PCSI 2 — Déterminants — 2008/09

Exercice 1 La famille $u=(1,3,2), v=(1,2,-1), w=(0,1,3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que $\forall (x,y,z)\in E^3 \quad \mathrm{Det}(x,y-x,z-y)=\mathrm{Det}(x,y,z)$. En déduire

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2\\ a+1 & a+2 & a+3\\ a+2 & a+3 & a+4\end{vmatrix}$$

où $a\in\mathbb{K}$.

Exercice 3 Trouver une CNS pour que l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (ax+by,cx+dy)\end{array}$ soit un automorphisme ; En déduire une CNS pour qu'une matrice carrée d'ordre 2 soit inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 4 En utilisant des déterminants résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+(m-1)y & = & 1\\ mx+y & = & 2\end{array}\right. \quad \text{où } m\in\mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & a\\ x+my+z & = & b\\ 3x+y-mz & = & c\end{array}\right. \quad \text{où } (m,a,b,c)\in\mathbb{R}^4$$

Exercice 5 Conditions pour que les matrices suivantes soient inversibles

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \sin 2\varphi & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x & \cos 3x\\ 1 & \cos y & \cos 3y\\ 1 & \cos z & \cos 3z\end{bmatrix};\begin{bmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \tan^2 a\\ \sin^2 b & \cos^2 b & \tan^2 b\\ \sin^2 c & \cos^2 c & \tan^2 c\end{bmatrix}$$

Exercice 6 On considère le système $(\mathcal{S})$suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2\\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0\\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2\end{array}\right.$$

Donner en utilisant des déterminants la **nature** de l'ensemble des solutions et la valeur de y quand le système n'admet qu'une seule solution.

Exercice 7 Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $A=\begin{bmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}$. Soit $J=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{bmatrix}$ où $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $\det J$, AJ et en déduire $\det A$ sous une forme totalement factorisée dans $\mathbb{C}$.