1 Le corps des rationnels

Théorème admis A partir de $\mathbb{Z}$ on construit un corps commutatif noté $(\mathbb{Q}, +, \times)$ appelé *corps des rationnels*. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont notés sous forme des fractions $\dfrac{a}{b}$ où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et ils vérifient la propriété suivante : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$

Les opérations d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Q}$ prolongent celles de $\mathbb{Z}$ et sont définies par :

$$\forall((a,b)(a',b')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 \qquad \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \ \text{ et } \ \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Remarques :

1. Il faut vérifier que les définitions de l'addition et de la multiplication ne dépendent pas des fractions choisies pour représenter les rationnels.
2. On identifie la fraction $\dfrac{a}{1}$ et l'entier a ce qui permet de considérer $\mathbb{Z}$ comme un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
3. Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une fraction dite irréductible $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant $PGCD(a, b) = 1$.

Théorème admis Pour toutes fractions irréductibles $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ on pose $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad \leqslant bc$.
On définit ainsi une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$ qui prolonge celle de $\mathbb{Z}$. Cette relation vérifie :

$$\forall(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \qquad \begin{array}{rcl} x \leqslant y & \Longrightarrow & x + z \leqslant y + z \\ \begin{cases} x \leqslant y \\ z \geqslant 0 \end{cases} & \Longrightarrow & x \times z \leqslant y \times z \end{array}$$

Donc $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

2 Le corps des réels

2.1 Structure de corps ordonné

Théorème admis A partir de $\mathbb{Q}$, on construit un autre corps commutatif noté $(\mathbb{R}, +, \times)$ et appelé *corps des nombres réels*. Les lois $+$ et $\times$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$.

Remarque : $\mathbb{Q}$ est donc un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Théorème admis $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre qui prolonge celle de $\mathbb{Q}$ et qui lui confère une structure de corps totalement ordonné.

2.2 Valeur absolue

Définition Soit $x \in \mathbb{R}$; on appelle *valeur absolue* de x le réel noté $|x|$ défini par

- $|x| = x$ si $x \geqslant 0$
- $|x| = -x$ sinon.

Remarque : $|x| = \max(x, -x)$

Résultat Soit x et y deux réels, soit a un réel strictement positif. Alors
- $|x| \geqslant 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
- $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$ et $|x| < a \iff -a < x < a$
- $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a$ ou $a \leqslant x$
- $|xy| = |x| \times |y|$ et si $y \neq 0$ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$ et $|x|^2 = x^2$
- Inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

Remarques :
- $|x + y| = |x| + |y| \iff xy \geqslant 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_i)_{1\leqslant 1\leqslant n} \in \mathbb{R}^n \quad \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$

3 Propriété de la borne supérieure

3.1 Vocabulaire

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition $k \in \mathbb{R}$ est un *majorant* (resp. *minorant*) de X quand
$$\forall x \in X \qquad x \leqslant k \qquad\qquad (\text{resp.} \quad k \leqslant x)$$
On dit alors que X est *majorée* (resp. *minorée*).

Définition on dit que X est *bornée* quand elle est à la fois majorée et minorée.

Résultat X est une partie bornée de $\mathbb{R} \iff \exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad |x| \leqslant k$

Rappels : a est le plus grand élément *(resp.* plus petit élément*) de X quand $a \in X$ et $\forall x \in X \quad x \leqslant a$ (resp. $\forall x \in X \quad x \geqslant a$)*

Remarque : une partie a au plus un plus grand élément. Le plus grand élément s'il existe est un majorant appartenant à l'ensemble.

Définition On suppose X majorée. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de X. Si $\mathcal{M}$ a un plus petit élément celui-ci s'appelle la *borne supérieure* de X, et on le note $\sup X$.

Mnémotechniquement : la borne supérieure de X si elle existe est le plus petit des majorants de X, et elle est unique.

Définition On suppose X minorée. Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des minorants de X. Si $\mathcal{M}'$ a un plus grand élément celui-ci s'appelle la *borne inférieure* de X et on le note $\inf X$.

Mnémotechniquement : la borne inférieure de X si elle existe est le plus grand des minorants de X, et elle est unique.

Remarque : si X admet un plus grand élément (resp. plus petit) alors cet élément est la borne supérieure de X (resp. inférieure).

3.2 Axiome de la borne supérieure

Axiome : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Théorème Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : les bornes quand elles existent n'appartiennent pas toujours à l'ensemble. $M = \sup X \in X \iff M$ est le plus grand élément de X.

Théorème Caractérisation de la borne supérieure Soit X une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure et une borne inférieure.

$$M = \sup X \iff \begin{cases} \forall x \in X \quad x \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad M - \varepsilon < x \leqslant M \end{cases}$$

$$m = \inf X \iff \begin{cases} \forall x \in X \quad x \geqslant M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad m \leqslant x < m + \varepsilon \end{cases}$$

4 Intervalles

Définition Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On appelle *segment* a, b noté $[a, b]$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x \leqslant b\}$.

Définition Une partie I de $\mathbb{R}$ s'appelle un *intervalle* quand :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow [\alpha, \beta] \subset I$$

(les intervalles sont les parties *convexes* de $\mathbb{R}$).

Théorème Liste exhaustive des intervalles Tout intervalle est de la forme suivante :

- $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$
- pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant a\}$ (demi-droite fermée à droite de a)
  - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ (demi-droite ouverte à droite de a)
  - $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant a\}$ (demi-droite fermée à gauche de a)
  - $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant a\}$ (demi-droite ouverte à gauche de a)
- pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$:
  - $[a, b]$ (segment)
  - $]a, b[$ (intervalle ouvert d'extrémités a et b)
  - $[a, b[$ et $]a, b]$ (intervalles semi-ouverts d'extrémités a et b)

Droite achevée

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux symboles $+\infty$ et $-\infty$ avec les conventions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\infty < x + \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad x \times (+\infty) = +\infty$
- etc.

Alors $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ est appelée *droite réelle achevée* et noté $\bar{\mathbb{R}}$

$+\infty + (-\infty)$ n'est pas défini, pas plus que $0 \times (+\infty)$!

5 Miscellaneous

5.1 Partie entière

Théorème et définition Soit x un réel. Alors il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n s'appelle la *partie entière* de x et se note $E(x)$.

On a donc les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} E(x) & \leqslant & x & < & E(x)+1 \\ x-1 & < & E(x) & \leqslant & x \end{array} \right.$$

En particulier $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Remarque : la démonstration donne en prime les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} & E(x+n) = E(x)+n \\ & E(n) = n \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} & E(-x) = -E(x)-1 \end{array}$$

Théorème Tout intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel et un irrationnel.

5.2 Valeurs approchées

Définition Soit x, x_0 deux réels, et e un réel positif.

On dit que x_0 est une *valeur approchée de x à e près* quand $|x - x_0| < e$

c'est-à-dire $x \in]x_0 - e, x_0 + e[$.

On dit que x_0 est une *valeur approchée de x à e près par excès* quand $0 \leqslant x_0 - x < e$

c'est-à-dire $x \in]x_0 - e, x_0]$.

On dit que x_0 est une *valeur approchée de x à e près par défaut* quand $0 \leqslant x - x_0 < e$ c'est-à-dire $x \in [x_0, x_0 + e[$.

Théorème et définition Soit x un réel et n un entier naturel. Posons $x_n = 10^{-n}E(10^n x)$ et $y_n = 10^{-n}E(10^n x) + 10^{-n}$. Alors x_n (resp. y_n) est la *valeur décimale approchée de x* par défaut (resp. par excès) à 10^{-n} près.