

1 Etude de \mathbb{R}^2

1.1 Norme

Théorème et définition Soit $x \in \mathbb{R}^2$; on note $x = (x_1, x_2)$. On lui associe les deux nombres $\|x\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$ et $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On appelle *norme infinie* ou *norme sup* l'application $x \mapsto \|x\|_\infty$ et *norme euclidienne* l'application $x \mapsto \|x\|_2$.

Ces deux normes vérifient les relations suivantes pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ et tout réel λ :

$$\|x\| = 0 \implies x = 0 \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

DÉMONSTRATION. \square

Remarque $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty$: ces deux normes sont dites *équivalentes*.

DÉMONSTRATION. \square

Théorème et définition on appelle *distance* associée à la norme $\|\cdot\|$ l'application

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

Alors pour tous points (x, y, z) de \mathbb{R}^2 on a

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \qquad d(x, y) = d(y, x) \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

DÉMONSTRATION. \square

1.2 Partie bornée de \mathbb{R}^2

Définition soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R}^2 . On dit que \mathcal{D} est *bornée* quand

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2 \quad d(x, y) \leq k$$

Notion intuitive : celle de diamètre.

Définition soit a un point de \mathbb{R}^2 et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* la partie de \mathbb{R}^2 définie par

$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, a) < r\}$$

On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* la partie de \mathbb{R}^2 définie par

$$\mathcal{B}'(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, a) \leq r\}$$

Dessins :

Résultat Une partie $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement si

$$\exists x_0 \in \mathcal{D} \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{B}(x_0, r)$$

DÉMONSTRATION. \square

1.3 Ouverts

Définition soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On dit que \mathcal{D} est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 quand :

$$\forall a \in \mathcal{D} \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{D}$$

Exemples :

- une boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$
- un pavé $[a, b] \times [c, d]$

2 Fonctions numériques de deux variables

2.1 Algèbre des fonctions de deux variables

Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R}^2 .

En pratique : \mathcal{D} est soit \mathbb{R}^2 , soit un ouvert de \mathbb{R}^2 , soit un fermé borné pavé $[a, b] \times [c, d]$.

Rappel. On munit $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ des trois opérations suivantes : à deux fonctions f et g et un réel λ on associe

$$f + g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad \lambda f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array} \quad fg : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

Résultat $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ muni de ces trois opérations est

Définition soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. On associe à f les deux applications suivantes :

$$f(\cdot, a_2) : x_1 \mapsto f(x_1, a_2) \quad \text{et} \quad f(a_1, \cdot) : x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$$

appelées *applications partielles* de f au point a .

Dessins.

Exemples 1 et 2.

2.2 Etude locale d'une fonction

2.2.1 Limite en un point

Définition soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point adhérent à \mathcal{D} . On dit que la fonction f a pour limite ℓ en a quand :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad d(x, a) \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$ ou « $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$ ».

Résultat Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})^2$. Si f et g admettent toutes deux une limite finie en a alors il en va de même pour $f + g$, fg , λf , $|f|$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ quand c'est possible.

2.2.2 Continuité

Définition soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est *continue en a* quand $\lim_a f = f(a)$.

Remarque f continue en $a \implies$ continuité des applications partielles en a .

Résultat Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- f est continue en a ;
- pour toute suite $(u_n)_n$ de points de \mathcal{D} convergeant vers a la suite $(f(u_n))_n$ tend vers $f(a)$.

Exemple fondamental 3.

Résultat soit $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathcal{D}$. On suppose f et g continues en a . Alors $f + g$, λf , fg , $|f|$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a .

2.3 Algèbre des fonctions continues

Définition une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue* (sur \mathcal{D}) quand elle est continue en tout point de \mathcal{D} .

Résultat L'ensemble des fonctions continues sur \mathcal{D} noté $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ est une algèbre.

2.4 Fonctions vectorielles de deux variables

Le passage de fonctions numériques de deux variables à fonctions vectorielles de deux variables se fait facilement. Schématiquement, f a les mêmes propriétés que ses coordonnées.

Définition Soit $f = (f_1, f_2) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est *continue en a* quand

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad \|x - a\| \leq \alpha \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Résultat f continue en $a \iff f_1$ et f_2 sont continues en a .

Théorème La composée de deux applications continues est continue.

DÉMONSTRATION. \square

3 Dérivées partielles d'ordre 1

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 . La notion de dérivée définie par le taux d'accroissement n'existe pas pour des fonctions de deux variables, mais il y a des notions qui remplacent : dérivée partielle, dérivée selon un vecteur, différentielle etc. On se ramène aux fonctions d'une variable.

3.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

3.1.1 Dérivée selon un vecteur

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$. Alors $\exists r > 0 \quad \mathcal{B}(a, r) \subset U$. Soit enfin $v = (v_1, v_2)$ un vecteur non nul, et $\mathcal{D} = a + \text{Vect } v$.

Dessin.

Soit $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$: cette fonction est donc définie au voisinage de 0.

Définition si la fonction φ_v est dérivable en 0, on dit que la fonction f admet une dérivée en a selon le vecteur v notée $D_v f(a)$ définie par $D_v f(a) = \varphi'_v(0)$.

Exemple 4

3.1.2 Dérivée partielle

Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Définition Si f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur e_i , on l'appelle dérivée partielle de f en a selon la i -ème variable et on la note $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Donc $D_1 f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$ et $D_2 f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}$.

Exemple 4.

Interprétation. $D_1 f(a)$ est la dérivée de $\varphi_{e_1} : t \mapsto f(a + te_1)$ en 0, donc la dérivée de $t \mapsto f(a_1 + t, a_2)$ en 0 d'où enfin la dérivée de $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ en a_1 .

Résultat La dérivée partielle de f en a par rapport à la première variable est la dérivée de la première application partielle $f(\cdot, a_2)$ en a_1 .

Exemple 4.

Règle générale : pour déterminer la dérivée partielle d'une fonction f en $x = (x_1, x_2)$ par rapport à la première variable, on fixe x_2 et on utilise les formules habituelles de dérivation par rapport à x_1 .

3.2 Opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1

3.2.1 Définition

Définition Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U quand f admet des dérivées partielles $D_1 f$ et $D_2 f$ en tout point de U et que les applications $x \mapsto D_{e_1} f(x)$ et $x \mapsto D_{e_2} f(x)$ sont continues.
(« Existence et continuité des dérivées partielles »)

Exemple 4.

3.2.2 Le « théorème fondamental » (admis)

Théorème Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors

- f admet un dl_1 en tout point a de U qui s'écrit $f(a + h) = f(a) + h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a) + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$
- f admet en tout point a de U une dérivée selon tout vecteur h qui s'écrit $D_h f(a) = h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a)$

Remarque : une fonction de classe \mathcal{C}^1 est donc

3.3 Calcul des dérivées partielles

3.3.1 Opérations algébriques

Résultat Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f, f + g, fg$ sont également de classe \mathcal{C}^1 sur U .

DÉMONSTRATION. \square

Corollaire L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U est

3.3.2 Composition

Résultat Fonction vectorielle d'une variable réelle Soit I un intervalle réel.

Soit $\begin{cases} f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ vérifiant } \varphi(I) \subset U. \end{cases}$

Alors $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t_0 \in I \quad (f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'_1(t_0) D_1 f(\varphi(t_0)) + \varphi'_2(t_0) D_2 f(\varphi(t_0))$$

DÉMONSTRATION. \square

Exemple 5.

Résultat Composition de fonction vectorielles Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 .

Soit $\begin{cases} f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } V \text{ vérifiant } \varphi(V) \subset U. \end{cases}$

Alors $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V et en tout point a de V

$$\begin{aligned}
D_1(f \circ \varphi)(a) &= D_1f(\varphi(a))D_1\varphi_1(a) + D_2f(\varphi(a))D_1\varphi_2f(a) \\
D_2(f \circ \varphi)(a) &= D_1f(\varphi(a))D_2\varphi_1(a) + D_2f(\varphi(a))D_2\varphi_2f(a) \\
\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v_1}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(a))\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(a))\frac{\partial \varphi_2}{\partial v_1}(a) \\
\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v_2}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(a))\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(a))\frac{\partial \varphi_2}{\partial v_2}(a)
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. \square

Exemple 6 : passage en coordonnées polaires.

3.4 Extremum

Définition Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet en a un maximum local quand f est majorée par $f(a)$ sur un petit voisinage de a .

(on définit de même minimum local, maximum global, maximum local, extremum local, extremum global).

Exemples 7.

Résultat Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum en a alors ses dérivées partielles sont nulles en a .

DÉMONSTRATION. \square

Remarque : c'est une CN et non une CS!

Exemple 8.

4 Dérivées d'ordre supérieur

4.1 Définition

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U . Alors $D_1f : \cdot \rightarrow \cdot$ et D_2f sont des fonctions continues sur U .

Définition si D_1f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en un point a on la note $D_{11}f(a)$: c'est la *dérivée seconde d'ordre 11 au point a de f*. On définit de même $D_{12}f(a)$, $D_{21}f(a)$, $D_{22}f(a)$.

Notations : $D_{11}f(a)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, etc.

Définition On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur U quand f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 sur U : existence et continuité de D_1f et D_2f , $D_{11}f$, $D_{22}f$, $D_{12}f$ et $D_{21}f$.

Remarque dans ce cas, les dérivées partielles premières sont alors de classe \mathcal{C}^1 sur U , et c'est en fait une équivalence : f est de classe \mathcal{C}^2 sur U si et seulement si f admet des dérivées partielles de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Exemple 9.

Résultat l'ensembles des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur U noté $\mathcal{C}^2(U)$ est une algèbre.

4.2 Théorème de Schwarz (admis)

Théorème Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur U alors $D_{12}^2f = D_{21}^2f$.

Exemple 10.

4.3 Extensions à des fonctions de trois variables

Ici U désigne un ouvert de \mathbb{R}^3 .

Théorème soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U . Alors f admet un dl_1 en tout point de U de partie régulière $h_1Df(a) + \dots$

Théorème dérivée d'une composée $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Théorème Théorème de Schwarz $D_{12}^2 = D_{21}^2$ etc.

5 Notion de différentielle

5.1 Définition

Théorème (rappel) soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U . Alors f admet un dl_1 en tout point a de U ainsi qu'une dérivée selon tout vecteur h , ce qui s'écrit :

- $D_hf(a) = h_1D_1f(a) + h_2D_2f(a)$
- $f(a+h) = f(a) + h_1D_1f(a) + h_2D_2f(a) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U , et $a \in U$.

Alors f admet une dérivée selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ qui vaut

$$D_v f(a) = v_1 D_1 f(a) + v_2 D_2 f(a)$$

L'application $v \mapsto D_v f(a)$ est

Notation différentielle $df : df_a(h) = h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2$

Notation du cours de physique : $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$

Interprétation graphique :

- soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; alors la tangente à \mathcal{C}_f en a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ càd $y = f(a) + f'(a)h$ où h représente l'accroissement de la variable
- considérons la surface d'équation $z = f(x, y)$; alors $z = f(a) + h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a)$ est l'équation du plan tangent à la surface en $(a, f(a))$.

Exemple 11.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U . Alors

$$d(f + g) = df + dg \quad d(fg) = dfg + f dg \quad d(\lambda f) = \lambda df \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g} df - \frac{f}{g^2} dg$$

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Alors $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et en $a \in U$ on a

$$d(g \circ f)_a = g'(f(a)) df_a$$

Application :

- pour une fonction d'une variable : $df_a = f'(a) dx$.
 Changement de variables $\mathcal{C}^1 : x = \varphi(t)$.
 Alors $g(t) = f(\varphi(t)) = f(x)$
 En dérivant $df = f'(x) dx = f'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = g'(t) dt = dg$: pour calculer la différentielle d'une fonction on peut utiliser n'importe quelle variable.
 Exemple : en géométrie différentielle $R = \frac{ds}{d\alpha}$ (rayon de courbure = abs curviligne sur angle polaire de la tangente). Si la variable est vraiment α ie $s = s(\alpha)$ alors $R = s'(\alpha)$. Si s et α dépendent du temps alors $R = \frac{s'(t)}{\alpha'(t)}$.
- Cas de deux variables : f et φ un changement de variables dans le plan, $g = f \circ \varphi$. Alors $df = dg$ (faire le calcul).
 Exemple : $x = 2u - v$ et $y = 3u + 2v$. $f(x, y) = g(u, v)$. On calcule : $df = dg$ dans la base du, dv donne $D_1 g(u, v) = 2D_1 f + 3D_2 f$ et $D_2 g = -D_1 f + 2D_2 f$.
 Exemple : calcul du Laplacien en coordonnées polaires.

5.2 Gradient

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U et $a \in U$. Alors $df_a : v \mapsto D_v f(a)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 donc coïncide avec un produit scalaire :

Définition on appelle *vecteur gradient de f en a* le vecteur noté $\text{grad } f(a)$ défini par $\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad D_v f(a) = \langle \text{grad } f(a) | v \rangle$.

On lit : $\text{grad } f(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a))$.

Interprétation géométrique : ligne de plus grande pente.

Exemple 11.

5.3 Champ scalaire

Définition On appelle *champ scalaire* toute application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose que F est un champ scalaire dont le gradient ne s'annule pas. On appelle *ligne de niveau* ou *équipotentielle* de F toute courbe Γ_λ définie par l'équation implicite $F(x, y) = \lambda$.

On appelle *ligne de champ* toute courbe tangente en tout point au gradient.

Tangente à une ligne de niveau Γ en un point $A(a, b)$:

$$(x - a) D_1 f((a, b)) + (y - b) D_2 f((a, b)) = 0$$

On remarque que $\text{grad } f(a)$ est normal à Γ en A . Le gradient est dirigé vers les potentiels croissants. En un point passent une ligne de champ et une ligne de niveau, et elles sont orthogonales.