînes de Markov est la classe des *files d'attente*. Ces processus ont pour espace d'états $\mathbb{N}$, et sont d'abord définis en temps continu. Soient A et B deux lois sur $\mathbb{R}_+$ d'espérance finie, et $c \geq 1$ un entier qui représentera le nombre de serveurs pour la file. Les arrivées dans la file d'attente sont régies par un processus de renouvellement dont la loi des sauts est donnée par A. Chaque client dans la file d'attente voit alors sa demande servie par l'un des serveurs $S_1, \ldots, S_c$ en un temps aléatoire de loi B et indépendant des arrivées, du serveur S_i et des autres services. Si tous les serveurs S_i sont occupés, le client patiente dans la file d'attente jusqu'à ce qu'un serveur soit libre. L'état du processus est le nombre N_t de clients dans la file à l'instant t : il augmente d'une unité à chaque arrivée dans la file, et diminue d'une unité à chaque fois qu'un client de la file voit sa demande servie.

5.1. Files d'attente M/M/c et chaîne de Markov associée. Un cas particulier de files d'attente est celui où les arrivées et les sorties sont régies par des *lois A et B exponentielles* de paramètres respectifs λ et μ. On notera M/M/c une telle file d'attente avec c serveurs, l'entier c pouvant être égal à $+\infty$. Dans ce cas, le processus $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *processus de Markov* d'espace d'états discret, les processus de Markov étant les généralisations en temps continu des chaînes de Markov détaillées dans ce chapitre. En pratique, ceci signifie que pour tout temps $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r = t$, on a une loi conditionnelle

$$\mathbb{P}[N_{t+dt} = y | N_{t_1} = x_1, \ldots, N_t = x] = \begin{cases} 1 + p(x,x)\,dt + o(dt) & \text{si } x = y, \\ p(x,y)\,dt + o(dt) & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

où p est une matrice indépendante de t et telle que $\sum_{y\in\mathfrak{X}} p(x,y) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. Pour la file d'attente M/M/c, c'est bien le cas avec $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ et

$$p(k,l) = \begin{cases} -\lambda - \min(c,l)\,\mu & \text{si } l = k, \\ \lambda & \text{si } l = k+1, \\ \min(c,l)\,\mu & \text{si } l = k-1, \end{cases}$$

et $p(k,l) = 0$ dans tous les autres cas. En effet, en utilisant la propriété d'absence de mémoire des lois exponentielles, et l'identité en loi $\min(\mathcal{E}(\mu_1), \ldots, \mathcal{E}(\mu_r)) = \mathcal{E}(\mu_1 + \cdots + \mu_r)$, on peut calculer les lois conditionnelles de N_{t+dt} sachant N_t, et dans l'asymptotique $dt = o(1)$, on obtient bien la matrice de transition p ci-dessus, car $\mathrm{e}^{-\nu dt} = 1 - \nu dt + o(dt)$. On représente le plus souvent cette dynamique par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "3\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & c \arrow[l, bend left, "c\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & c+1 \arrow[l, bend left, "c\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "c\mu"] \end{tikzcd}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs distinctes prises par la file d'attente M/M/c $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Cette suite est bien définie, et c'est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & & & & \\ & \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \frac{c\mu}{\lambda+c\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+c\mu} & & \\ & & & & \frac{c\mu}{\lambda+c\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+c\mu} & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Elle est clairement irréductible pour $\lambda, \mu > 0$. Lorsque $c = 1$, chaque transition prend un temps d'espérance $\lambda + \mu$, donc par la loi des grands nombres, le comportement asymptotique de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le même que celui de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $n \simeq \frac{t}{\lambda+\mu}$. On s'attend donc à ce que l'étude du processus $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ se ramène à celle de la chaîne de Markov associée (y compris pour des valeurs de c différentes de 1).

5.2. Étude de la file d'attente M/M/1. Dans ce qui suit, on supposera $c = 1$ et l'état initial $X_0 = 0$ presque sûrement. À chaque étape n, le nombre de clients X_n dans la file d'attente augmente d'une unité avec probabilité $p = \lambda/(\lambda+\mu)$, et diminue d'une unité avec probabilité $q = \mu/(\lambda+\mu)$, sauf si $X_n = 0$, auquel cas on a toujours $X_{n+1} = 1$. Cette singularité en l'état 0, qui mène dans le cas récurrent positif à des calculs légèrement plus compliqués que ceux qui suivent, est résolue en introduisant $Y_n = \max(X_n - 1, 0)$, qui représente le nombre de clients dans la file, moins l'éventuel client en train d'être servi. Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une nouvelle chaîne de Markov, irréductible et apériodique, de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} q & p & & & & & \\ q & 0 & p & & & & \\ & q & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Supposons pour commencer $p > q$. Une façon de représenter la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de tirer des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ avec $\mathbb{P}[\zeta_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[\zeta_i = -1] = p$, et d'écrire

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{X_{i-1}\neq 0}\,\zeta_i + 1_{X_{i-1}=0}.$$

Cette définition récursive montre que X_n est stochastiquement minorée par $\sum_{i=1}^n \zeta_i$: en effet, pour tout indice i, $1_{X_{i-1}\neq 0}\,\zeta_i + 1_{X_{i-1}=0} \geq \zeta_i$. Comme $p > q$, $\sum_{i=1}^n \zeta_i$ tend vers l'infini presque sûrement, donc $X_n \to +\infty$ p.s., et de même pour Y_n. Les chaînes de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc transitoires.

Si $p = q$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes probabilités de transition que $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Cette marche aléatoire réfléchie par l'axe $x = 0$ est récurrente nulle d'après la discussion du paragraphe précédent. Il en va de même pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le seul cas intéressant est donc celui où $p < q$ (c'est-à-dire que $\lambda < \mu$), ce que nous supposerons dans toute la suite. On a dans ce cas récurrence positive pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et par conséquent pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$), car la mesure

$$\mu(k) = \left(\frac{p}{q}\right)^k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \quad \text{pour } k \geq 1$$

est laissée invariante par Q et est de masse finie. L'invariance est une conséquence de la propriété suivante : pour tous x, y, on a $\mu(x)\,Q(x,y) = \mu(y)\,Q(y,x)$. On dit dans ce cas que la mesure est *réversible*, et ceci implique l'invariance par Q :

$$\mu Q(x) = \sum_y \mu(y)\,Q(y,x) = \sum_y \mu(x)\,Q(x,y) = \mu(x).$$

Soit $\pi_\infty(k) = (1-x)\,x^k$, avec $x = \frac{p}{q}$. Par le théorème ergodique, la loi π_n du nombre de clients Y_n dans la file d'attente après n transitions tend vers π_∞, qui est une loi géométrique. En particulier, le nombre moyen de clients non servis dans la file d'attente en régime stationnaire $\pi_0 = \pi_\infty$ est donné par

$$\mathbb{E}_{\pi_\infty}[X_0] = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{1-x} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Sous ce même régime, on peut étudier le temps moyen de séjour d'un client dans la file. Supposons que le client arrive dans une file avec k clients. Pour que sa demande soit traitée, il faut attendre $k+1$ variables exponentielles de paramètre μ, donc la loi du temps de séjour sachant que le client arrive dans une file avec k clients est la convolée de $k+1$ variables exponentielles de paramètre μ, c'est-à-dire la loi $\Gamma(k+1,\mu)$ de densité

$$1_{t\geq 0}\,\frac{\mu^{k+1}t^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,dt.$$

La loi du temps de séjour est par conséquent donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T\geq t] &= \sum_{k=0}^{\infty}\pi_\infty(k)\,\left(\int_t^\infty \frac{\mu^{k+1}\,s^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu s}\,ds\right)\\ &= (\mu-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_t^\infty \frac{(\lambda s)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu s}\,ds\right) = \int_t^\infty (\mu-\lambda)\,\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)s}\,ds,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que c'est une loi exponentielle de paramètre $\mu-\lambda$. En particulier, le temps moyen de séjour est $\frac{1}{\mu-\lambda}$.

5.3. Étude des files d'attente M/M/c et M/M/∞. Lorsque la file d'attente est servie par $c>1$ serveurs (avec pour l'instant c fini), on s'attend à ce que pendant un intervalle de temps de taille t, il y ait en moyenne $\lambda\,t$ arrivées dans la file et jusqu'à $c\,\mu\,t$ sorties, le taux de sortie pouvant être inférieur à $c\,\mu\,t$ s'il y a moins de c personnes dans la file. D'après la discussion précédente, on s'attend donc à la transience du système si $\lambda > c\mu$; à la récurrence nulle si $\lambda = c\mu$; et à la récurrence positive si $\lambda < c\mu$. Supposons dans un premier temps $\lambda > c\mu$. Comme dans le cas $c=1$, on peut construire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante. Fixons c suites de variables de Bernoulli indépendantes $(\zeta_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}},\ldots,(\zeta_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}}$, avec

$$\mathbb{P}[\zeta_i^{(k)}=1] = 1-\mathbb{P}[\zeta_i^{(k)}=-1] = \lambda/(\lambda+k\mu),$$

et pour tout $j<k$ et tout n, $\zeta_n^{(j)} \geq \zeta_n^{(k)}$ presque sûrement (un tel couplage est toujours possible). On peut alors définir récursivement X_n par

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{X_{i-1}=0} + 1_{X_{i-1}=1}\,\zeta_i^{(1)} + \cdots + 1_{X_{i-1}=c-1}\,\zeta_i^{(c-1)} + 1_{X_{i-1}\geq c}\,\zeta_i^{(c)}.$$

Alors, X_n est minorée stochastiquement par $\sum_{i=1}^n \zeta_i^{(c)}$, qui tend vers l'infini presque sûrement par la loi forte des grands nombres ; donc la file d'attente M/M/c est transitoire si $\lambda > c\mu$. Si $\lambda = c\mu$, alors pour montrer la récurrence nulle, on peut construire la file d'attente comme suit. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et d'autre part, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur $[\![0,c]\!]$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & & \\ & \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{(c-1)\mu}{\lambda+(c-1)\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+(c-1)\mu} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $Z_n = c + |Y_n|$; c'est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $[\![c+\infty]\!]$, irréductible et récurrente nulle ; tandis que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur $[\![0,c]\!]$, irréductible et récurrente positive. La file d'attente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut maintenant être construite par réunion de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $R_c^{W,1},\ldots,R_c^{W,k},\ldots$ les moments où la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (issue de 0) passe par c ; et $R_c^{Z,1},\ldots,R_c^{Z,k},\ldots$ les moments où la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe par c. On tire également une suite de variables aléatoires $(\zeta_k)_{k\geq 0}$ indépendante et de loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}[\zeta_k = W] = \frac{c\mu}{\lambda+c\mu}$ et $\mathbb{P}[\zeta_k = Z] = \frac{\lambda}{\lambda+c\mu}$. On pose alors :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (W_0, W_1, \ldots, W_{R_c^{W,1}}, (\zeta_1)_{R_c^{\zeta_1,1}+1}, \ldots, (\zeta_1)_{R_c^{\zeta_1,2}}, (\zeta_2)_{R_c^{\zeta_2,2}+1}, \ldots, (\zeta_2)_{R_c^{\zeta_2,3}}, \ldots).$$

Autrement dit, on entrelace aléatoirement des excursions de W et de Z à partir de c. On peut vérifier que cette construction donne bien une chaîne de Markov avec les transitions de M/M/c. Comme les excursions de W et de Z sont toutes p.s. finies, on revient en c une infinité de fois, et on a bien montré la récurrence de la chaîne de Markov. De plus, l'espérance du temps de retour en c est

$$\mathbb{E}_c[R_c^{X,1}] = \frac{c\mu}{\lambda+c\mu}\,\mathbb{E}_c[R_c^{W,1}] + \frac{\lambda}{\lambda+c\mu}\,\mathbb{E}_c[R_c^{Z,1}] = \frac{c\mu}{\lambda+c\mu}\,\mathbb{E}_c[R_c^{W,1}] + \infty = \infty,$$

donc la chaîne est récurrente nulle.

Supposons finalement $\lambda < c\mu$, et posons $x = \frac{\lambda}{c\mu}$. On peut construire une mesure réversible donc invariante sur $\mathbb{N}$ pour la matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui sera de masse finie, car pour $k \geq c$, l'équation de réversibilité s'écrit $\mu(k+1) = x\,\mu(k)$, avec $x < 1$. Donc, la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive. La formule pour la mesure de probabilité invariante dépend de selon $k \geq c$ ou $k < c$.

Le cas où $c = +\infty$ est de façon surprenante beaucoup plus simple à résoudre. D'après la discussion précédente, on s'attend à ce que la chaîne de Markov M/M/∞ soit toujours récurrente positive, et en effet, on voit sans mal que la loi de Poisson de paramètre $p = \frac{\lambda}{\mu}$ est une mesure invariante pour la chaîne de Markov $Y_n = \max(X_n - 1, 0)$. Ceci prouve immédiatement la récurrence positive, avec pour loi stationnaire $\pi_\infty = \mathcal{P}(p)$. Le nombre moyen de clients dans la file d'attente en régime stationnaire est donc égal à p, et d'autre part, la loi du temps de séjour dans la file est la loi exponentielle de paramètre μ (chaque client est servi immédiatement).

Références. Pour la théorie générale des chaînes de Markov, on renvoie à

(1) R. Durrett, *Probability : Theory and Examples*, 4th edition, Cambridge University Press, 2010 ; §6.

(2) G. Grimmett and D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3rd edition, Oxford University Press, 2001 ; §6.

Le chapitre §11 du second ouvrage propose également l'étude de nombreux modèles de files d'attente. Pour les chaînes de Markov finies et l'étude plus détaillée de la convergence vers la mesure stationnaire, on conseille

(3) L. Saloff-Coste, Lectures on finite Markov chains, in *Lectures on probability theory and statistics : École d'été de Probabilités de Saint-Flour XXVI*, LNM 1665, Springer-Verlag, 1997 ; pages 301-413.

Finalement, concernant les marches aléatoires, un traitement élémentaire et complet est proposé dans

(4) W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1, 3rd edition, Wiley, 1968 ; §III, XIV (voir aussi les chapitres XV et XVI).