PCSI 2 Interrogation du jeudi 23 octobre 2008/09

Exercice 1 Raisonnement.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

I. f est impaire ;

II. il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xg(x)$

Pour une fonction f impaire quelconque, combien y-a-t-il de fonction g convenant ?

Pour $f = \text{sh}$, combien y-a-t-il de fonctions g qui soient en outre continues ? et pour Argsh ?

Exercice 2 Equations différentielles

(a) Résoudre $y' + y \tan x = \sin 2x \quad (E_1)$

(b) Résoudre en faisant le changement de fonction inconnue $z = \sqrt{y}$

$$y'\sqrt{x} - y + \sqrt{y}(x - 2\sqrt{x}) = 0 \quad (E_2)$$

(on cherchera une solution évidente de l'équation différentielle en z obtenue).

(c) Résoudre

$$y'' + 4y = x\mathrm{e}^{2ix} \quad (E_3)$$

En déduire les solutions de

$$y'' + 4y = 8x(2\cos 2x - \sin 2x) \quad (E_4)$$

Exercice 3 Complexes.

Résoudre $(z+1)^5 = (z-1)^5$.

PCSI 2 Interrogation du jeudi 23 octobre 2008/09

Exercice 1 Raisonnement.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

I. f est impaire ;

II. il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xg(x)$

Pour une fonction f impaire quelconque, combien y-a-t-il de fonction g convenant ?

Pour $f = \text{sh}$, combien y-a-t-il de fonctions g qui soient en outre continues ? et pour Argsh ?

Exercice 2 Equations différentielles

(a) Résoudre $y' + y \tan x = \sin 2x \quad (E_1)$

(b) Résoudre en faisant le changement de fonction inconnue $z = \sqrt{y}$

$$y'\sqrt{x} - y + \sqrt{y}(x - 2\sqrt{x}) = 0 \quad (E_2)$$

(on cherchera une solution évidente de l'équation différentielle en z obtenue).

(c) Résoudre

$$y'' + 4y = x\mathrm{e}^{2ix} \quad (E_3)$$

En déduire les solutions de

$$y'' + 4y = 8x(2\cos 2x - \sin 2x) \quad (E_4)$$

Exercice 3 Complexes.

Résoudre $(z+1)^5 = (z-1)^5$.