

## PCSI 2 Exercices de géométrie plane 2008/09

**Exercice 1** Dessiner et décrire à l'aide des coordonnées polaires les lieux du plan suivants.

$$E_1 = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$
$$E_2 = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$$

**Exercice 2** Dessiner et décrire à l'aide des coordonnées cartésiennes les lieux du plan suivants.

$$E_1 = \{M(r, \theta) \in \mathcal{P}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 1 \leq r \leq 2\}$$
$$E_2 = \{M(r, \theta) \in \mathcal{P}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 2 \sin \theta \leq r \leq 1\}$$

**Exercice 3** On se place dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et on considère le point  $\Omega(1; -1)$  ainsi que les vecteurs  $\vec{u}$  de coordonnées  $(1; 2)$  et  $\vec{v}$  de coordonnées  $(-2; 3)$ .

1. Montrer que  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère. Est-il orthonormal ?
2. Soient  $A(5, 6)$  et  $\vec{z}$  le vecteur de coordonnées  $(-3; -3)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Calculer leurs coordonnées dans  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ .
3. Déterminer une équation dans  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$  du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon 1.

**Exercice 4** On se place dans un repère orthonormal. Donner l'aire des triangles  $ABC$  et  $ABD$ , avec  $A(1; 1)$ ,  $B(-2; -2)$ ,  $C(0; 2)$  et  $D(-1; 2)$ .

**Exercice 5** Soit  $ABC$  un triangle et  $M$  un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux de  $M$  sur les trois côtés du triangle sont alignés si et seulement si  $M$  appartient au cercle circonscrit du triangle.

**Exercice 6** Soit  $ABC$  un triangle,  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$ . On note de plus  $p$  le demi-périmètre de  $ABC$ . Calculer le cosinus et le sinus de l'angle  $\hat{A}$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , en déduire la formule de Héron : l'aire  $S$  de  $ABC$  est égale à  $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

**Exercice 7** Donner une équation de la droite  $\Delta$  passant par  $A(1; 2)$  et parallèle à la droite  $D$  d'équation  $4x - y + 1 = 0$ . Déterminer l'intersection de  $(OA)$  et de  $D$ .

**Exercice 8** On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel  $a$ , on définit la droite  $D_a$  d'équation  $(1 - a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$ . Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

**Exercice 9** On se place dans un repère orthonormé direct et on considère les points  $A(1; 1)$ ,  $B(3; 2)$  et  $C(-1; 2)$ . Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  puis celles de son symétrique par rapport à  $(AB)$ .

**Exercice 10** Dans un repère orthonormal direct, on considère les droites  $D$  et  $D'$  d'équations respectives  $5x - 12y + 7 = 0$  et  $3x + 4y + 7 = 0$ . Calculer les équations de leurs bissectrices.

**Exercice 11** Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite  $D$  par l'équation  $x + y + 1 = 0$  et, pour tout réel  $\lambda$ , le cercle  $\mathcal{C}_\lambda$  d'équation  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$ . Décrire le cercle  $\mathcal{C}_\lambda$  en fonction du paramètre  $\lambda$  puis étudier l'intersection de  $D$  et de  $\mathcal{C}_\lambda$ .

**Exercice 12** On considère dans un repère orthonormal direct les points  $A(3; 4)$ ,  $B(-3; 2)$  et  $C(-5; -2)$ .

1. Déterminer une équation du cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  au triangle  $ABC$ . Préciser son centre  $\Omega$  et son rayon  $r$ .
2. Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$ .
5. Vérifier que  $H$ ,  $G$  et  $\Omega$  sont alignés.

**Exercice 13** Soit  $ABC$  un triangle équilatéral. Déterminer  $\{M \mid MA^2 + MB^2 = MC^2\}$ .

**Exercice 14** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  et  $AC = a\sqrt{2}$ .

1. Que peut-on dire du triangle  $ABC$  ?
2. Déterminer  $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$ .
3. Déterminer  $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$ .

**Exercice 15** Soit  $A, B, C$  trois points distincts et  $k \in \mathbb{R}$  fixé. Etudier  $\{M; \frac{MA}{MB} = k\}$  et  $\{M; \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC}\|\}$

**Exercice 16** Soit  $ABC$  un triangle équilatéral. Montrer que la somme des distances d'un point  $M$  intérieur au triangle aux trois côtés est constante.

**Exercice 17** Ecrire en coordonnées polaires l'équation du cercle centré en  $A$  de coordonnées cartésiennes  $(a, 0)$  et de rayon  $a$ .