

Calcul matriciel

Exercice 1 Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Calculer les produits matriciels suivants (les résultats devraient être simples).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -35 & 42 & 13 \\ 44 & -52 & -16 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 Déterminer les puissances n -ièmes des matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Exercice 4 Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}$. Calculer M^2 en fonction de M

et de I , puis trouver l'inverse éventuel de M , en discutant selon a et b .

Exercice 5 Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$. Montrer que tAA et $A{}^tA$ sont des matrices carrées symétriques. On suppose de plus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $X \in M_{p1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tX{}^tAAX$ est un réel positif.

Exercice 6 On appelle trace l'application notée tr , définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} qui à une matrice $A = [a_{ij}]$ associe $\sum_{k=1}^n a_{kk}$.

- Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que pour toutes matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A^2 - (\text{Tr } A)A + \det(A)I_2 = 0$.
- Résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$.

Exercice 7 Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer la puissance n -ième de la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ii} = a$, $a_{i(i+1)} = b$, et $a_{ij} = 0$ dans les autres cas.

Exercice 8 Soit

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 M = \begin{pmatrix} -(a+b) & b & a \\ a & -(a+b) & b \\ b & a & -(a+b) \end{pmatrix} \right\}$$

- Montrer que E est un espace vectoriel réel. En donner une base.
- Montrer que E est stable pour la multiplication des matrices.
- Existe-t-il dans E des matrices dont l'inverse est dans E ?

Matrices d'applications linéaires

Exercice 9 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Montrer que f est une symétrie que l'on précisera. Déterminer une base \mathcal{B}

de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et donner la matrice

de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à \mathcal{B} .

Exercice 10 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Montrer que f est une projection que l'on précisera. Déterminer une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et donner la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à \mathcal{B} .

Exercice 11 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Quelle est la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) définie par $e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 + e_2 + 4e_3$, $e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$?

Exercice 12 Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie s de \mathbb{R}^3 par rapport au plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 2z = 0\}$ parallèlement à la droite $\text{Vect}((1, 0, 1))$.

Exercice 13 Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 + 1)P' - 4XP \end{array}$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$
2. Donner la matrice de φ relative à la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$.
3. Soit $P_0 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. Déterminer $Q = \varphi(P_0)$. Résoudre l'équation $\varphi(P) = Q$ dans $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer $\varphi^{-1}(\{Q\})$.

Exercice 14 Soit A la matrice de terme général $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ défini par :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i > j$$

$$a_{ij} = (-1)^{i-1} \binom{j-1}{i-1} \quad \text{si } i \leq j$$

Calculer A^2 en interprétant A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ relativement à la base canonique.

Exercice 15 Soit s l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

dans la base canonique \mathcal{B} .

- a) Montrer que s est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, -2)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice S' de s dans la base \mathcal{B}' . Déterminer S'^n puis une méthode pour le calcul de S^n où n est un entier naturel non nul.
- c) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Montrer que S^2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de S et I_3 . En déduire que pour tout entier naturel n il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tels que $S^n = a_n I_3 + b_n S$. Donner les valeurs de (a_0, a_1, b_1, b_1) puis exprimer pour tout entier n a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . Calculer $a_n + b_n$ et $b_n + 1$, en déduire a_n et b_n .
- d) Soit $B = S - 2I_3$. Calculer B^n pour tout entier naturel n . En déduire S^n en fonction de I_3 et B . Comparer avec le résultat précédent. L'expression obtenue pour S^n est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 16 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère l'endomorphisme φ de E défini par $\varphi(e_1) = -e_1 - e_2 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = -e_1$ et $\varphi(e_3) = -e_1 + e_3$. Soit enfin M la matrice de φ dans \mathcal{B} .

- a) Déterminer M et calculer M^2 .
- b) Montrer que $M^3 = -I_3$. En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.
- c) Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$ et $e'_3 = e_1 - 2e_3$. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E et déterminer la matrice M' de φ dans \mathcal{B}' .
- d) Montrer que I_3, M et M^2 sont linéairement indépendants.
- e) Soit F l'ensemble des matrices du type $aI_3 + bM + cM^2$ où a, b, c sont trois réels. Montrer que F est un espace vectoriel réel de dimension 3. Montrer que F est un anneau; est-ce une algèbre sur \mathbb{R} ? Montrer enfin qu'une matrice $A = aI_3 + bM + cM^2$ de F est inversible si et seulement $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc \neq 0$. Montrer qu'alors l'inverse est dans F .

Rang

Exercice 17 Déterminer le rang des familles \mathcal{F} de vecteurs suivantes, et donner une base du sous-espace vectoriel qu'elles engendrent (discuter selon les valeurs de a et b)

- a) Dans \mathbb{R}^4 , $\mathcal{F} = ((1, 2, -3, 4), (2, 4, -5, 1), (-2, -1, 2, 0), (3, 0, -1, -4))$;
 b) Dans \mathbb{R}^4 , $\mathcal{F} = ((1, 1, a, 0), (1, a, 1, 0), (a, 1, 1, 0))$;
 c) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{F} = (X^3 + aX^2 - 3X + 2, aX^3 + 2X^2 - X + 3, bX^2 + 2X)$;
 d) Dans \mathbb{R}^p , $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ avec $v_i = (i, i + 1, \dots, i + p - 1)$;
 e) Dans $M_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$.

Exercice 18 Déterminer le rang des matrices suivantes (discuter selon les valeurs de a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a-2 & 2 & 2a \\ 2 & a & 2(a+1) \\ -1 & 2 & a+1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

Changements de base et inversion de matrices

Exercice 19 Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille

$B = (1, X + 1, (X + 1)^2, \dots, (X + 1)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ vers B .

Exercice 20 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses quand elles le sont.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & -1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

En vrac !

Exercice 21 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto f \circ g$. Déterminer le rang de φ en fonction du rang de f .

Exercice 22 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Chercher tous les endomorphismes de E vérifiant que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$

b) Quel est le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E . Identifier f .

Exercice 23 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); MA = 0\}$. Quelle est la structure de E , sa dimension ?

Exercice 24 Centre de $GL_n(\mathbb{K})$

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible.

2) En déduire que $\text{Vect } GL_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 25 On note $G = \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\}$.

- 1) Montrer que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.
- 2) Déterminer le centre de G , et montrer que c'est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{K}, +)$.

Exercice 26 Soit A une matrice réelle de taille 3×2 et B une matrice réelle de taille 2×3 telles que $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur que l'on déterminera (avec matrices de changement de bases etc.). Montrer que $BA = I_2$ en travaillant avec le rang des applications linéaires canoniquement associées à A et B .

Exercice 27 (X PC 2007) Soit $M \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{rg } M = \inf\{k; M = AB; A \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{km}(\mathbb{K})\}$$

Exercice 28 (Centrale PC 2007) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire : $\exists p \in \mathbb{N} \quad u^p = 0$) de rang $n - 1$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim u(F) = \dim F - 1$. Donner la dimension de $\text{Im } u^k$ puis montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Exercice 29 (Centrale PSI 2007) Montrer que l'ensemble G des matrices

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 30 (ENSI 2007) Discuter et résoudre suivant a et b le système

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 31 (ENSI 2007) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de $\varphi(P) = P(X) - P(X - 1)$. En déduire noyau et image de φ .

Exercice 32 (ENSI 2007) Montrer que $A = [\sin(i + j)]$ est au plus de rang 2.