

1 Logarithme

1.1 Logarithme népérien

Définition On appelle fonction *logarithme népérien* la primitive sur \mathbb{R}_+^* notée \ln

de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \int_x^x \frac{dt}{t}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln 1 = 0$$

Propriétés algébriques.

i.	$\ln 1 = 0$
ii.	$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$
iii.	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$
iv.	$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
v.	$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x^n) = n \ln x$

Propriétés analytiques :

i.	\ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln' x = \frac{1}{x}$.
ii.	\ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , comme sa fonction dérivée.
iii.	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln' x > 0$ donc \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
iv.	$\forall x \in]0, 1[\quad \ln x < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[\quad \ln x > 0$ Donc $\ln x$ est du signe de $x - 1$ sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque : généralisation par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \ln \prod_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

Limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (admis) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations & Graphe.

Théorème $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (admis) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Théorème La fonction \ln est une application continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* ; elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel noté e tel que $\ln e = 1$ ($e \approx 2,718281828$).

Inégalité utile : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$

1.2 Autres logarithmes

Définition Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle fonction logarithme de base a et l'on

note \log_a l'application : $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Comme $\ln(1) = 0$ et que \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , si $a < 1$, alors $\ln(a) < 0$ et si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$. Donc les propriétés de \log_a se déduisent de celles de \ln et l'on a les courbes représentatives suivantes :

Remarques

1. La fonction \ln est le logarithme de base e .
2. On note habituellement \log la fonction \log_{10} (logarithme décimal).
3. Pour tout réel strictement positif a différent de 1 on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log_a a^n = n$
4. Formule de changement de base :

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\})^3 \quad \log_a b \times \log_b c = \log_a c$$

1.3 Dérivée logarithmique

Résultat La fonction $f : x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

Théorème Soit I un intervalle réel et u une application définie et dérivable sur I , à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur I . Alors l'application $g = \ln|u|$ est dérivable sur I et $g' = \frac{u'}{u}$.

Définition On appelle $\frac{u'}{u}$ la dérivée logarithmique de u .

Résultat Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} , ne s'annulant pas sur I .

La dérivée logarithmique de $f \times g$ est $\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$.

La dérivée logarithmique de $\frac{f}{g}$ est $\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$.

La dérivée logarithmique de $|f^r|$ où $r \in \mathbb{Q}$ est $r \frac{f'}{f}$

2 Exponentielle

2.1 Exponentielle de base e

Définition la fonction \ln est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. On appelle fonction exponentielle sa fonction réciproque notée \exp .

La fonction \exp est une application continue et strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* .

$$\boxed{y = \ln x \text{ et } x \in \mathbb{R}_+^*} \iff \boxed{x = \exp y}$$

Valeurs remarquables : $\exp 0 = 1$ et $\exp 1 = e$

Théorème $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x + y) = \exp x \times \exp y$

Théorème la fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} et $\exp' = \exp$

Limites : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0^+}$

Tableau de variations & Courbe représentative

Théorème $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty}$

Inégalités utiles :
$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geq 1 + x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(x) > \exp 0 = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \exp(x) < \exp 0 = 1 \end{array}$$

Changement de notation. On *montre* successivement les propriétés suivantes : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp n = e^n$ et $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp n = e^n$,

puis $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exp \frac{1}{n} = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$ enfin $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp r = e^r$

Par convention on note $\exp x$ sous la forme e^x pour tout réel x .

Théorème $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad e^{x+y} = e^x e^y$

$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

2.2 Exponentielle de base a

Définition Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction \log_a est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Sa réciproque est appelée fonction exponentielle de base a et est notée \exp_a . On a, pour tout réel x :

$$y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y) \text{ et } y > 0$$

Comme ci-dessus, on est amené à poser pour tout réel x :

$$\exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

Propriétés	1. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$a^x > 0$
	$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\ln a^x = x \ln a$
	$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$a^x = e^{x \ln a}$

Les règles de calcul usuelles sur les puissances s'appliquent :

2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$	$\forall (x, y) \in (\mathbb{R})^2$	$a^{x+y} = a^x a^y$
$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$	$\forall (x, y) \in (\mathbb{R})^2$	$a^{xy} = (a^x)^y$
$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$(ab)^x = a^x b^x$

Limites :

Si $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = 0$

Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = 0$

Remarques :

- Comme \exp est dérivable sur \mathbb{R} , il en est de même de \exp_a et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\exp_a)'(x) = \ln(a) \times \exp(x \ln(a)) = \ln(a) a^x$$
- Avec cette convention, on a, pour tout réel x et pour tout réel $a > 0$:

$$\ln(a^x) = x \ln(a)$$

Courbes représentatives :

3 Fonction puissance

3.1 Définition

Définition pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a posé $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Résultat Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On note f_α la fonction définie par $f_\alpha : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{matrix}$.

La fonction f_α est continue et strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* .

Si $\alpha > 0$ alors f_α est une fonction croissante.

Si $\alpha < 0$ alors f_α est une fonction décroissante.

Enfin f_α est dérivable en tout point et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Résultat Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$	$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$	$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
-----------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------------

Notation : x^{α^β} signifie $x^{(\alpha^\beta)}$

Etude des fonctions f_α au voisinage de 0.

Si $\alpha > 0$, on peut prolonger f_α par continuité en 0, en posant : $f_\alpha(0) = 0$.

- Si $a = 1$, la courbe est connue.
- Si $a > 1$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0$ et le prolongement de f_α admet une demi-tangente "horizontale" à droite en 0.
- Si $a < 1$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = +\infty$ et le prolongement de f_α admet une demi-tangente "verticale" à droite en 0.

Tableaux de variations & Courbes représentatives.

3.2 Croissance comparée

Dans tout ce paragraphe on fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Résultat $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Résumé : l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Résultat $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$

Résultat $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^\beta |e^{\alpha x}| = 0$

3.3 Fonction de la forme u^v

Définition Soit u une fonction strictement positive sur un intervalle I . Soit v une fonction définie sur I . On pose $u^v = e^{v \ln u}$.

Résultat On suppose en outre u et v dérivables sur I . Alors u^v est dérivable sur I et $(u^v)' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$

En pratique : toujours remettre sous la forme exponentielle pour dériver !

Définition Soit φ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs complexes. On peut donc écrire $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ où φ_1, φ_2 sont deux fonctions à valeurs réelles. Si ces deux fonctions sont dérivables sur I on dit que φ est dérivable sur I et on appelle dérivée de φ la fonction $\varphi' = \varphi_1' + i\varphi_2'$.

Résultat Les formules de dérivation d'une somme et d'un produit restent valables pour des fonctions à valeurs complexes. De plus si φ est une fonction complexe dérivable alors e^φ aussi et $(e^\varphi)' = \varphi' e^\varphi$

3.4 Quelques formes indéterminées

Résultat : $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$

Résultat : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

Résultat : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$