PCSI 2 Géométrie dans l'espace 2008/09

Exercice 1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3.

1. Calculer $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$.
2. Montrer que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$
3. Montrer que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$
4. Montrer que : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right]$ (égalité du parallélogramme)
5. Montrer que : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (théorème de Pythagore)
6. Montrer que : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ (égalité des diagonales du rectangle)

Exercice 2

1. Donner l'équation générale d'un plan passant par $O(0,0,0)$.
2. Soient $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0c)$ avec a, b et c non tous trois nuls. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A, B et C.
3. Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$? au plan $(O,\vec{j},\vec{k})$? au plan $(O,\vec{i},\vec{k})$?
4. Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle à $\mathcal{D}(O,\vec{i})$? d'un plan parallèle à $\mathcal{D}(O,\vec{j})$? d'un plan parallèle à $\mathcal{D}(O,\vec{k})$?

Exercice 3 Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs.

1. Calculer $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) + \vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u}) + \vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$ (le résultat porte le nom d'identité de Jacobi).
2. Démontrer la formule de Lagrange : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 + (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

Exercice 4 Soient A et B deux points de l'espace et $\vec{v}$ un vecteur fixé non nul. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ vérifiant a) $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM} = \vec{0}$; c) $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB} = \vec{v}$; d) $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM} = \vec{v}$.

Exercice 5 Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace.

1. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{E}_3$, le vecteur
$$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$$
est orthogonal au plan (ABC).
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ vérifiant $\overrightarrow{MA}\wedge(\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

Exercice 6 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ quatre vecteurs de l'espace. Exprimer $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{w}\wedge\vec{x})$ comme combinaison linéaire de $\vec{w}$ et $\vec{x}$, puis comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On suppose que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathcal{E}_3$. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ quelconque dans cette base.

Exercice 7 Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace.

1. On suppose $\vec{a}\wedge\vec{b} \neq \vec{0}$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{d} = 0$. Montrer que les équations $\vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{c}$ et $\vec{b}\wedge\vec{x} = \vec{d}$ ont une solution $\vec{x}$ commune si et seulement si $\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} \vec{a}\wedge\vec{x} + \vec{y} = \vec{b} \\ \vec{a}\wedge\vec{y} + \vec{x} = \vec{c} \end{cases}$

Exercice 8 On se donne les points $A(1,1,1)$, $B(0,0,3)$ et $C(1,2,0)$ et on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y = 1$.

1. Les points A, B, C appartiennent-ils à $\mathcal{P}$?
2. Que signifie géométriquement le fait que la variable z n'apparaisse pas dans l'équation de $\mathcal{P}$?
3. Donner une équation du plan $\mathcal{P}(ABC)$.
4. Montrer que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}(ABC)$ est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.

Exercice 9 Déterminer les intersections suivantes

a) $P_1 \cap P_2$ avec $P_1 : x - 2y + 3z - 6 = 0$, et $P_2 : x + y - 2z - 2 = 0$. Soit $A(1,0,1)$. Déterminer une équation du plan défini par A et la droite d'intersection de P_1 et P_2.

b) $P \cap D$ avec $P : x + 2y + z - 6 = 0$ et $D = (AB)$, $A(1,2,-1)$, $B(3,-1,0)$.

c) $D_1 \cap D_2$ avec D_1 passant par $A(0,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}(2,1,-1)$ et D_2 donnée par les équations $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 2x-y-z=1 \end{array}\right.$.

Exercice 10 On considère les droites suivantes :
$$D_1 : \left\{\begin{array}{l} x-2z=1 \\ y=z+2 \end{array}\right. \text{ et } D_2 : \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{array}\right., a \in \mathbb{R}.$$
Déterminer a pour que D_1 et D_2 soient coplanaires et donner alors une équation du plan commun.

Exercice 11 Donner une équation cartésienne des sphères

1. de centre $\Omega(2,-3,4)$ et tangente au plan d'équation $x+y+z=10$;
2. passant par $A(5,0,3)$ et contenant le cercle $C : \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right.$;
3. contenant les cercles d'équations
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x^2+y^2+z^2+2y-2z-34 &=& 0 \end{array}\right.$$
et
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z &=& 0 \\ x^2+y^2+z^2-5x-9z-30 &=& 0 \end{array}\right.$$

Exercice 12 On donne la sphère $S : x^2+y^2+z^2=9$ et le plan $P : x+y+z=1$. Déterminer le centre et le rayon du cercle $S \cap P$.

Exercice 13 Déterminer l'intersection des sphères S de centre de $A(1,0,1)$ et de rayon 1 et S' de centre $A'(2,1,-1)$ et de rayon 2.

Exercice 14 Déterminer la longueur de la diagonale d'un cube de côté a et une mesure de l'angle de cette diagonale avec chacune des faces du cube.

Exercice 15 On se donne les points $A(1,1,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,-1)$, $D(2,-1,3)$. Déterminer l'angle entre les droites (AB) et (AC), l'angle entre les plans (ABC) et (ABD), la surface du triangle BCD et le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 16 Calculer la distance du point A à la droite D dans les cas suivants :

1. $A(1,1,1)$ et $D : \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 3x-2y-z=-2 \end{array}\right.$;
2. $A(1,2,3)$ et $D : \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=1 \\ x+2y-z=3 \end{array}\right.$.

Exercice 17 Déterminer la perpendiculaire commune aux droites Δ et Δ' données par les équations suivantes :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x-y+z &=& 3 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 5 \\ x-z &=& 3 \end{array}\right.$$

Exercice 18 Former une équation cartésienne des plans contenant la droite d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 5 \\ 4x+y-z &=& 2 \end{array}\right.$ et coupant les deux plans d'équations $y=5x$ et $y=-5x$ suivant deux droites orthogonales.

Exercice 19 Montrer que les trois plans d'équations respectives
$$x-y+2z=1 \quad 2x+y-z=-1 \quad x+5y-8z=-2$$
sont les trois faces d'un prisme.