Corrigé

1. La permutation identité $x \mapsto x$ n'échange les ordres d'aucune paire, donc $I(\mathrm{id}_{[1,N]}) = 0$. à l'inverse, la permutation $\omega_N = x \mapsto N+1-x$ échange les ordres de toutes les paires $1 \leq j < k \leq N$, donc $I(\omega_N) = \binom{N}{2}$. L'inégalité (1) est donc optimale. À l'aide du Théorème 1, on voit en fait que le support de la loi I_N est l'intervalle d'entiers $[\![0, \binom{N}{2}]\!]$ (toutes les valeurs intermédiaires sont possibles).

2. En termes de mots, les inversions d'une permutation σ' sont les paires d'indices $(i < j)$ telles que la lettre $\sigma'(i)$ soit strictement supérieure à la lettre $\sigma'(j)$. Donc, si l'on applique aux lettres d'un mot une bijection croissante τ, ceci ne modifie pas les inversions, car $\sigma'(i) > \sigma'(j)$ si et seulement si $\tau(\sigma'(i)) > \tau(\sigma'(j))$. Appliquons cette remarque au cas où $\sigma' \in \mathfrak{S}(N-1)$ et où τ est la bijection croissante
$$\tau : a \mapsto \begin{cases} a & \text{si } a < k; \\ a+1 & \text{si } a \geq k \end{cases}.$$
On voit alors que les inversions du préfixe $\sigma(1)\cdots\sigma(N-1)$ sont les mêmes que les inversions de $\sigma' = \sigma(1)\cdots\sigma(N-1)$. Il reste à compter les inversions (i, N) de σ, et ce sont exactement celles avec i tel que $\sigma'(i) \geq k$.

3. D'après le Théorème 1, si σ_N est de loi uniforme sur $\mathfrak{S}(N)$ et k_{N+1} est de loi uniforme sur $[\![1, N+1]\!]$, alors $\Psi(\sigma_N, k_{N+1})$ suit une loi uniforme sur $\mathfrak{S}(N+1)$, et de plus, $I(\sigma_{N+1}) = I(\sigma_N) + N + 1 - k_{N+1}$. La chaîne de Markov sera donc définie par la relation
$$(\sigma_{N+1}, i_{N+1}) = (\Psi(\sigma_N, k_{N+1}), i_N + N + 1 - k_{N+1}),$$
En posant $k_N = \lceil N X_N \rceil$ avec des variables i.i.d. $(X_N)_{N\geq 1}$ uniformes sur $[0,1]$, on obtient ainsi une relation du type
$$(\sigma_{N+1}, i_{N+1}) = f((\sigma_N, i_N), X_{N+1})$$
avec une suite d'i.i.d. $(X_N)_{N\geq 1}$, ce qui prouve qu'on a une chaîne de Markov sur $\bigsqcup_{n\geq 0}(\mathfrak{S}(n) \times \mathbb{N})$. Par construction, si $\sigma_0 = \mathrm{id}_\emptyset$ et $i_0 = 0$, alors $i_N = I(\sigma_N)$ pour tout $N \geq 1$. Voici le programme en Python :

```python
from random import randint

def Psi(sigma, k):
    return [x + (k <= x) for x in sigma] + [k]

def next_markov_permutation(sigma, t):
    N = len(sigma)
    k = randint(1, N+1)
    SIGMA = Psi(sigma, k)
    return (SIGMA, t+N+1-k)

def markov_permutation(N):
    L,t = [1],0
    res = [(L,t)]
    for i in range(N-1):
        L,t = next_markov_permutation(L,t)
        res.append((L,t))
    return res
```

On a représenté une permutation σ de taille N par la liste $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)]$. Par exemple, la commande markov_permutation(5) peut renvoyer :

```
[([1], 0),
 ([2, 1], 1),
 ([3, 1, 2], 2),
 ([4, 2, 3, 1], 5),
 ([5, 3, 4, 1, 2], 8)]

```

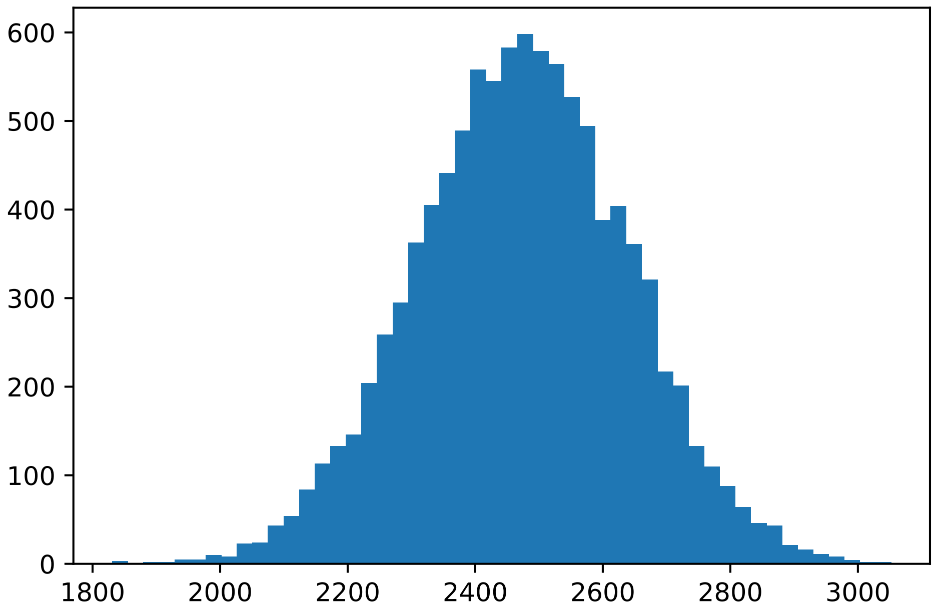
4. Le programme suivant dresse un histogramme sur n essais de la variable aléatoire I_N (on aurait aussi pu dessiner la fonction de répartition empirique) :

```
from numpy import array
import matplotlib.pyplot as plt

def Inversions(N):
    return sum([randint(0,k) for k in range(N)])

def H(N,n):
    plt.hist(array([Inversions(N) for i in range(n)]),bins=50)
    plt.show()
```

Voici le résultat avec $N = 100$ et $n = 10000$:



On voit clairement apparaître une courbe en cloche (limite gaussienne), centrée environ autour de $\frac{N^2}{4} = 2500$. La variance asymptotique est équivalente à $\frac{N^3}{36}$, donc l'écart-type est équivalent à $\frac{N^{3/2}}{6} = \frac{1000}{6} \simeq 166.666 = \sigma$. On observe effectivement une largeur de pic à mi-hauteur environ de taille $400 = O(\sigma)$. Ainsi, le théorème central limite vérifié par I_N est confirmé par l'histogramme ci-dessus.

5. On a l'identité en loi $I_N = \sum_{n=1}^{N} U_n$ avec des variables U_n indépendantes. Comme $\mathbb{E}[z^{U_n}] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}}{n}$, on obtient

$$\mathbb{E}[z^{I_N}] = \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}[z^{U_n}] = \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}}{n}\right).$$

6. Dans ce qui, ξ est fixé et les $O(\cdot)$ peuvent en dépendre. On regarde d'abord chaque terme du produit :

$$\frac{\sin\left(\frac{n\xi}{2N^{3/2}}\right)}{n\sin(\frac{\xi}{2N^{3/2}})} = \frac{\frac{n\xi}{2N^{3/2}} - \frac{n^3\xi^3}{48\,N^{9/2}} + O\left(\frac{n^5}{N^{15/2}}\right)}{\frac{n\xi}{2N^{3/2}} - \frac{n\xi^3}{48\,N^{9/2}} + O\left(\frac{n}{N^{15/2}}\right)} = \frac{1 - \frac{n^2\xi^2}{24\,N^3} + O\left(\frac{n^4}{N^6}\right)}{1 - \frac{\xi^2}{24\,N^3} + O(\frac{1}{N^6})} = 1 - \frac{(n^2-1)\xi^2}{24\,N^3} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

en utilisant le fait que $\frac{n^4}{N^6} = O(\frac{1}{N^2})$. Ceci s'écrit aussi

$$\exp\left(-\frac{(n^2-1)\xi^2}{24\,N^3} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right).$$

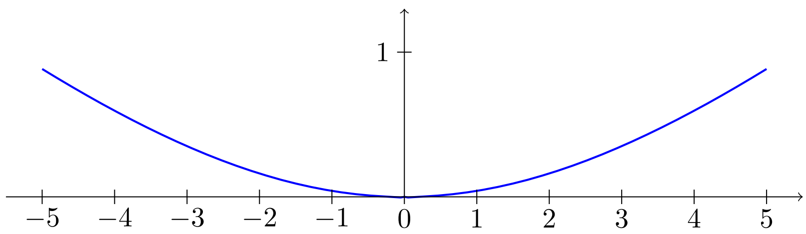
En faisant le produit de ces termes, on obtient :

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi A_N}] = \exp\left(-\frac{\xi^2}{24\,N^3}\sum_{n=1}^{N}(n^2-1) + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Or, la somme des termes n^2-1 vaut $\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - N = \frac{N^3}{3} + O(N^2)$, donc on obtient bien $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi A_N}] = \exp(-\frac{\xi^2}{72} + O(N^{-1}))$. Le théorème de Lévy assure que A_N tend en loi vers une variable A si et seulement si, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi A_N}] \to \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi A}]$. On peut bien sûr se contenter de traiter le cas $\xi \neq 0$, les transformées de Fourier valant 1 en $\xi = 0$. La convergence en loi $A_N \rightharpoonup \mathcal{N}(0, \frac{1}{36})$ découle donc de la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi - \frac{x^2}{2(\frac{1}{36})}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi\frac{1}{36}}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u(\sqrt{\frac{1}{36}}\xi) - \frac{u^2}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{36}\frac{\xi^2}{2}}.$$

7. Voici le graphe de la fonction ψ :



La fonction $\frac{\sinh t}{t}$ est clairement paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Au voisinage de $t = 0$, on peut écrire :

$$\frac{\sinh t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

La série entière est convergente sur tout $\mathbb{R}$, donc la fonction prolongée par la valeur 1 en 0 est donc même analytique sur $\mathbb{R}$. Comme elle reste toujours plus grande que 1, par composition avec $t \mapsto \frac{t}{2}$ et avec $t \mapsto \log t$, $\psi(t)$ est paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculons ses dérivées première et seconde sur $\mathbb{R}_+$:

$$\psi'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t};$$

$$\psi''(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4(\sinh\frac{t}{2})^2}.$$

Comme $\sinh\frac{t}{2} > \frac{t}{2}$ pour $t > 0$, $\psi''(t) > 0$ pour tout $t > 0$, ce qui implique la convexité de ψ. Comme $\psi'(0) = 0$, $\psi'(t) > 0$ pour $t > 0$, et ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Finalement, on a bien $\lim_{t\to\infty}\psi'(t) = \frac{1}{2}$.

8. Les théorèmes classiques de dérivation ou de passage à la limite sous le signe intégral montrent que la fonction $\Lambda(t)$ est lisse et vérifie :

$$\Lambda'(t) = \int_{x=0}^{1} x\,\psi'(tx)\,dx;$$

$$\Lambda''(t) = \int_{x=0}^{1} x^2\,\psi''(tx)\,dx.$$

Comme $\psi'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Lambda'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui implique la stricte convexité de Λ'' sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\Lambda'(0) = 0$, ceci implique comme précédemment la stricte croissance de Λ sur $\mathbb{R}_+$. Enfin,

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda''(t) = \int_{x=0}^{1} x^2 \left(\lim_{u\to\infty} \psi''(u)\right) dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

L'aspect de la fonction Λ est semblable à celui de Ψ, avec une pente limite égale à $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

9. Fixons $u > 0$. On a :

$$\mathbb{P}[I_N \geq (1+\varepsilon)\mathbb{E}[I_N]] = \mathbb{P}\left[u\,\frac{I_N - \mathbb{E}[I_N]}{N} \geq u\varepsilon\,\frac{\mathbb{E}[I_N]}{N}\right] \leq \mathbb{E}[\mathrm{e}^{u\,\frac{I_N-\mathbb{E}[I_N]}{N}}]\,\mathrm{e}^{-u\varepsilon\frac{N-1}{4}}$$

puisque $\mathbb{E}[I_N] = \frac{N(N-1)}{4}$. Par la Proposition 4, le logarithme du premier terme vaut

$$N\Lambda(u) + \frac{\psi(u)}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

donc pour tout $u > 0$ et pour N assez grand.

$$\log \mathbb{P}[I_N \geq (1+\varepsilon)\mathbb{E}[I_N]] \leq N\left(\Lambda(u) - \frac{u\varepsilon}{4}\right) + \frac{\psi(u)}{2} + \frac{u\varepsilon}{4} + O\left(\frac{1}{N}\right) \leq N\left(\Lambda(u) - \frac{u\varepsilon}{4}\right) + \frac{\phi(u)}{2}$$

On peut alors chercher à minimiser la quantité $\Lambda(u) - \frac{u\varepsilon}{4}$ en fonction de u. La dérivée de cette quantité est $\Lambda'(u) - \frac{\varepsilon}{4}$, donc pour $\varepsilon \in (0,1)$, la fonction est strictement décroissante jusqu'à une certaine valeur h donnée par l'équation $\Lambda'(h) = \frac{\varepsilon}{4}$, puis strictement croissante. Le paramètre h minimise donc le terme en $O(N)$ dans l'inégalité sur $\log \mathbb{P}[I_N \geq (1+\varepsilon)\mathbb{E}[I_N]]$.

10. Si $P(t) = 4\,\Lambda'(t)$, alors la question 8. montre que P est une bijection strictement croissante de $(0,+\infty)$ vers $(0,1)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\Lambda^*(\varepsilon) &= \frac{h\varepsilon}{4} - \Lambda(h) = \frac{P^{-1}(\varepsilon)\,\varepsilon}{4} - \Lambda(P^{-1}(\varepsilon));\\ (\Lambda^*)'(\varepsilon) &= \frac{(P^{-1})'(\varepsilon)\,\varepsilon}{4} + \frac{P^{-1}(\varepsilon)}{4} - (P^{-1})'(\varepsilon)\,\Lambda'(P^{-1}(\varepsilon)) = \frac{P^{-1}(\varepsilon)}{4} = \frac{1}{4}\,(\Lambda')^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que Λ^* est une bijection croissante convexe de $(0,1)$ vers $(0,+\infty)$. Il n'est pas facile de mettre en évidence l'estimée de grandes déviations de $\mathbb{P}[I_N \geq (1+\varepsilon)\mathbb{E}[I_N]]$: en effet, cette quantité a une probabilité exponentiellement petite en N, donc pour N assez grand, il faudrait un nombre énorme de simulations pour avoir une probabilité d'ordre 1 d'observer ne serait-ce qu'une valeur de I_N plus grande que $(1+\varepsilon)\mathbb{E}[I_N]$.