**Exercice 1.** Dans chaque phrase entourer le ou les mots qui rendent l'affirmation vraie :

- pour faire de la mousse au chocolat il faut/il suffit d'avoir du chocolat ;
- pour faire du caramel, il faut/ il suffit d'avoir de l'eau et du sucre ;
- pour qu'un losange soit carré, il faut/il suffit que ses diagonales aient la même longueur ;
- les œufs sont une condition nécessaire/suffisante pour faire de la mousse au chocolat ;
- $x = 2$ est une condition nécessaire/suffisante pour que $x^2 = 4$ ;
- $x + y = 5$ est une condition nécessaire/suffisante pour que $x = 2$ et $y = 3$.

**Exercice 2.** Ecrire la négation et donner le sens de

- $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x) = y$
- $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < y$
- $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \geqslant A$
- $\exists T \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$

**Exercice 3.** Mettre entre les propriétés a) et b) de chacune des questions suivantes le bon signe $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

1. a) $n$ est multiple de 2 b) ($n$ est multiple de 4 ou $n$ est multiple de 6)
2. a) $\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ b) $\sin\theta = 1$
3. a) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 0$ b) $x^2 + 4x - 5 = 0$
4. a) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 1$ b) $x^2 + 4x - 5 = 1$
5. a) $x - 3 = x^2 + 2x$ b) $e^{x-3} = e^{x^2}e^{2x}$
6. a) $z \in \mathbb{C}$ b) $\exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \quad z = re^{i\theta}$
7. $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ :
   a) $f$ admet des primitives sur $I$ b) $f$ est continue sur $I$
8. $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$,$f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a$ et $b$ sont deux réels de $I$ :
   a) $f = g$ b) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$

**Exercice 4.** Ecrire la négation et étudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \exists z \in N \quad (x < y) \wedge (y = 2z)$
- $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad (z \leqslant x \Rightarrow z \leqslant y)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \quad xy = 1)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$

**Exercice 5.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \neq 0$ (on raisonnera par l'absurde).

**Exercice 6.** Ecrire symboliquement les énoncés suivants.

1. Tout réel est encadré par deux entiers consécutifs.
2. La somme des cubes des $n$ premiers entiers naturels est le carré de la somme de ces $n$ entiers.
3. La partie entière d'un réel est le plus grand entier relatif qui lui est inférieur ou égal.
4. Tout réel compris entre $-1$ et 1 est le cosinus d'un réel compris entre 0 et $\pi$.
5. La valeur absolue d'un réel est la plus grande des deux valeurs définies par ce réel et son opposé.

**Exercice 7.** On considère la proposition (P) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \big( (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad a < b + \varepsilon \big) \Rightarrow a \leqslant b \big)$$

Ecrire sa négation ; par différentes méthodes montrer que (P) est vraie.

**Exercice 8.** Démonter l'implication suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad ((a \neq -2 \text{et} b \neq -2) \Rightarrow ab + 2a + 2b \neq -4)$$

**Exercice 9.** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les propositions $P$ et $Q$ où :

$P : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon$

$Q : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant 3\varepsilon$

Montrer que $P \iff Q$.

Expliciter (non $P$).

**Exercice 10.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. $f$ est majorée ;
2. $f$ est bornée ;
3. $f$ est paire , puis $f$ est impaire ;
4. $f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$ ;
5. $f$ ne s'annule jamais ;
6. $f$ est périodique ;
7. $f$ est croissante ;
8. $f$ est strictement décroissante ;
9. $f$ n'est pas la fonction nulle ;
10. $f$ est minorée par 1 ;
11. $f$ atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ ;
12. $f$ est inférieure à $g$ ;
13. $f$ n'est pas inférieure à $g$.
14. $f$ est constante
15. $f$ n'est pas constante

**Exercice 11.** Déterminer toutes les application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$$