

Semaine du 15 décembre

Algèbre linéaire

- Définition d'un espace vectoriel et règles de calcul ; espace vectoriel produit (démonstration). Exemples fondamentaux (\mathbb{K}^n , $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).
- Définition et caractérisation d'un sous-espace vectoriel (démonstration). Définition d'une combinaison linéaire ; sous-espace vectoriel engendré par une partie (théorème et définition, avec démonstration). Définition d'une partie génératrice. Définition et caractérisation de la somme de deux sous-espaces vectoriels (avec démonstration). Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Applications linéaires : définition, $\text{Im } f, \text{Ker } f$; « f et Vect commutent » (avec démonstration) ; résolution de l'équation $f(x) = b$. Vocabulaire (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire). Algèbre $\mathcal{L}(E)$ (non commutative et non intègre en général). $GL(E)$ est un groupe ; sous-groupe des homothéties de rapport non nul.
- Projection p associée à deux sous-espaces supplémentaires ; caractérisation de $\text{Im } p, \text{Ker } p$ et $\text{Ker}(p - \text{Id}_E)$. Définition d'un projecteur (comme coïncidant avec une projection) et caractérisation par $p^2 = p$.
- Symétrie (comme projecteurs).
- Définition de familles libres, familles liées, bases. Surfamille, sous-famille. $p + 1$ vecteurs combinaisons linéaires de p mêmes vecteurs forment une famille liée. Existence et unicité des coordonnées dans une base (avec démonstration).

Suites réelles

- Définition de la convergence ; suites extraites.
- Toute suite convergente est bornée (avec démonstration). Si $(u_n)_n$ a une limite strictement positive, alors elle est strictement positive à partir d'un certain rang. Opération sur les limites, limites et relation d'ordre (tous les résultats classiques, démontrés). Résultat admis : si f est continue en a et si $u_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ alors $f(u_n) \rightarrow f(a)$. Définition d'une limite infinie.
- Suites monotones : toute suite croissante et majorée converge (démontré). Suites adjacentes (définition et théorème, idem). Exemple : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ converge et sa limite est irrationnelle. Théorème des segments emboîtés.
- Suites particulières : tout réel est limite d'une suite de rationnels (démontré), suites et séries géométriques, récurrence affine d'ordre 1.
- Relations de comparaison : o, O, \sim définis par le quotient, et compatibilité avec la somme et le produit. Exemple : la factorielle l'emporte sur l'exponentielle qui l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Joyeux Noël!