PCSI 2 **Géométrie affine** **2008/09**

On travaille avec un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1 Sous-espaces affines

Définition Soit $a \in E$. On appelle *translation de vecteur* a l'application $t_a : E \to E$ définie par $x \mapsto x + a$.

Théorème L'ensemble des translations de E muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(E, +)$.

Démonstration. $\square$

Définition Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors l'image de F par la translation de vecteur a est $t_a(F)$ notée

$$\boxed{a + F = \big\{b \in E; \quad \exists x \in F \quad b = a + x\big\}}$$

L'ensemble $a + F$ s'appelle le *sous-espace affine de* E *de direction* F *et passant par* a.

Théorème Soient $(a, b) \in E^2$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$a + F = b + G \Longleftrightarrow F = G \quad \text{et} \quad b - a \in F$$

D'où la définition suivante :

Définition On dira que le sous-espace affine $a + F$ a pour *dimension* la dimension de F.

Démonstration. $\square$

Remarques

1. Tout sous-espace vectoriel de E est donc en particulier un sous-espace affine de E.
2. Soit W un sous-espace affine de E et F sa direction. Alors pour tout vecteur $a \in W$ on a $W = a + F$.
3. Soit W et W' sont deux sous-epaces affines de E de directions respectives F et F'. On suppose $W \subset W'$; alors $F \subset F'$. Si en outre W et W' ont même dimension alors ils sont égaux.

Lien avec la géométrie usuelle. Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des points du plan (resp. $\mathcal{E}_3$ l'ensemble des points de l'espace) et soit O une origine dans $\mathcal{E}_2$. L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ M & \mapsto & \overrightarrow{OM} \end{array}$ est une bijection. Pour tout point M du plan on écrit alors $M = O + \overrightarrow{OM}$ et $\mathcal{E}_2$ est l'espace affine de direction $\mathbb{R}^2$. Grâce à la bijection précédente, il est possible d'identifier points et vecteurs.

Exemples de sous-espaces affines :

1. Dans E tout point est un sous-espace affine de direction $\{0_E\}$.
2. Les solutions d'un système linéaire ou d'une équation différentielle linéaire forment des sous-espaces affines.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 2x - y + z = 3\}$.

2 Parallélisme, intersection

Définition Soient $W = a + F$ et $W' = a' + F'$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et F'. On dit que W *est parallèle à* W' si $F \subset F'$, ce qu'on note $W // W'$.

La relation //

Théorème Soient W et W' deux sous-espaces affines de E. Alors

$$\boxed{W // W' \Longrightarrow W \cap W' = \emptyset \quad \text{ou} \quad W \subset W'.}$$

DÉMONSTRATION. Soit F et F' les directions respectives de W et W'.

On suppose $W \cap W' \neq \emptyset$. Alors

- $W \cap W' \neq \emptyset$ donc $\exists a \in W \cap W'$.
- $W//W'$ donc $F \subset F'$.

D'où $W = a + F$ et $W' = a + F'$, donc $W \subset W'$. $\square$

Théorème Soient W et W' deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et F'.

Alors $\boxed{W \cap W' = \emptyset \text{ ou } W \cap W' \text{ est un sous-espace affine de } E \text{ de direction } F \cap F'.}$

DÉMONSTRATION. On suppose $W \cap W' \neq \emptyset$. Donc $\exists a \in W \cap W$.

Alors $\left\{ \begin{array}{lcl} W & = & a + F \\ W' & = & a + F' \end{array} \right.$.

$$\begin{aligned} b \in W \cap W' &\iff b \in W \quad \text{et} \quad b \in W' \\ &\iff b - a \in F \quad \text{et} \quad b - a \in F' \\ &\iff b - a \in (F \cap F') \\ &\iff b \in (a + (F \cap F')) \end{aligned}$$

Donc $W \cap W' = a + (F \cap F')$. $\square$

Théorème Soient W et W' deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et F'. $\boxed{\text{Si } F \oplus F' = E \text{ alors } W \cap W' \text{ est un singleton.}}$

DÉMONSTRATION. Soient $a \in W$ et $b \in W'$. Alors $\left\{ \begin{array}{lcl} W & = & a + F \\ W' & = & b + F' \end{array} \right.$.

$$\begin{array}{lll} b - a \in E = F \oplus F' & \text{donc} & \exists (x, y) \in F \times F' \quad b - a = x + y \\ & \text{càd} & \exists (x, y) \in F \times F' \quad a + x = b - y. \end{array}$$

Donc

- $a \in W$ et $x \in F$ donc $a + x \in W$
- $b \in W'$ et $-y \in F'$ donc $b + (-y) \in W'$ càd $a + x \in W'$

Donc $W \cap W' \neq \emptyset$. On conclut par le résultat précédent. $\square$

Remarque Si l'intersection de deux sous-espaces affines est réduite à un point, on dit que les deux sous-espaces sont *sécants*.

Des définitions et théorèmes précédents, on déduit les différentes configurations possibles dans le plan et l'espace usuels.

Transformations du plan et de l'espace

3 Préliminaires : géométrie affine

Ici $\mathcal{E}$ désigne le plan ou l'espace euclidien orienté muni de sa structure affine canonique.

3.1 Applications affines : généralités

Définition une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une *application affine* quand il existe une application linéaire $f_1 \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\boxed{\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2 \quad f_1(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}}$$

ie $\forall M \in \mathcal{E} \quad \forall x \in E \quad f(M + x) = f(M) + f_1(x)$

On appelle f_1 la *partie linéaire* de f ou l'*application linéaire associée à* f.

DÉMONSTRATION. $\square$

$\boxed{\text{Une application affine est donc uniquement déterminée par la donnée de l'image d'un point et de sa partie linéaire.}}$

Exemples :

- Soit $A \in \mathcal{E}$ et $f : M \mapsto A$.
- Soit $f : M \mapsto M$.
- Soit $\vec{u} \in E$ et $f : M \mapsto M + \vec{u} = t_{\vec{u}}(M)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{E}$, enfin $h : M \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AM}$.

Résultat La composée de deux applications affines est une application affine de partie linéaire la composée des parties linéaires.

DÉMONSTRATION. □

Corollaire Soit f une application affine de partie linéaire f_1. On suppose que f_1 est un automorphisme de E, alors f est bijective.

DÉMONSTRATION. □

Résultat L'image du sous-espace affine $A+F$ où F est un sous-espace vectoriel de E est $f(A)+f_1(F)$, donc un sous-espace affine.

DÉMONSTRATION. $\boxed{\text{EXO}}$ □

Corollaire Une application affine conserve le parallélisme et l'alignement.

Résultat Applications affines et barycentres « Une application affine conserve la barycentration ».

3.2 Isométries

Définition Une *isométrie* de $\mathcal{E}$ est une application f affine de $\mathcal{E}$ qui conserve les distances, c'est-à-dire : $\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2 \quad AB = f(A)f(B)$

Résultat

- f est une isométrie de $\mathcal{E} \Longleftrightarrow f_1 \in O(E)$.
- les isométries sont bijectives de bijections réciproques des isométries.

DÉMONSTRATION. □

Définition on appelle *déplacement* ou *isométrie positive* de $\mathcal{E}$ une isométrie telle que $f_1 \in SO(E)$. Les autres isométries s'appellent des *antidéplacements* ou *isométries négatives*.

Groupe des isométries noté $\mathcal{I}so(\mathcal{E})$, sous-groupe des déplacements $\mathcal{I}so_+(\mathcal{E})$.

Remarque : l'ensemble des antidéplacements n'est pas un groupe...

4 Isométries du plan

4.1 Exemples

- les *translations* (de partie linéaire l'identité) sont des déplacements ;
- les *réflexions affines* (de partie linéaire une réflexion) sont des antidéplacements ;
- les *symétries centrales* (de centre A : $M \mapsto A - \overrightarrow{AM}$) sont des déplacements ;
- la *rotation affine* de centre Ω et d'angle θ définie par $r(M) = \Omega + R_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$ est un déplacement.

Résultat Les déplacements préservent les angles orientés, les antidéplacements les opposent.

Résultat Etant donnés deux points A et B il existe une et une seule réflexion affine échangeant A et B.

DÉMONSTRATION. $\boxed{\text{EXO}}$ de la feuille □

4.2 Déplacements

Théorème Tout déplacement du plan est soit une translation soit une rotation.

DÉMONSTRATION. **Lemme** Un déplacement du plan admet au plus un point invariant. □

4.3 Composition d'isométries

Résultat

- la composée de deux translations est une translation.
- la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 0[2\pi]$ est une rotation d'angle θ ;
- la composée de deux rotations d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0[2\pi]$, une translation sinon ;
- la composée de deux réflexions est une translation quand les deux axes sont parallèles, une rotation sinon.

Corollaire Tout déplacement du plan s'exprime comme une composée de réflexions.

4.4 Antidéplacements

Définition On appelle *symétrie glissée* la composée d'une réflexion affine d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul parallèle à $\mathcal{D}$.

Résultat Une symétrie glissée est un antidéplacement sans point fixe. De plus il y a unicité de la droite par rapport à laquelle se fait la symétrie et du vecteur de translation ; enfin la réflexion et la translation commutent.

Résultat Tout antidéplacement du plan est soit une réflexion affine soit une symétrie glissée.

Corollaire Tout déplacement du plan s'exprime comme une composée de réflexions.

5 Isométries de l'espace

Exemples :

- translations
- réflexions
- symétries centrales
- *rotations* d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ : une telle application associe à un point M le point $r(M) = M' + R_\theta(\overrightarrow{M'M})$ où M' est le projeté orthogonal de M sur D et R_θ la rotation vectorielle d'axe $\operatorname{Vect} D$ et d'angle θ
- *vissages* (composés d'une rotation et d'une translation de vecteur colinéaire à l'axe) – la composition est commutative et il y a unicité de la rotation et du vecteur de translation.
- *symétrie glissée* (composée d'une réflexion et d'une rotation d'axe inclus dans la direction du plan de réflexion)

Théorème tout déplacement de l'espace est un vissage, une rotation, ou une translation.

Démonstration. **Lemme** un déplacement de l'espace distinct de l'identité qui admet un point fixe est une rotation. □

Résultat tout déplacement de l'espace se décompose en produit de réflexions.

Similitudes directes du plan

On travaille dans le plan affine euclidien.

6 Définition géométriques

Définition Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une $k-$*similitude* est une application affine s du plan vérifiant

$$\forall (M,N) \quad s(M)s(N) = kMN$$

Le réel k est alors appelé le *rapport de la similitude.*

Exemples :

- Toute isométrie est une similitude de rapport 1.
- Une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est une similitude de rapport λ.

Théorème Soit f une similitude de rapport k. Alors il existe une homothétie h de rapport k et une isométrie g telles que : $f = h \circ g$.

Théorème

- Une similitude de rapport k est une application affine d'application linéaire associée kf_1 où f_1 est une isométrie vectorielle.
- La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.
- Une similitude de rapport k est bijective et sa réciproque est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.

Remarque

- Une similitude peut aussi être définie comme une bijection affine (une bijection affine s'appelle aussi une transformation) qui conserve les rapports des distances.
- L'ensemble des similitudes est un sous-groupe de l'ensemble des bijections de E muni de la loi o.

Théorème L'image d'une conique à foyer par une similitude est une conique de même nature.

Remarque

- L'image d'un cercle de rayon r par une similitude de rapport k est un cercle de rayon kr.
- Une similitude de rapport k multiplie les aires par k^2.

Définition soit f une similitude de rapport k ; alors il existe une homothétie h et une isométrie g tels que $f = g \circ h$. Si g est un déplacement, on dit que f est une *similitude directe* ; sinon on dit que f est une *similitude indirecte* (ou rétrograde).

7 Ecriture complexe

On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal direct.

Résultat soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle vérifiant $\theta \neq 0[2\pi]$ et f une application affine de E. Alors f est une rotation d'angle de mesure θ si et seulement si il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall M(z) \in E \quad M'(z') = f(M) \Longleftrightarrow z' = e^{i\theta} z + b$$

Théorème soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et f une application affine de E. Alors f est une similitude directe de rapport k si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$|a| = k \quad \text{et} \quad \forall M(z) \in E \quad M'(z') = f(M) \Longleftrightarrow z' = az + b$$

Remarques

- cas particulier des homothéties, des translations et des rotations.
- groupe des similitudes.

Théorème soit f une similitude de rapport $k > 0$. Alors

- soit f est une translation
- soit il existe un unique point Ω et un unique réel $\theta[2\pi]$ tels que $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport k et centre Ω, et r la rotation d'angle θ centre Ω.

Remarque une similitude directe conserve les angles orientés.

Théorème soient deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de longueurs non nulles. Alors il existe une unique similitude qui transforme A en A' et B en B'.