École Normale Supérieure
Sorbonne Université

Mémoire de M2

Introduction à l'homologie de cordes

Auteur
Thibaut Mazuir

Sous la direction de
Alexandru Oancea

31 janvier 2020

Table des matières

Introduction 2

Chapitre 1. Éléments de théorie des noeuds 4
1. Noeuds 4
2. Groupe de noeud 8

Chapitre 2. Homologie de cordes simple 12
1. Homologie de cordes simple en degré zéro 12
2. L'algèbre de chemins de K 18
3. L'algèbre des mots brisés de K 21
4. En résumé 25
5. Applications 25
6. Homologie de cordes simple en degré quelconque 27

Chapitre 3. Homologie de cordes améliorée 30
1. Cordes brisées 30
2. Algèbre et modules de chemins 37
3. Le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ en terme de l'algèbre de groupe de noeud 39
4. Applications 44
5. Homologie de cordes améliorée en degré quelconque 45

Chapitre 4. Vers l'homologie de contact legendrienne 50
1. Disques holomorphes 50
2. Espaces de modules 53

Chapitre 5. Homologie de contact de noeud simple 54
1. Préliminaires 54
2. Les espaces de modules $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ 55
3. Définition de l'homologie de contact legendrienne de Λ 57
4. Les espaces de modules $\mathscr{M}(a; \boldsymbol{n})$ 60
5. Le morphisme Φ entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$ 65
6. Le morphisme Φ induit un isomorphisme sur l'homologie de degré 0 69

Chapitre 6. Homologie de contact de noeud améliorée 71
1. L'algèbre composable de la legendrienne $\Lambda_K \cup \Lambda_q$ 71
2. L'invariant $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ en terme d'homologie de contact améliorée 74
3. Les homologies de contact et de cordes définissent des quadruplets isomorphes 77

Bibliographie 81

Introduction

La géométrie symplectique et la géométrie de contact, ainsi que la théorie des courbes holomorphes, fournissent un cadre général permettant l'étude de variétés lisses et de couples de variétés (M, P) où P est une sous-variété plongée dans la variété M. En effet, à toute variété M est naturellement associée une variété symplectique qui est son cotangent T^*M muni de la forme symplectique canonique $d(pdq)$. En choisissant une métrique riemannienne quelconque, lui est également associée une variété de contact S^*M, le fibré cotangent unitaire, munie de la forme de contact $\lambda = pdq$. De plus, pour toute sous-variété $P \subset M$, son fibré conormal L_P est une lagrangienne de la variété symplectique T^*M, tandis que son fibré conormal en sphère $\Lambda_P := L_P \cap S^*M$ est une legendrienne de la variété de contact S^*M. L'étude des propriétés de ces objets avec les outils de la géométrie symplectique ou de contact, permet alors de recouvrer des informations sur la variété M ou le couple (M, P).

On s'intéresse plus particulièrement au couple $(\mathbb{R}^3, K)$, où K est un noeud de $\mathbb{R}^3$. Topologiquement, son fibré conormal en sphère Λ_K est très simple : il est difféomorphe à un tore. Cependant, en tant que legendrienne de $T^*\mathbb{R}^3$, il fournit énormément d'informations sur le noeud : il définit en fait un invariant complet de noeud (voir le théorème 9 et [**She16**]). Dans le cas du couple $(\mathbb{R}^3, K)$, la SFT (Symplectic Field Theory) pourvoit un cadre général sympathique associant au couple (S^*Q, Λ_K) des invariants algébriques, définis par des comptes de disques holomorphes. Nous donnerons l'esquisse de la construction de deux de ces invariants, introduits dans les articles [**CELN16**] et [**ENS16**] : *l'homologie de contact de noeud simple* et *l'homologie de contact de noeud améliorée*.

Une autre manière d'étudier les propriétés de variétés ainsi que de couple de variétés (M, P), est le cadre de la topologie des cordes. Elle consiste en l'étude des propriétés d'une variété ou d'un couple de variétés, à travers leurs espaces de lacets et de chemins. L'étude de l'homologie de contact associée au couple $(\mathbb{R}^3, K)$ a fait apparaître un lien, déjà connu pour d'autres constructions similaires, entre la SFT et la topologie des cordes. On a d'abord construit un invariant de nature combinatoire qu'on a relié à l'homologie de contact de la legendrienne Λ_K. La similitude entre les opérations définissant cet invariant et certaines opérations de topologie des cordes déjà connues, a alors mené aux articles [**CELN16**] et [**ENS16**], dans lesquels l'homologie de contact de noeud simple, puis l'homologie de contact de noeud améliorée, sont reliées à des homologies définies par des opérations de topologie des cordes. L'étude de l'homologie de contact legendrienne à travers cette nouvelle formulation s'en est trouvé grandement simplifiée et a permis de montrer dans un premier temps dans [**CELN16**] et [**GL15**] que l'homologie de contact de noeud simple détecte le noeud trivial, ainsi que certaines familles de noeud spécifiques, et dans un second temps dans [**ENS16**] que l'homologie de contact de noeud améliorée est en fait un invariant complet de noeud.

On choisit de prendre le contrepied de la construction historique de ces invariants, en introduisant d'abord les homologies du point de vue de la topologie des cordes, dites *homologies de cordes*, et en définissant les invariants associés à la legendrienne Λ_K dans les derniers chapitres. On introduit en premier lieu quelques éléments de la théorie des noeuds. Le deuxième chapitre est consacré à la définition de la première homologie de cordes : *l'homologie de cordes simple*. On s'attache

plus particulièrement à l'étude de cette homologie en degré 0, sans s'étendre trop longuement sur l'homologie de cordes simple en degré quelconque. On montre que l'homologie de cordes en degré 0 détecte le noeud trivial, les noeuds toriques et les noeuds composés et câblés. Le troisième chapitre est consacré à une généralisation de l'homologie de cordes simple : *l'homologie de cordes améliorée*. On y étudie cette fois trois groupes d'homologie, notés R_{KK}, R_{Kq} et R_{qK}, sur lesquels on définit une opération P. On montre alors que le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ est un invariant complet de noeud. Après avoir introduit les résultats de base de la théorie des disques holomorphes dans le quatrième chapitre, nous définissons le premier invariant associé à la legendrienne Λ_K : *l'homologie de contact de noeud simple*. Nous construisons alors un morphisme d'algèbres différentielles graduées, entre les algèbres différentielles graduées définissant l'homologie de contact de noeud simple et l'homologie de cordes simple, et montrons que ce morphisme induit un isomorphisme en degré 0. Enfin, nous définissons dans le sixième et dernier chapitre, l'homologie de contact de noeud améliorée. On démontre qu'on peut en extraire un quadruplet $(R_{KK}^{contact}, R_{Kq}^{contact}, R_{qK}^{contact}, \nu)$ qui est isomorphe au quadruplet $(R_{KK}^{cordes}, R_{Kq}^{cordes}, R_{qK}^{cordes}, P)$, défini par l'homologie de cordes améliorée.

Chapitre 1

Éléments de théorie des noeuds

On introduit les définitions et résultats de base de la théorie des noeuds qui nous serviront dans les chapitres suivants. On renvoie aux trois premiers chapitres de [**Bur03**], desquels ce bref aperçu est grandement inspiré, pour les définitions et démonstrations non données dans ce chapitre.

1. Noeuds

1.1. Premières définitions.

DÉFINITION 1. On appelle *noeud* de $\mathbb{R}^3$ tout plongement $K : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$. Un noeud est dit *orienté* si l'on spécifie une orientation de $\mathbb{S}^1$ en plus de ce plongement.

Un noeud de $\mathbb{R}^3$ correspond géométriquement exactement au nom qu'il porte : c'est un noeud, une corde qu'on a enroulée d'une certaine manière puis refermée sur elle-même.

Étant donnés deux noeuds K et K', la première question qui se pose est la suivante : est-il possible de déformer K, sans faire jamais passer K à travers lui-même, et trouver K' à la fin ? Deux noeuds pour lesquels une telle transformation est possible sont dits *équivalents*. Plus rigoureusement, une telle transformation est appelée *isotopie ambiante* entre K et K' :

DÉFINITION 2. On appelle *isotopie ambiante* entre deux noeuds $K, K' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ une application continue

$$H : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

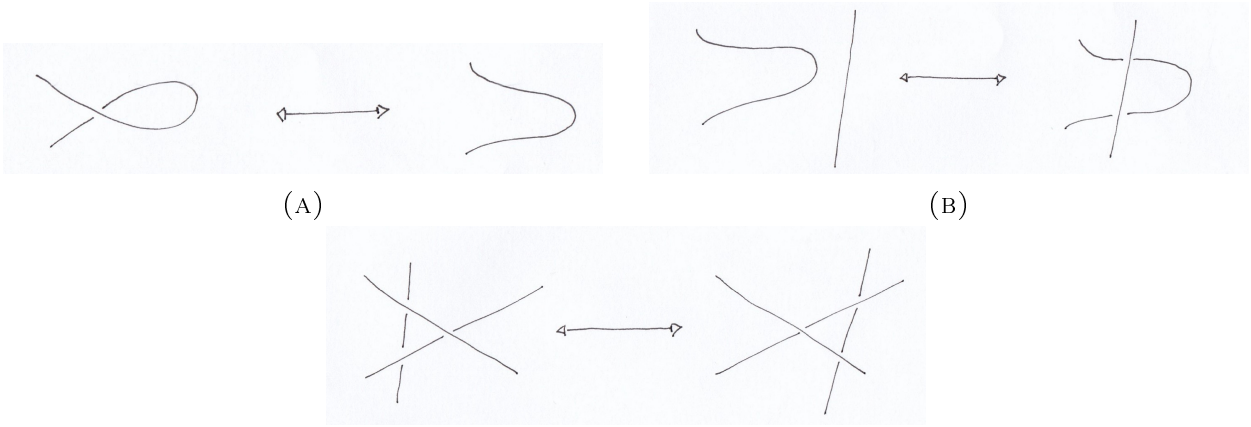
telle que $h_t := H(t, \cdot)$ est un difféomorphisme pour tout t, $h_0 = \mathrm{id}$ et $h_1 \circ K = K'$. Deux noeuds pour lesquels une telle application existe sont alors dits *équivalents*. Si K et K' sont orientés, ils sont dits *équivalents* si $h_1 \circ K$ et K' ont la même orientation.

On vérifie que *être équivalents* est une relation d'équivalence sur les noeuds (resp. les noeuds orientés). Si deux noeuds (orientés) K et K' sont équivalents, on note $K = K'$.

La manière classique de voir un noeud de $\mathbb{R}^3$ est de dessiner son projeté dans un plan bien choisi, avec des traits discontinus représentant les chevauchements du noeud : un tel projeté est couramment appelé *diagramme du noeud*. L'orientation du noeud est alors représentée par une flèche sur le diagramme, correspondant au sens de parcours du noeud. Un exemple de diagramme de noeud est représenté sur la figure 1.

FIGURE 1. Le diagramme de noeud du noeud en huit

1.2. Mouvements de Reidemeister. Posons le problème suivant : étant donnés deux diagrammes associés à deux noeuds distincts, comment savoir si les deux noeuds sont équivalents ou non ? On remarque déjà que les trois mouvements représentés sur la figure 2, dits *mouvements de Reidemeister*, correspondent à une isotopie ambiante entre deux noeuds.



(A) (B)

(C)

FIGURE 2. Les trois mouvements de Reidemeister

Deux diagrammes de noeud sont dits équivalents s'il est possible de passer de l'un à l'autre par un nombre fini de mouvements de Reidemeister. Le théorème suivant assure que cette relation d'équivalence est la même que celle d'équivalence de noeuds :

THÉORÈME 1. *Deux noeuds sont équivalents si et seulement si leurs diagrammes de noeud sont équivalents.*

Le *noeud trivial* est alors l'unique noeud pouvant être représenté par le diagramme représenté sur la figure 3. Il est noté U.

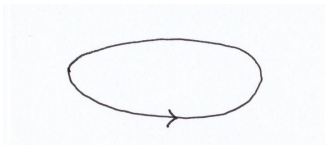


FIGURE 3. Le noeud trivial

DÉFINITION 3. Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. Le *noeud inverse* de K, noté $-K$, est le noeud K muni de l'orientation opposée. Le *noeud miroir*, noté K^* est le noeud orienté obtenu par la réflexion de K à travers un plan. K est dit *inversible* si $K = -K$ et *achiral* si $K = K^*$.

1.3. Méridien et longitude. Soit K un noeud de $\mathbb{R}^3$. Soit N un voisinage tubulaire de K. En particulier, N est difféomorphe à un tore solide et ∂N est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris implique que l'on a un isomorphisme

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_1(\partial N) \xrightarrow{\sim} H_1(N) \oplus H_1(\overline{\mathbb{R}^3 \backslash N}).$$

De plus, $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$. Il existe alors deux courbes simples μ et λ à valeurs dans ∂N telles que :

(a) λ et μ s'intersectent en exactement un point,

(b) μ est homologue à 0 et λ à K dans $H_1(N)$,

(c) μ est un générateur de $H_1(\overline{\mathbb{R}^3 \backslash N})$ et λ est homologue à 0 dans $H_1(\overline{\mathbb{R}^3 \backslash N})$.

On suppose désormais que K est orienté. ∂N est muni de l'orientation de bord. On oriente λ de sorte qu'il existe une isotopie ambiante de courbes orientées à valeurs dans N entre λ et K. On oriente alors μ de sorte que (μ, λ) forme une base orientée de $H_1(\partial N)$.

Le couple (μ, λ) est unique à isotopie ambiante à valeur dans ∂N près. μ est appelé le *méridien* de K et λ la *longitude de Seifert* de K. Ils sont représentés sur la figure 4.

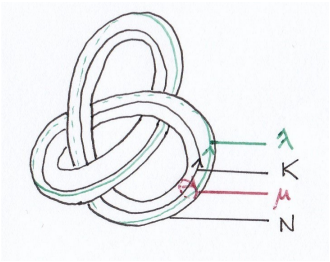
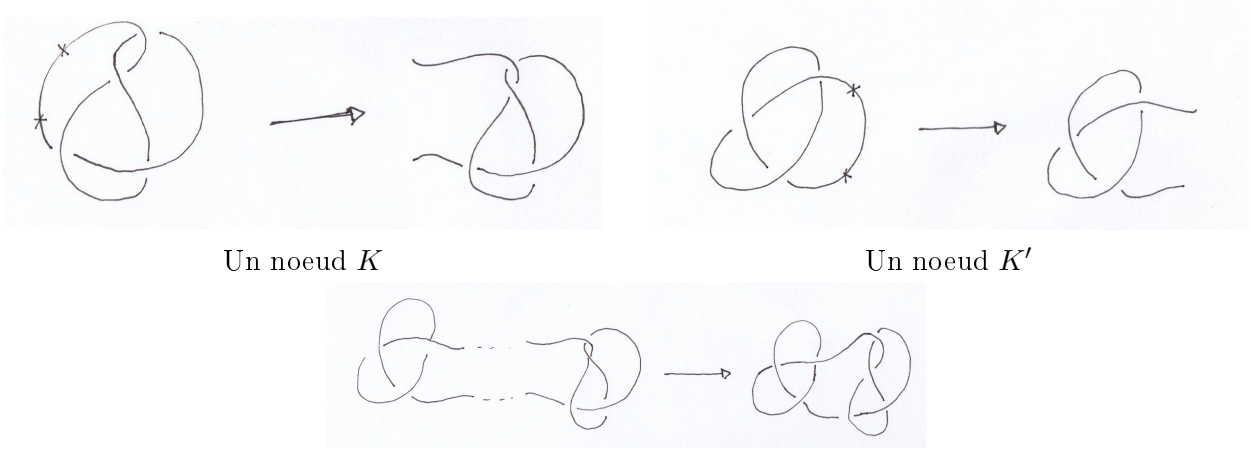


FIGURE 4. Méridien μ et longitude de Seifert λ d'un noeud de trèfle

1.4. Noeuds composés et noeuds compagnons. Étant donnés deux noeuds K et K', on peut former un nouveau noeud de la manière représentée sur la figure 5.



Un noeud K Un noeud K'

Le noeud composé $K\#K'$

FIGURE 5. La composition de deux noeuds

Le noeud obtenu à partir de cette opération est appelé la *composition* ou le *produit* de K et K', et est noté $K\#K'$. K et K' sont appelés les facteurs du noeud $K\#K'$.

DÉFINITION 4. Tout noeud de $\mathbb{R}^3$ pouvant être obtenu comme composition de deux noeuds non triviaux est dit *composé*. Tout noeud ne pouvant pas s'obtenir comme composition de deux noeuds non triviaux est dit *premier*.

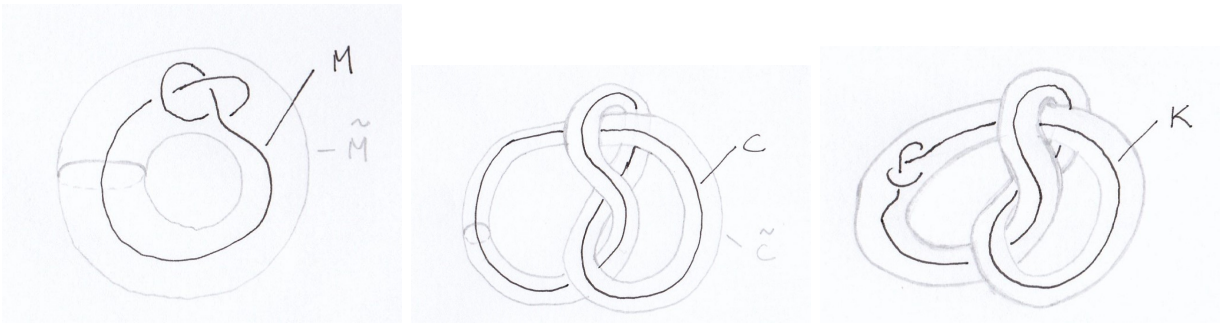
On dispose comme pour les entiers naturels d'un théorème de factorisation de tout noeud en noeuds premiers :

THÉORÈME 2 (Théorème de factorisation en noeuds premiers). *Soit K un noeud de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe une suite $K_1, \ldots, K_n$ de noeuds premiers de $\mathbb{R}^3$ telle que*

$$K = K_1\# \cdots \#K_n.$$

De plus pour toute décomposition de K en noeuds premiers $K := K'_1\# \cdots \#K'_m$, $n = m$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $K'_i = K_{\sigma(i)}$ pour tout i.

Une autre manière d'obtenir un nouveau noeud à partir de deux autres noeuds est la construction du noeud satellite. Soient M et C deux noeuds de $\mathbb{R}^3$. On considère un voisinage torique « dénoué » $\tilde{M}$ de M, tel que M ne soit pas trivial dans $\pi_1(\tilde{M})$, et un voisinage tubulaire $\tilde{C}$ de C. On forme comme sur la figure 6 un nouveau noeud noté K. Alors K est appelé le noeud *satellite* de C pour le *motif* $(M, \tilde{M})$ et C est appelé le noeud *compagnon* de K pour ce motif.



Un motif M Un compagnon C Le satellite K

FIGURE 6. Exemple de formation d'un noeud satellite

S'il existe une isotopie ambiante dans $\tilde{M}$, de M vers une courbe fermée simple de $\partial\tilde{M}$, on dit que S est un noeud câblé autour de C : on a enroulé un câble autour de $\tilde{C}$.

1.5. Noeud toriques et noeud câblés. On considère le tore $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ muni du méridien μ et de la longitude λ comme représenté sur la figure 7.

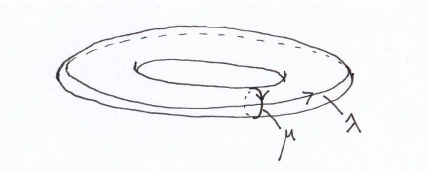


FIGURE 7

DÉFINITION 5. Soient p et $q \in \mathbb{N}$ tels que p et q sont premiers entre eux et $0 < p < q$. On appelle (p, q)-noeud torique, la courbe simple fermée rencontrant le méridien μ p fois, chaque fois avec nombre d'intersection local $+1$, et rencontrant la longitude λ q fois, chaque fois avec nombre d'intersection local $+1$.

On renvoie à la section 2.3 pour la définition du nombre d'intersection local de deux courbes. Le diagramme usuel d'un (p, q)-noeud torique est représenté sur la figure 8.

TERMINOLOGIE. On désigne par l'appellation *noeud torique* tout noeud orienté K tel qu'il existe p et q tels que K soit équivalent au (p, q)-noeud torique. Dans le cas où le motif M d'un noeud satellite est un (p, q)-noeud torique, le noeud satellite est appelé (p, q)-*noeud câblé* autour du compagnon C.

PROPOSITION 1. *Soient $0 < p < q$ premiers entre eux.*

(a) Le (p, q)-noeud torique est premier.

(b) Tout (p, q)-noeud câblé est premier.

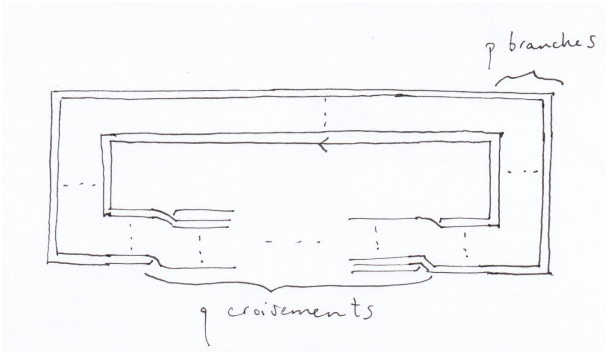


FIGURE 8. Le (p, q)-noeud torique

2. Groupe de noeud

2.1. Définition du groupe de noeud. L'invariant le plus important associé à un noeud est son *groupe de noeud* :

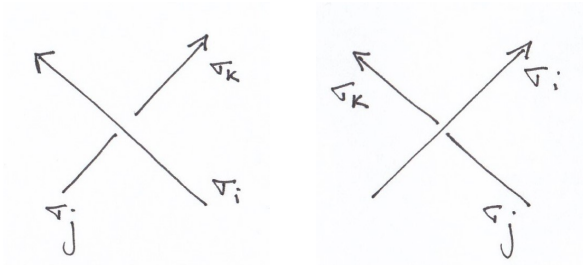
DÉFINITION 6. Soit K un noeud de $\mathbb{R}^3$. On appelle *groupe de noeud* de K le groupe fondamental de son complémentaire

$$\pi := \pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K).$$

Les groupes de noeud de deux noeuds équivalents sont isomorphes, c'est pour cela que le groupe de noeud est qualifié *d'invariant* associé au noeud.

REMARQUE. Il n'est pas nécessaire de préciser de point base pour le groupe de noeud car $\mathbb{R}^3 \backslash K$ est connexe par arcs. On remplace de plus parfois dans la définition $\mathbb{R}^3 \backslash K$ par $\overline{\mathbb{R}^3 \backslash N}$ où N est un voisinage tubulaire de K.

2.2. La méthode de la présentation de Wirtinger. Une méthode pour calculer le groupe de noeud d'un noeud est celle de la présentation de Wirtinger. Elle permet de calculer une présentation du groupe de noeud à partir du diagramme du noeud. Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. On le représente par un diagramme de noeud. On numérote les arcs σ_i entre chaque croisement du diagramme. On associe alors à chaque croisement une relation dépendant du nombre d'intersection local comme sur la figure 9. Le groupe de noeud de K est alors le groupe libre engendré par les σ_i,



Relation $\sigma_j \sigma_i \sigma_k^{-1} \sigma_i^{-1}$ Relation $\sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_i$

FIGURE 9

quotienté par les relations associées à chaque croisement.

Voici une explication géométrique des relations de la figure 9. On choisit un point base $p \in \mathbb{R}^3 \backslash K$. À tout arc σ_i on associe son méridien, qu'on note de la même manière. On considère le lacet γ comme sur la figure 10. Ce lacet est alors contractile et est homotope à $\sigma_j \sigma_i \sigma_k^{-1} \sigma_i^{-1}$. La

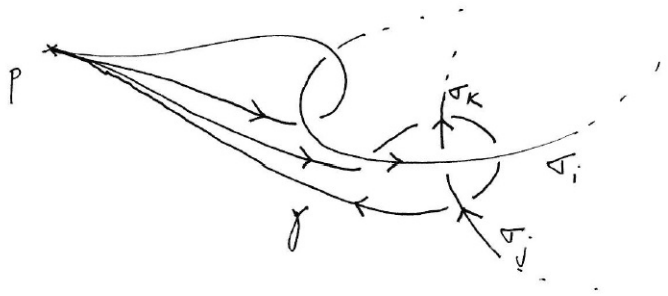


FIGURE 10

deuxième relation se déduit de la même manière. Cela montre que ces deux relations sont bien vérifiées dans le groupe de noeud.

Calculons par exemple le groupe de noeud du noeud de trèfle représenté sur la figure 11 pour cette méthode. Aux intersections A, B et C sont respectivement associées les relations

$$\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \qquad \sigma_1\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1} \qquad \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} \ .$$

Le groupe de noeud du noeud de trèfle est donc

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}, \sigma_1\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}, \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} \rangle \ ,$$

qui est isomorphe au groupe

$$\langle x, y | x^3 y^2 \rangle \ .$$

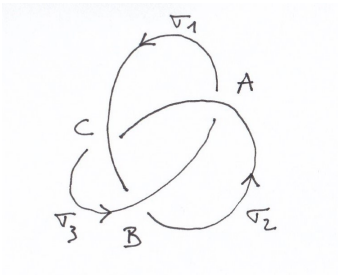


FIGURE 11. Le diagramme du noeud de trèfle annoté pour la présentation de Wirtinger

De manière générale, le groupe de noeud du (p, q)-noeud torique est le groupe

$$\langle x, y | x^p y^q \rangle \ .$$

Les groupes de noeuds toriques sont les seuls admettant une expression assez simple à manipuler. Pour les autres noeuds, les présentations de leur groupe de noeud sont souvent bien plus complexes. C'est pourquoi on essaie la plupart du temps de travailler avec d'autres invariants algébriques du noeud ou avec des propriétés particulières du groupe de noeud, plutôt qu'avec le groupe de noeud directement. On verra également dans la section 2.4 que le groupe de noeud auquel on ajoute le méridien μ et la longitude de Seifert λ forme un invariant complet de noeud.

2.3. Enlacement. Soient K un noeud orienté et N un voisinage tubulaire de K. On a vu dans la section 1.3 qu'on peut associer à N un élément $\mu \in H_1(\overline{\mathbb{R}^3\backslash N})$, le méridien de K, qui définit un isomorphisme de groupes

$$H_1(\mathbb{R}^3\backslash K) \cong H_1(\overline{\mathbb{R}^3\backslash N}) \cong \mathbb{Z}.$$

Cela définit un morphisme de groupes :

$$\mathrm{lk}_K : \pi_K \longrightarrow H_1(\mathbb{R}^3\backslash K) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

induit par le morphisme de Hurewicz.

Définition 7. Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3\backslash K$ une courbe fermée orientée. On appelle enlacement de γ et K l'entier relatif $\mathrm{lk}_K(\gamma)$.

Une manière de le calculer est la suivante. On représente γ et K par leurs projections dans un plan. En se référant à la figure 12, aux croisements (A) on associe $+1$ et aux croisements (B) on associe -1.

(A) Signe $+1$ (B) Signe -1

Figure 12

Alors, $\mathrm{lk}_K(\gamma)$ correspond à la somme des signes à chacun des croisements, divisée par 2. Un exemple est donné sur la figure 13.

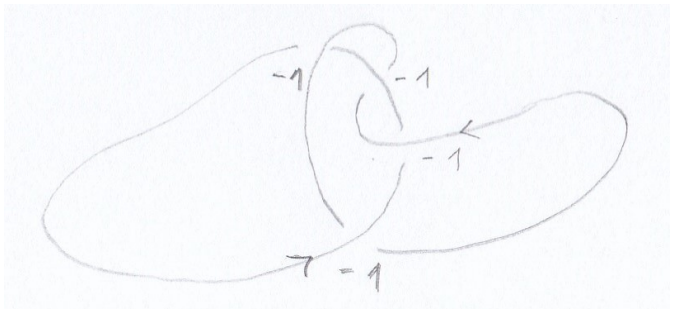


Figure 13. L'enlacement de ces deux noeuds est égal à -2.

Notons que pour la longitude de Seifert λ, $\mathrm{lk}_K(\lambda) = 0$.

2.4. Système périphérique d'un noeud. Soit N un voisinage tubulaire d'un noeud orienté K. On voit π comme $\pi := \pi_1(\overline{\mathbb{R}^3\backslash N})$. On introduit de plus le groupe $\hat{\pi} := \pi_1(\partial N)$, communément appelé *groupe périphérique de* K. L'inclusion $\partial N \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}^3\backslash N}$ induit un morphisme de groupes $\hat{\pi} \to \pi$. Avec les notations de la section 1.3, (μ, λ) est une base de $\hat{\pi}$, et ces deux éléments peuvent être vus comme des éléments de π à travers le morphisme précédent. C'est la convention qui est adoptée dans la définition qui suit.

Définition 8. Le *système périphérique* de K est le triplet (π, μ, λ). Le couple (μ, λ) vu dans π est appelé le *couple périphérique* du noeud K.

Le système périphérique d'un noeud orienté est un invariant complet du noeud orienté : il détermine entièrement sa classe d'équivalence en tant que noeud orienté.

THÉORÈME 3. *Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés. Soient $(\pi_i, \mu_i, \lambda_i)$ pour $i = 1, 2$ leurs systèmes périphériques respectifs. Alors K_1 et K_2 sont équivalents si et seulement si il existe un isomorphisme de groupes $\phi : \pi_1 \to \pi_2$ tel que*

$$\phi(\mu_1) = \mu_2 \text{ et } \phi(\lambda_1) = \lambda_2.$$

On déduit de ce théorème le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. *Soient K un noeud orienté et (π, μ, λ) son système périphérique.*

(a) K est inversible si et seulement si il existe un automorphisme de groupe $\phi : \pi \to \pi$ tel que $\phi(\mu) = \mu^{-1}$ et $\phi(\lambda) = \lambda^{-1}$.

(b) K est achiral si et seulement si il existe un automorphisme de groupe $\phi : \pi \to \pi$ tel que $\phi(\mu) = \mu^{-1}$ et $\phi(\lambda) = \lambda$.

On conclut cette section par une caractérisation du noeud trivial :

PROPOSITION 2. *Si un noeud K n'est pas trivial, l'inclusion $\partial N \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}^3 \backslash N}$ induit une injection $\hat{\pi} \hookrightarrow \pi$. En particulier, si $\pi \cong \mathbb{Z}$ alors K est trivial.*

La démonstration de cette proposition n'est pas difficile mais nécessite une longue série de résultats préliminaires. On note tout de même que si K est le noeud trivial, son groupe de noeud est engendré par le méridien μ et sa longitude de Seifert λ est triviale dans π.

Chapitre 2

Homologie de cordes simple

On définit un invariant algébrique associé à un noeud $K \subset \mathbb{R}^3$, construit à travers d'opérations de topologie des cordes : *l'homologie de cordes simple*. On étudie dans un premier temps exclusivement l'homologie de cordes simple en degré 0, noté $H_0^{string}(K)$, en renvoyant à la dernière partie pour une généralisation à un degré quelconque. $H_0^{string}(K)$ est un invariant de noeud orienté, qu'on reformule, d'abord avec le formalisme des chemins de K dans la partie 2, puis celui des mots brisés dans la partie 3. Lorsque K n'est pas trivial, la proposition 7 nous permet alors de voir $H_0^{string}(K)$ comme sous-anneau de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\pi_K]$. On s'appuie finalement sur cette proposition ainsi que sur des résult g-,jats de théorie des noeuds, pour montrer que $H_0^{string}(K)$ détecte le noeud trivial, les noeuds toriques et les noeuds câblés et composés.

Ce chapitre est fondé sur l'article **[CELN16]** pour la construction de l'homologie de cordes simple, et sur l'article **[GL15]** pour les résultats de la section 5.

1. Homologie de cordes simple en degré zéro

1.1. Cordes brisées. On note dans la suite $Q := \mathbb{R}^3$. Soit K un noeud orienté de Q. On choisit un voisinage tubulaire N de K. On fixe de plus un point base $x_0 \in \partial N$ et un vecteur $v_0 \in T_{x_0}\partial N$.

Définition 9. On appelle *corde brisée à $2l$ changements* sur K, la donnée de $2l+1$ nombres réels $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{2l} < a_{2l+1}$ et de $2l+1$ applications de classe C^1, $s_1, \ldots, s_{2l+1}$,

$$s_{2j} : [a_{2j-1}, a_{2j}] \to Q \text{ et } s_{2j+1} : [a_{2j}, a_{2j+1}] \to N,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(a) $s_0(a_0) = s_{2l+1}(a_{2l+1}) = x_0$ et $\dot{s_0}(a_0) = \dot{s}_{2l+1}(a_{2l+1}) = v_0$

(b) pour k allant de 1 à $2l$,
$$s_k(a_k) = s_{k+1}(a_k) \in K$$

(c) et pour j allant de 1 à l,
$$(\dot{s}_{2j}(a_{2j}))^{\text{normal}} = -(\dot{s}_{2j+1}(a_{2j}))^{\text{normal}}$$
$$(\dot{s}_{2j-1}(a_{2j-1}))^{\text{normal}} = (\dot{s_{2j}}(a_{2j-1}))^{\text{normal}} ,$$

où on a noté pour $x \in K$ et $v \in T_x\mathbb{R}^3$, v^{normal} l'image de v par la projection $T_x\mathbb{R}^3 \to T_x\mathbb{R}^3/T_xK$.

Terminologie. Les applications s_{2j} (resp. s_{2j+1}) sont maintenant désignées comme les *Q-cordes* (resp. *N-cordes*).

Notation. Par la suite, une corde brisée à $2l$ changements est notée sous la forme suivante : $s := (s_1, \ldots, s_{2l+1})$. s peut alors parfois être vue comme l'application continue obtenue en concaténant chacune de ses composantes. On note de plus Σ^l l'ensemble des cordes brisées à $2l$ changements.

Un exemple de corde brisée à quatre changements sur le noeud trivial est donné sur la figure 1. Les changements sont représentés par des croix noires, les Q-cordes par les portions bleues et les N-cordes par les portions rouges.

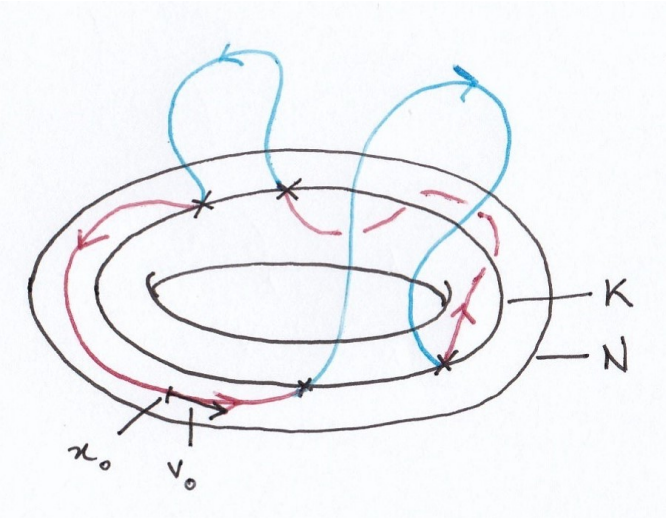


FIGURE 1. Un exemple de corde brisée à quatre changements

REMARQUE. Quelles sont les motivations derrière les conditions dans cette définition ?

(i) Le choix de travailler avec des bornes qui varient se révèlera pratique lorsqu'on définira les opérations sur les cordes brisées dans la section 1.3.

(ii) Les conditions en a_0 et a_{2l+1} assure que la concaténation de deux cordes brisées est encore une corde brisée.

(iii) Les conditions sur les dérivées au point d'intersection avec K peuvent pour l'instant sembler floues. Elles modélisent en fait le comportement en une *pointe d'intersection lagrangienne* de disques holomorphes que nous définirons dans le chapitre 5.

Pour construire les opérations sur les cordes brisées de la section 1.3, nous devons également définir la bonne notion de famille à 1-paramètre de cordes brisées :

DÉFINITION 10. Une *1-chaîne de cordes brisées à $2l$ changements sur K* est la donnée, pour tout $\lambda \in [0,1]$ d'un élément $s^\lambda := (s_1^\lambda, \dots, s_{2l+1}^\lambda) \in \Sigma^l$, où l ne dépend pas de λ, tel que pour tout k, l'application

$$\begin{aligned} [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow Q \text{ (resp. } N) \\ (t,\lambda) &\longmapsto s_k^\lambda((1-t)a_{k-1}^\lambda + ta_k^\lambda) \end{aligned}$$

est de classe C^1.

1.2. Cordes brisées génériques. On souhaite définir, sur les 1-chaînes de cordes brisées, des opérations associées aux instants où la corde brisée coupe K. On introduit à cet effet la notion de *généricité* de cordes brisées :

DÉFINITION 11. (i) Une corde brisée $s := (s_1, \dots, s_{2l+1})$ dont aucune des dérivées au bord $\dot{s}_j(a_{j-1})$ et $\dot{s}_j(a_j)$ n'est tangente à K, et aucune des s_j n'intersecte K en-dehors de ses extrémités, est dite *générique*.

(ii) Une 1-chaîne de cordes brisées, $\lambda \in [0,1] \mapsto s^\lambda = (s_1^\lambda, \dots, s_{2l+1}^\lambda) \in \Sigma^l$, est dite *générique* lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) s^0 et s^1 sont des cordes brisées génériques,

(b) pour tout $k = 1, \dots, 2l+1$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $\dot{s}_k^\lambda(a_{k-1}^\lambda)$ et $\dot{s}_k^\lambda(a_k^\lambda)$ ne sont pas tangentes à K,

(c) pour tout $k = 1, \dots, 2l+1$, l'application

$$\begin{aligned}]0,1[\times]0,1[&\longrightarrow Q \text{ (resp. } N) \\ (t,\lambda) &\longmapsto s_k^\lambda((1-t)a_{k-1}^\lambda + ta_k^\lambda) \end{aligned}$$

intersecte K transversalement en un nombre fini de points,

(d) pour tout λ, s^λ intersecte K au maximum une fois en dehors des extrémités de ses composantes.

La dernière condition signifie que :

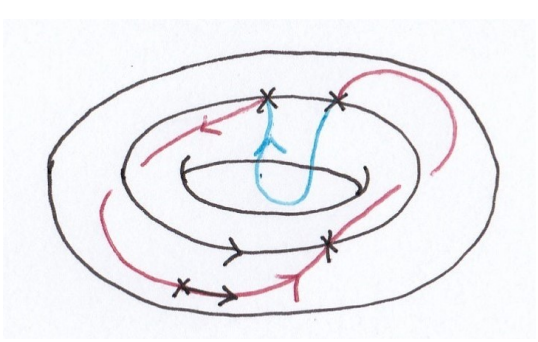
(i) Il n'existe pas de k et h distincts tels que s_k^λ et s_h^λ intersectent chacun K pour un même λ, en-dehors de leurs extrémités.

(ii) Il n'existe pas de λ tel que pour un k, s_k^λ intersecte K en deux points distincts en-dehors de ces extrémités.

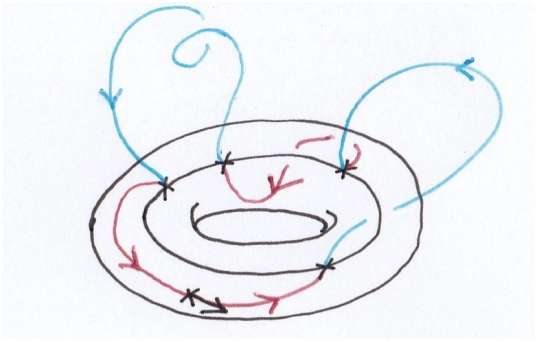
Pour une 1-chaîne générique de cordes brisées à $2l$ changements s^λ, il existe donc en particulier un nombre fini de couples $(t_n, \lambda_n) \in]0,1[\times]0,1[$ tel que pour tout n il existe un unique k tel que $s_k^{\lambda_n}((1-t_n)a_{k-1}^{\lambda_n} + t_n a_k^{\lambda_n}) \in K$.

On ne justifie pas ici en une fois les raisons motivant chacune des conditions imposées dans la définition précédente. Les explications se feront dans la suite de ce chapitre et une à une, à chaque fois qu'il apparaîtra pourquoi il est nécessaire d'exiger ces conditions. Elles apparaissent dans la section 1.3 et dans la partie 2.

Des exemples d'une corde brisée générique et d'une corde brisée non générique sont donnés sur la figure 2.



Une corde brisée non générique



Une corde brisée générique

FIGURE 2

1.3. Les opérations δ_Q et δ_N. Soient $C_0(\Sigma^l)$ (resp. $C_1(\Sigma^l)$) le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les cordes brisées génériques à $2l$ changements (resp. 1-chaînes génériques de cordes brisées à $2l$ changements). Pour $i = 0, 1$ on pose

$$C_i(\Sigma) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_i(\Sigma^l).$$

On commence par construire une famille de *fonctions-pique*. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}^2$, on se donne $\mathfrak{s}_\nu : [0,1] \to \mathbb{D}^2$ une application de classe C^1 telle que

$$\mathfrak{s}_\nu(0) = 0\ , \qquad \mathfrak{s}_\nu(1) = 0,$$
$$\dot{\mathfrak{s}}_\nu(0) = \nu\ , \qquad \dot{\mathfrak{s}}_\nu(1) = -\nu,$$

et pour tout $t \in [0,1]$, $\mathfrak{s}_\nu(t) \neq 0$ et $\mathfrak{s}_\nu(t) \in \mathbb{R}\nu$.

Commençons par définir le Q-coproduit δ_Q. Étant donnée une 1-chaîne générique de cordes brisées s^λ, on note $(b_n, \lambda_n)_{n=1}^m$ le nombre fini de couples pour lesquels il existe une Q-corde s_{2j} telle que $s_{2j}^{\lambda_n}(b_n)$ appartienne à K. On fixe une trivialisation quelconque $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ de N. Ici le j dépend à chaque fois de n, ce que nous notons $j = j(n)$. Pour tout n, soit

$$\nu^n := -(\dot{s}_{2j(n)}^{\lambda_n}(b_n))^{\text{normal}},$$

la composante normale ici étant celle associée à la trivialisation choisie de N. On définit la *pique* associée à ν^n

$$\mathfrak{s}^n : [0,1] \to N,$$

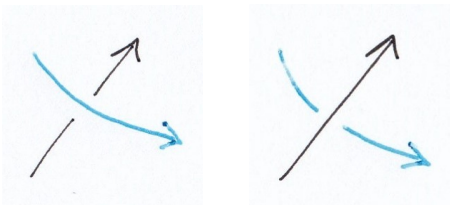
dont la projection sur K est constante de valeur $s_{2j}^{\lambda_n}(b_n)$ et celle sur $\mathbb{D}^2$ vaut $\mathfrak{s}_{\nu^n}$. $\mathfrak{s}^n$ peut alors être vue comme une N-corde.

Au voisinage d'un instant d'intersection λ_0 d'une Q-corde avec K, les deux cas de figure suivants peuvent avoir lieu :

(i) L'intersection avec K fait passer le nombre d'intersection local de s^λ avec K de $+1$ à -1, comme sur la figure 3.

(ii) L'intersection avec K fait passer le nombre d'intersection local de s^λ avec K de -1 à $+1$, en lisant la figure 3 de la droite vers la gauche.

Au cas (i), est alors associé le signe $\varepsilon = +1$, tandis qu'au cas (ii) on associe le signe $\varepsilon = -1$.



$\lambda < \lambda_0$ $\qquad$ $\lambda > \lambda_0$

FIGURE 3. Cas (i) du signe $+1$

DÉFINITION 12. Pour toute 1-chaîne générique de cordes brisées s^λ, on définit le *Q-coproduit* de s^λ,

$$\delta_Q(s^\lambda) := \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n \left(s_1^{\lambda_n}, \dots, s_{2j(n)}^{\lambda_n}\Big|_{[a_{2j(n)-1}, b_n]}, \mathfrak{s}^n, s_{2j(n)}^{\lambda_n}\Big|_{[b_n, a_{2j(n)}]}, \dots, s_{2l+1}^{\lambda_n} \right),$$

où les ε^n sont les signes définis dans le paragraphe précédent.

Par souci de lisibilité, les translations à effectuer dans les bornes des s_k n'ont pas été écrites dans la définition précédente.

Le Q-coproduit effectue donc l'opération suivante : en tout point d'intersection d'une Q-corde d'une corde brisée avec K, il insère une *N-pique* de sorte qu'on obtienne une nouvelle corde brisée avec deux changements supplémentaires. Ceci est représenté sur la figure 4.

Le N-coproduit est défini de manière analogue. Il s'agit simplement cette fois de voir une pique comme une Q-corde et non plus une N-corde. Un exemple est représenté sur la figure 5.

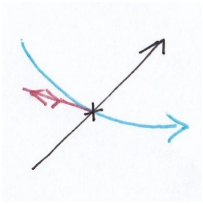


FIGURE 4. L'opération δ_Q

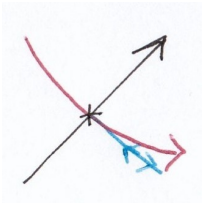


FIGURE 5. L'opération δ_N

Les conditions (b) et (d) de la définition 11 garantissent alors que les cordes brisées construites par ces coproduits sont génériques.

Enfin, à ces deux opérations s'ajoute l'opérateur de bord classique ∂,

$$\partial(s^\lambda) := s^1 - s^0.$$

La condition (a) de la définition 11 assure que l'opérateur ∂ envoie bien une 1-chaîne générique de cordes brisées sur un élément de $C_0(\Sigma)$.

1.4. Définition de $H_0^{string}(K)$. La concaténation de cordes brisées définit une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre non commutative sur $C_0(\Sigma)$, et une structure de $C_0(\Sigma)$-module à droite et à gauche sur $C_1(\Sigma)$.

Les trois opérations définies plus haut définissent des applications $C_0(\Sigma)$-linéaires,

$$\partial : C_1(\Sigma^l) \to C_0(\Sigma^l)$$
$$\delta_N, \delta_Q : C_1(\Sigma^l) \to C_0(\Sigma^{l+1}).$$

$\mathrm{Im}(\partial + \delta_Q + \delta_N)$ est donc un idéal bilatère de $C_0(\Sigma)$.

DÉFINITION 13. On appelle *homologie de cordes de degré 0* de K la $\mathbb{Z}$-algèbre

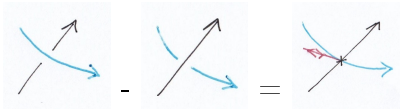
$$H_0^{string}(K) = H_0(\Sigma) := C_0(\Sigma)/\mathrm{Im}(\partial + \delta_N + \delta_Q) \ .$$

REMARQUE. Ce quotientage assure que deux cordes brisées génériques de K homotopes à travers un chemin de cordes brisées génériques de K ont le même représentant dans $H_0^{string}(K)$. On peut alors déplacer les extrémités d'une corde brisée générique le long de K sans changer son représentant dans $H_0^{string}(K)$. Cette remarque nous servira dans la démonstration de la proposition 4.

Il est en fait possible de définir $H_0^{string}(K)$ sans la différentielle $\partial+\delta_Q+\delta_N$, à partir de seulement deux relations. C'est ce que l'on se propose maintenant de faire.

On appelle *classe d'homotopie* d'une corde brisée générique s, la classe d'équivalence de s pour la relation d'équivalence : « être homotope à travers un chemin de cordes brisées génériques ». La concaténation passe au quotient pour cette relation d'équivalence, ce qui permet de définir la concaténation de deux classes d'homotopies de cordes brisées génériques.

Soit $\mathcal{B}$ le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les classes d'homotopie de cordes brisées génériques. La concaténation des classes d'homotopie de cordes brisées définit une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre non commutative sur $\mathcal{B}$. Considérons de plus l'idéal bilatère $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ engendré par les relations suivantes :

(a)  ,

(b) .

PROPOSITION 3. *Les $\mathbb{Z}$-algèbres $H_0^{string}(K)$ et $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}$-algèbres*

$$H_0^{string}(K) \cong \mathcal{B}/\mathcal{I} .$$

DÉMONSTRATION. La relation (a) (resp. la relation (b)) correspond à la relation $\delta_Q(s^\lambda) = 0$ (resp. $\delta_N(s^\lambda) = 0$) pour une 1-chaîne générique de cordes brisées n'intersectant K en dehors de ses extrémités qu'à un seul instant λ, l'intersection se faisant à travers une Q-corde (resp. une N-corde).

Soit maintenant s^λ une 1-chaîne générique de cordes brisées intersectant K m fois en les $(\lambda_n)_{n=1}^m$. On peut subdiviser l'intervalle $[0,1]$ en m intervalles $I_n = [c_{n-1}, c_n]$ tels que chaque intervalle contienne exactement un seul λ_n dans son intérieur. Alors, le fait que

$$\partial(s^\lambda) = s^1 - s^0 = \sum_{n=1}^{m} s^{c_n} - s^{c_{n-1}},$$

implique que

$$(\partial + \delta_Q + \delta_N)(s^\lambda) = \sum_{n=1}^{m} (\partial + \delta_Q + \delta_N)(s^\lambda\big|_{I_n}).$$

Chacune des familles $s^\lambda\big|_{I_n}$ est une 1-chaîne générique de cordes brisées n'intersectant K en dehors de ses extrémités qu'à un seul instant, ce qui permet de conclure d'après la remarque ci-haut. □

1.5. La structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}]$-algèbre non commutative sur $H_0^{string}(K)$. Soit K' un noeud orienté équivalent au noeud orienté K. Alors l'isotopie ambiante entre K et K' induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $H_0^{string}(K) \tilde{\to} H_0^{string}(K')$. $H_0^{string}(K)$ est donc un invariant de noeud orienté.

Les homologies de cordes de degré 0 de K et $-K$ sont isomorphes. En effet, changer l'orientation de K a pour effet de changer le signe de δ_Q et δ_N mais pas de ∂. On définit alors le morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $\sigma : C_0(\Sigma) \to C_0(\Sigma)$ qui correspond à la multiplication par $(-1)^l$ sur les $C_0(\Sigma^l)$. On vérifie qu'elle passe au quotient en un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $H_0^{string}(K) \tilde{\to} H_0^{string}(-K)$. On montre de manière similaire que les homologies de cordes de degré 0 de K et K^* sont isomorphes.

Cela montre que la simple structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur $H_0^{string}(K)$ n'est pas assez pour obtenir un invariant de noeud fort. On a vu dans la section 2.4 du chapitre précédent qu'en gardant l'information du couple périphérique d'un noeud, on obtient un invariant complet de noeud avec le groupe de noeud π ou une simple caractérisation du noeud trivial en regardant l'image de la longitude λ dans π. Et il existe une façon naturelle de conserver l'information du couple périphérique dans la structure de $H_0^{string}(K)$. On introduit pour cela la terminologie des R-algèbres non commutatives.

TERMINOLOGIE. Soit R un anneau. Un anneau S muni d'un morphisme d'anneaux $R \to S$ est appelé une *R-algèbre non commutative*. Deux R-algèbres non commutatives S_1 et S_2 seront alors dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'anneaux $S_1 \tilde{\to} S_2$ qui commutent avec les morphismes d'anneaux $R \to S_1$ et $R \to S_2$.

Soit R un anneau et S une R-algèbre non commutative. Alors R agit à droite et à gauche sur S par multiplication. Notons également que le terme *non-commutative* est trompeur. Il ne

signifie pas que S ne peut pas être commutative. Il est associé à l'action de R sur S, et signifie que contrairement à une R-algèbre, la règle suivante n'est pas forcément vérifiée : quels que soient $s_1, s_2 \in S$ et $r \in R$, $r \cdot s_1 s_2 = s_1(r \cdot s_2)$.

À tout élément du groupe périphérique $\pi_1(\partial N)$, on peut associer une N-corde. On obtient alors un morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}] &\longrightarrow H_0^{string}(K) \\ X &\longmapsto \lambda \\ Y &\longmapsto \mu \ . \end{aligned}$$

Cela définit une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur $H_0^{string}(K)$, qui garde l'information du couple périphérique. C'est désormais comme cela que nous verrons l'invariant $H_0^{string}(K)$. Une isotopie entre deux noeuds induit bien un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives entre leur homologie de cordes de degré 0.

2. L'algèbre de chemins de K

Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. Soit K' une copie parallèle de K par rapport à sa longitude de Seifert. On choisit un point base $*$ de K et le point base $*$ correspondant de K'.

Définition 14. Un *chemin* de K est une application continue $\gamma : [0,1] \to Q$ telle que $\gamma([0,1])$ n'intersecte pas K et telle que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ soient des éléments de $K' \backslash \{*\}$. Deux chemins sont dits homotopes s'il existe une homotopie de chemins entre eux.

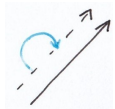
Un exemple de chemin est donné sur la figure 6. Le noeud K est en ligne pleine, sa copie K' en pointillés.

Figure 6. Un exemple de chemin de K

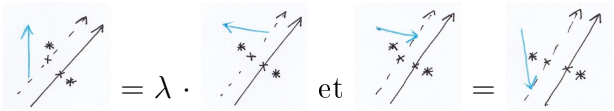
Considérons l'anneau non-commutatif engendré par les classes d'homotopie de chemins de K et quatre générateurs supplémentaires notés $\lambda, \lambda^{-1}, \mu$ et μ^{-1}. On quotiente cet anneau par les relations suivantes :

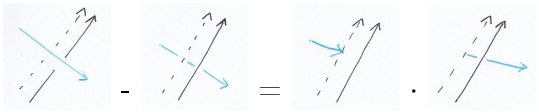
$$\lambda \cdot \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \lambda = \mu \cdot \mu^{-1} = \mu^{-1} \cdot \mu = 1 \text{ et } \lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda.$$

On note $\mathcal{A}$ l'anneau résultant. En tant que $\mathbb{Z}$-module, $\mathcal{A}$ est librement engendré par les mots en classes d'homotopies de chemins et en puissances de λ et μ. De plus les puissances de λ et μ commutent entre elles. On définit $\mathcal{M}$, l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ engendré par les relations suivantes (où K est dessiné en ligne pleine, K' est dessiné en ligne pointillée) :

(a)  $= \mu - 1$,

(b) $= \mu \cdot$ et $=$ $\cdot \mu$,

(c)  ,

(d)  ,

où les chemins représentés coïncident en-dehors de la zone dessinée.

DÉFINITION 15. *L'algèbre de chemins* du noeud orienté K est la $\mathbb{Z}$-algèbre

$$\mathfrak{P}(K) := \mathcal{A}/\mathcal{M}.$$

Cette $\mathbb{Z}$-algèbre est naturellement munie d'une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative, qui associe λ à X et μ à Y.

PROPOSITION 4. *$H_0^{string}(K)$ et $\mathfrak{P}(K)$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives.*

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce théorème est fondée sur l'observation que toute corde brisée générique de K peut-être vue comme un élement de $\mathfrak{P}(K)$. En effet, d'après la remarque suivant la définition 13, toutes les extrémités des Q-cordes et des N-cordes peuvent être ramenées à un même point à travers une homotopie de cordes brisées génériques. À partir de tout élément de $H_0^{string}(K)$ sous cette forme, peut alors être construit un mot de $\mathfrak{P}(K)$ en associant à une Q-corde le chemin correspondant et en associant à une N-corde son expression en fonction de la longitude λ et du méridien μ. Formulons cela de manière rigoureuse.

Soit v un champ de vecteurs le long de K dont K' est le poussé-en-avant inclus dans la frontière du voisinage tubulaire N de K. Soit p un élément de K, $\neq *$. Soit p' son poussé-en-avant dans K'. On identifie p' avec le x_0 introduit au début de la section 1.1.

Tout chemin de K peut être déformé par homotopie de sorte que ses extrémités soient égales à p', en poussant chacune de ses extrémités le long de K', dans la direction ne recontrant pas $*$. Introduisons quatre chemins allant de p à p' comme sur la figure 7. Il sont choisis de sorte que les dérivées en p soient respectivement $-v(p), -v(p), v(p), -v(p)$.

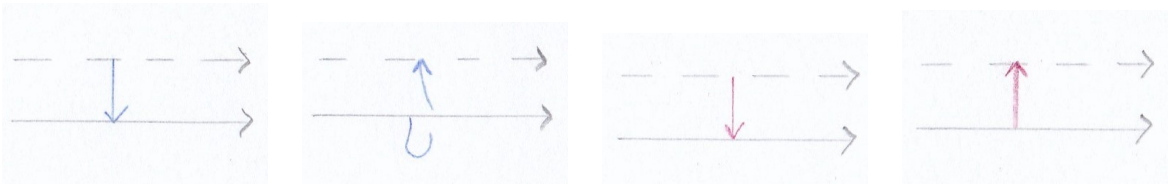


FIGURE 7. Les chemins $\tilde{\gamma}_Q$, γ_Q, $\tilde{\gamma}_N$ et γ_N

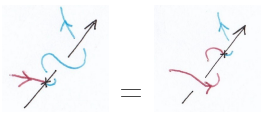
Soit $\alpha_1 x_1 \alpha_2 x_2 \dots x_n \alpha_{n+1}$ un élément de $\mathcal{A}$, où les α_k sont de la forme $\lambda^a \mu^b$ et les x_k sont des chemins dont les extrémités sont égales à p'. Les α_k sont alors vus comme des éléments de $\pi_1(\partial N)$ de base p', où λ correspond à la longitude et μ correspond au méridien. On lui associe la corde brisée suivante :

$$(\alpha_1 \gamma_N)(\tilde{\gamma}_Q x_1 \gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha_2 \gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_Q x_n \gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha_{n+1}).$$

Soit ϕ l'unique application $\mathbb{Z}$-linéaire $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ définie sur les générateurs du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathcal{A}$ par la formule précédente. Cette application est bien définie : les choix des quatre chemins de raccordement assurent que les conditions de la définition 9 sont bien respectées, tandis que le fait

que les x_k soient des chemins assure que la corde brisée obtenue est générique. On vérifie de plus avec la formule précédente que l'application ϕ est en plus un morphisme d'anneaux.

La première relation (b) s'envoie sur



qui est vérifiée dans $\mathcal{B}$ car les deux cordes brisées représentées sont homotopes. Il en est de même de la deuxième relation (b).

La première relation (c) correspond à l'affirmation suivante dans $\mathcal{B}$: déplacer l'extrémité initiale d'une Q-corde en parcourant λ une fois implique de déplacer l'extrémité finale de la N-corde la précédant de la même manière. La deuxième relation (c) correspond à l'affirmation suivante dans $\mathcal{B}$: déplacer l'extrémité finale d'une Q-corde en parcourant λ une fois implique de déplacer l'extrémité initiale de la N-corde la suivant de la même manière.

Maintenant, étant donnée une corde brisée générique $s \in \mathcal{B}$, il est possible d'effectuer l'opération suivante à travers une homotopie de cordes brisées génériques : ramener toutes ses extrémités au point p, et ce de sorte que la dérivée à l'extrémité finale de toute corde est $-v(p)$. Le morphisme d'anneaux ϕ est donc surjectif.

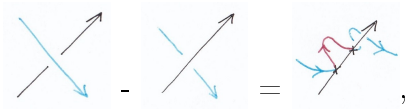
Il existe évidemment plusieurs manières d'effectuer l'opération précédente, et celles-ci sont en bijection avec le nombre d'antécédents de s par ϕ. Quotienter $\mathcal{A}$ par les relations (c) correspond à supprimer la dépendance à la manière dont on a ramené les extrémités à p, tandis que quotienter $\mathcal{A}$ par les relations (b) correspond à oublier la façon dont on a ramené les dérivées à $-v(p)$. Ainsi, en notant $\mathfrak{q}$ l'idéal bilatère engendré par les relations (c) et (b) l'application ϕ passe au quotient en un isomorphisme d'anneaux $\phi : \mathcal{A}/\mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$.

La relation (a) s'envoie sur la relation

En homotopant le membre de droite on obtient la relation

qui correspond à la relation (b) dans $\mathcal{B}$.

La relation (d) s'envoie sur la relation



qui correspond à la relation (a) dans $\mathcal{B}$.

L'isomorphisme ϕ échange donc les relations (a) et (d) dans $\mathcal{A}/\mathfrak{q}$ avec les relations (b) et (a) dans $\mathcal{B}$. Ainsi ϕ définit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres entre $\mathfrak{P}(K)$ et $H_0^{string}(K)$. D'après la formule le définissant, c'est en fait même un morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives. D'où le résultat annoncé. □

Il apparaît dans la démonstration précédente pourquoi la condition (i) de la définition 11 est nécessaire pour la construction de cet isomorphisme. Elle assure que les façons dont on ramène la dérivée à l'extrémité finale de toute corde à $-v(p)$ sont associées aux relations (b). Ce ne serait plus le cas si une corde était tangente à K en l'une de ses extrémités.

3. L'algèbre des mots brisés de K

Dans la partie précédente, on a quotienté l'algèbre de mots $\mathcal{A}$ par des relations géométriques associées aux relations définissant $H_0^{string}(K)$ ce qui nous a permis de construire un isomorphisme entre $\mathfrak{P}(K)$ et $H_0^{string}(K)$. On va voir dans les sections qui suivent qu'il est en fait possible de construire un nouvel isomorphisme vers une algèbre de mots quotient, en choisissant cette fois-ci un point de vue purement algébrique : celui des *mots brisés de* K.

3.1. Mots brisés de K. On appelle mot brisé en π et $\hat{\pi}$ un mot dont les lettres alternent entre les éléments de π et $\hat{\pi}$. Les éléments de π sont désormais notés en alphabet latin et entourés de crochets, tandis que les éléments de $\hat{\pi}$ sont notés avec des lettres grecques et entourés d'accolades. Voici quelques exemples de mots brisés : $\{\alpha\}, [x], \{\alpha_1\}[x]\{\alpha_2\}$.

Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{Z}$- module librement engendré par les mots brisés de la forme

$$\{\alpha_1\}[x_1]\cdots[x_n]\{\alpha_{n+1}\}.$$

On munit $\mathcal{C}$ d'une structure d'anneaux pour la multiplication :

$$(\cdots_1\{\alpha_1\})\cdot(\{\alpha_2\}\cdots_2) := \cdots_1\{\alpha_1\alpha_2\}\cdots_2.$$

Soit $\mathcal{L}$ l'idéal bilatère associé aux relations suivantes :

(a) $\cdots_1[x\alpha_1]\{\alpha_2\}\cdots_2 = \cdots_1[x]\{\alpha_1\alpha_2\}\cdots_2$,

(b) $\cdots_1\{\alpha_1\}[\alpha_2 x]\cdots_2 = \cdots_1\{\alpha_1\alpha_2\}[x]\cdots_2$,

(c) $(\cdots_1[x_1\mu x_2]\cdots_2) - (\cdots_1[x_1x_2]\cdots_2) = \cdots_1[x_1]\{1\}[x_2]\cdots_2$,

(d) $(\cdots_1\{\alpha_1\mu\alpha_2\}\cdots_2) - (\cdots_1\{\alpha_1\alpha_2\}\cdots_2) = \cdots_1\{\alpha_1\}[1]\{\alpha_2\}\cdots_2$.

Notons que $\mathcal{C}$ est engendré en tant qu'anneau par les éléments de la forme $\{\alpha\}$ et $\{\alpha_1\}[x]\{\alpha_2\}$. De plus, il a une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}]$-algèbre non commutative pour le morphisme d'anneaux $X \mapsto \{\lambda\}$ et $Y \mapsto \{\mu\}$. Par conséquent $\mathcal{C}/\mathcal{L}$ a également une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}]$-algèbre non commutative, induite par la composition $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}] \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{L}$.

Définition 16. La $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}]$-algèbre non commutative $\mathcal{C}/\mathcal{L}$ est appelée *algèbre des mots brisés de* K et notée $\mathfrak{W}(K)$.

Proposition 5. *Les $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}]$-algèbres non commutatives $\mathfrak{P}(K)$ et $\mathfrak{W}(K)$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}[X^{\pm1}, Y^{\pm1}]$-algèbres non commutatives,*

$$\mathfrak{P}(K) \cong \mathfrak{W}(K).$$

Démonstration. Dans la suite, $\mathcal{A}$ désigne l'anneau introduit dans la partie 2. Soit K' la copie parallèle de K. On choisit un point base $p' \in K' \setminus \{*\}$ de π. Tout chemin de K peut alors être déformé par homotopie comme dans la démonstration de la proposition 4 en un chemin dont les deux extrémités sont en p'. Cela permet de voir tout chemin $\gamma \in \mathcal{A}$ comme un lacet dans π.

On considère le morphisme d'anneaux $\phi : \mathcal{A} \to \mathfrak{W}(K)$ défini par :

$$\phi(\gamma) := \{1\}[\gamma]\{1\}$$
$$\phi(\alpha) := \{\alpha\},$$

où γ est un chemin de K et α est un élément de $\mathcal{A}$ de la forme $l^a \cdot \mu^b$.

ϕ envoie les relations (a), (b), (c) et (d) de la partie 2 sur :

(i) $\{1\}[1]\{1\} = \{\mu\} - \{1\}$,

(ii) $\{1\}[\mu\gamma]\{1\} = \{\mu\}[\gamma]\{1\}$ et $\{1\}[\gamma\mu]\{1\} = \{1\}[\gamma]\{\mu\}$,

(iii) $\{1\}[\lambda\gamma]\{1\} = \{\lambda\}[\gamma]\{1\}$ et $\{1\}[\gamma\lambda]\{1\} = \{1\}[\gamma]\{\lambda\}$,

(iv) $\{1\}[\gamma_1\mu\gamma_2]\{1\} - \{1\}[\gamma_1\gamma_2]\{1\} = \{1\}[\gamma_1]\{1\}[\gamma_2]\{1\}$.

qui découlent respectivement des relations (d), (a), (b) et (c) définissant $\mathcal{L}$.

ϕ passe par conséquent au quotient en un morphisme d'anneaux $\Phi : \mathfrak{P}(K) \to \mathfrak{W}(K)$. Ce morphisme est un isomorphisme. En effet, on construit son application réciproque $\Psi : \mathfrak{W}(K) \to \mathfrak{P}(K)$ de manière analogue. On voit dans la suite tout élément x de π comme un lacet en $p' \in K' \setminus \{*\}$, donc en particulier comme un chemin de K. En introduisant le morphisme d'anneaux $\psi : \mathcal{C} \to \mathfrak{P}(K)$ défini par

$$\psi(\{\alpha\}) := \alpha$$
$$\psi(\{1\}\,[\gamma]\,\{1\}) := \gamma,$$

on vérifie comme précédemment que ψ passe au quotient en un morphisme d'anneaux $\Psi : \mathfrak{W}(K) \to \mathfrak{P}(K)$, qui vérifie $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ et $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$.

Enfin, la définition de l'isomorphisme Φ assure que c'est un bien un morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives. Ceci conclut la démonstration. □

3.2. Algèbre des mots brisés et algèbre de groupe de π. On débute cette section par une remarque. La relation (d) assure que dans $\mathfrak{W}(K)$, on peut transformer tout mot brisé de longueur > 3 en une somme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de mots brisés de longueur $= 3$, s'écrivant sous la forme $\{1\}\,[x]\,\{1\}$. Cette observation motive la proposition suivante :

PROPOSITION 6. *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right] \oplus \mathbb{Z}[\pi] &\longrightarrow \mathfrak{W}(K) \\ (\lambda, 0) &\longmapsto \{\lambda\} \\ (0, x) &\longmapsto \{1\}\,[x]\,\{1\} \quad , \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right]$ -bimodules.

L'action de $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right]$ sur $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right] \bigoplus \mathbb{Z}[\pi]$ correspond à l'action de $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right]$ par multiplication sur chacun des termes de la somme directe, où λ est vu dans π comme la longitude de Seifert.

DÉMONSTRATION. Le morphisme f est bien un morphisme de $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right]$ -bimodules. Montrons déjà qu'il est surjectif. $\mathfrak{W}(K)$ est engendré en tant que $\mathbb{Z}$-module par les mots de la forme

$$\{\alpha_1\}\,[x_1] \cdots [x_n]\,\{\alpha_{n+1}\}\,.$$

Or d'après l'observation de ce début de section, un tel mot peut toujours être écrit comme une somme d'éléments de la forme $\{\alpha\}$ et $\{1\}\,[x]\,\{1\}$. Les éléments de la forme $\{1\}\,[x]\,\{1\}$ sont dans l'image de f. Pour conclure que f est surjective, il suffit donc de prouver que tous les $\{\alpha\}$ sont dans l'image de ϕ. Soient $b \geq 0$ et $a \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$\left\{\lambda^a \mu^b\right\} = \{\lambda^a\} + \sum_{i=0}^{b-1} \{\lambda^a\}\left[\mu^i\right]\{1\}\,,$$

et

$$\left\{\lambda^a \mu^{-b}\right\} = \{\lambda^a\} - \sum_{i=1}^{b} \{\lambda^a\}\left[\mu^{-i}\right]\{1\}\,,$$

qui sont bien dans l'image de f.

On va maintenant montrer que le morphisme f est injectif. Une démonstration naïve partant d'une égalité $f(a, b) = 0$ pour prouver que $(a, b) = 0$ ne fonctionne pas ici. L'idée va être de munir $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right] \oplus \mathbb{Z}[\pi]$ d'une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative, en transportant la multiplication de $\mathfrak{W}(K)$ à travers f, qui transformera f en morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative. Son inverse apparaîtra alors naturellement.

Commençons par définir la structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right] \oplus \mathbb{Z}[\pi]$. On définit la multiplication comme

$$(\lambda^a, x_1) * (\lambda^b, x_2) =:= (\lambda^a \lambda^b, \lambda^a x_2 + x_1 \lambda^b + x_1 \mu x_2 - x_1 x_2) \ .$$

On vérifie que cela munit bien $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right] \oplus \mathbb{Z}[\pi]$ d'une structure d'anneau, d'unité $(1, 0)$. Alors, la structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}] &\longrightarrow \mathbb{Z}\left[l^{\pm 1}\right] \oplus \mathbb{Z}[\pi] \\ X &\longmapsto (\lambda, 0) \\ Y &\longmapsto (1, 1) \ . \end{aligned}$$

Notons que cette structure concorde bien avec la structure de $\mathbb{Z}\left[\lambda^{\pm 1}\right]$-bimodule et que $(1, 1)$ est bien inversible d'inverse $(1, -\mu^{-1})$. On vérifie également que le morphisme f est un morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives.

Construisons maintenant l'isomorphisme réciproque de f. On a envie de construire un morphisme qui envoie en particulier $\{1\}\,[x]\,\{1\}$ sur $(0, x)$ et $\{\lambda\}$ sur $(\lambda, 0)$. Pour tout $x \in \pi$, on pose

$$g(x) := (0, x) \ ,$$

pour tout $\alpha = \lambda^a \mu^b$ avec $b \geq 0$,

$$g(\alpha) := (\lambda^a, \lambda^a \sum_{i=0}^{b-1} \mu^i)$$

et pour tout $\alpha = \lambda^a \mu^{-b}$ avec $b \geq 0$,

$$g(\alpha) := (\lambda^a, -\lambda^a \sum_{i=1}^{b} \mu^i) \ .$$

On vérifie que $g(\alpha_1 \alpha_2) = g(\alpha_1) * g(\alpha_2)$ pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \hat{\pi}$. On définit alors

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{Z}\left[l^{\pm 1}\right] \oplus \mathbb{Z}[\pi] \\ \{\alpha_1\}\,[x_1] \cdots [x_n]\,\{\alpha_{n+1}\} &\longmapsto g(\alpha_1) * g(x_1) * \cdots * g(x_n) * g(\alpha_{n+1}) \ . \end{aligned}$$

Cela définit bien un morphisme d'anneaux d'après l'égalité $g(\alpha_1 \alpha_2) = g(\alpha_1) * g(\alpha_2)$. Reste à voir qu'il passe aux relations définissant $\mathfrak{W}(K)$.

Pour la relation (d) :

$$\begin{aligned} \{\mu\} - \{1\} &\longmapsto (1, 1) - (1, 0) = (0, 1) \\ \{1\}\,[1]\,\{1\} &\longmapsto (0, 1) \ . \end{aligned}$$

Pour la relation (c) :

$$\begin{aligned} \{1\}\,[x_1 \mu x_2]\,\{1\} - \{1\}\,[x_1 x_2]\,\{1\} &\longmapsto (0, x\mu y) - (0, xy) \\ \{1\}\,[x_1]\,\{1\}\,[x_2]\,\{1\} &\longmapsto (0, x) * (0, y) = (0, x\mu y - xy) \ . \end{aligned}$$

Traitons un cas particulier des relations (a) et (b) qui se généralisera facilement. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\{\lambda^a\mu^b\}\,[x]\,\{1\}) &= g(\lambda^a\mu^b) * g(x) \\ &= (\lambda^a, \lambda^a \sum_{i=0}^{b-1} \mu^i) * (0, x) \\ &= (0, \lambda^a x + \lambda^a \sum_{i=0}^{b-1} \mu^i \mu x - \lambda^a \sum_{i=0}^{b-1} \mu^i x) \\ &= (0, \lambda^a\mu^b x)\ ,\end{aligned}$$

et

$$\tilde{g}(\{1\}\,[\lambda^a\mu^b x]\,\{1\}) = (0, \lambda^a\mu^b x)\ .$$

Les relations (a) et (b) sont donc également bien vérifiées.

Les formules définissant $\tilde{g}$ assurent alors que f est bien un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\lambda^{\pm 1}]$-bimodules, d'inverse $\tilde{g}$.

□

Le résultat de la proposition précédente permet d'obtenir $\mathfrak{W}(K)$ comme sous-anneau de $\mathbb{Z}[\pi]$. C'est ce qui est décrit dans la proposition qui suit. On note $\mu - 1$ l'application $\mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}[\pi]$ correspondant à la multiplication à droite par $\mu - 1$, et $A := \mathbb{Z}[\pi]$. Notons que A est muni d'une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative induite par le morphisme $\hat{\pi} \to \pi$, qui envoie X sur λ et Y sur μ. On note enfin $\hat{A}$ l'image de $\mathbb{Z}[\hat{\pi}]$ dans A.

Proposition 7. *Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. Soit $\hat{A} + A(\mu - 1)$ le sous-anneau de A engendré par $\hat{\pi}$ et $\mathrm{Im}(\mu - 1)$. Alors il existe un morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives $\psi : \mathfrak{W}(K) \to \hat{A} + A(\mu - 1)$ qui vérifie*

$$\psi(\{\alpha\}) = \alpha \text{ et } \psi(\{1\}\,[x]\,\{1\}) = x\mu - x.$$

Si le morphisme $\hat{\pi} \to \pi$ est injectif, ψ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives.

La structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur $\hat{A} + A(\mu - 1)$ est celle induite par la structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur $\mathbb{Z}[\pi]$.

Démonstration. On considère le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{C} &\longrightarrow A \\ \{\alpha_1\}\,[x_1]\,\{\alpha_2\}\ldots\{\alpha_n\}\,[x_n]\,\{\alpha_{n+1}\} &\longmapsto \alpha_1 x_1 \alpha_2(\mu - 1)x_2 \cdots x_n \alpha_{n+1}(\mu - 1)\ .\end{aligned}$$

On vérifie que le morphisme ψ est en plus un morphisme d'anneaux. Il a pour image $\hat{A} + A(\mu - 1)$ donc est surjectif.

Ce morphisme annule bien les relations définissant $\mathcal{L}$: il passe donc au quotient en un morphisme d'anneaux surjectif $\psi : \mathfrak{W}(K) \to \hat{A} + A(\mu - 1)$. L'application ψ est même un morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives. Par définition, elle vérifie les égalités

$$\psi(\{\alpha\}) = \alpha \text{ et } \psi(\{1\}\,[x]\,\{1\}) = x\mu - x.$$

On suppose maintenant que $\hat{\pi} \to \pi$ est injectif. La proposition 6 assure que tout élément w de $\mathfrak{W}(K)$ s'écrit sous la forme :

$$w = \sum_i a_i\,\{\lambda^i\} + \sum_j b_j\,\{1\}\,[x_j]\,\{1\}\,,$$

où $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ et $x_j \in \pi$. Soient donc $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ et $x_j \in \pi$ tels que

$$0 = \psi(\sum_i a_i \{\lambda^i\} + \sum_j b_j \{1\}[x_j]\{1\}) = \sum_i a_i \lambda^i + \sum_j b_j x_j(\mu - 1) \ .$$

On dispose du morphisme de groupe $\mathrm{lk} : \pi \to \mathbb{Z}$, introduit dans la section 2.3 du chapitre précédent, tel que $\mathrm{lk}(\mu) = 1$ et $\mathrm{lk}(\lambda) = 0$. Soit x_j l'élément de π de lk maximal. Alors, nécessairement μx_j correspond à un λ^i. En particulier, $\mathrm{lk}(\mu x_j) = 1 + \mathrm{lk}(x_j) = 0$. Soit maintenant x_k de lk minimal. Nécessairement, x_k correspond à un λ^i, donc $\mathrm{lk}(x_k) = 0$. Mais $\mathrm{lk}(x_j) \geq \mathrm{lk}(x_k)$. C'est absurde. Nécessairement, $b_j = 0$ pour tout j, et comme la famille (λ^i) est libre d'après la proposition précédente, $a_i = 0$ pour tout i. D'où l'injectivité. □

COROLLAIRE 2. *En particulier, lorsque K est un noeud non trivial de $\mathbb{R}^3$, $H_0^{string}(K)$ et $\hat{A} + A(\mu - 1)$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives.*

4. En résumé

Résumons avant de poursuivre les relations entre les différentes notions et les résultats introduits jusqu'ici. On a commencé par définir la notion de corde brisée d'un noeud K et l'invariant $H_0^{string}(K)$. Cet invariant admet une reformulation relativement simple en considérant la $\mathbb{Z}$-algèbre engendrée en tant que $\mathbb{Z}$-module libre par les classes d'homotopies de cordes brisées génériques. Il apparaît alors qu'en déformant une corde brisée générique par homotopie, on peut ramener toutes les extrémités des composantes d'une corde brisée en un même point et imposer une dérivée à chaque extrémité. La corde brisée vue ainsi admet naturellement une interprétation en terme de mots brisés en $\hat{\pi}$ et π, et les relations géométriques définissant $H_0^{string}(K)$ se transportent sur des relations algébriques simples dans l'algèbre engendrée par les mots brisés.

Plutôt que de reformuler directement $H_0^{string}(K)$ en terme de mots brisés, on le relie en premier lieu à l'algèbre de chemins de K. Historiquement, c'est en en effet à partir de cet invariant qu'a été défini l'homologie de cordes. Il a de plus été démontré qu'il contient de nombreux invariants déjà connus du noeud. On peut consulter à ce sujet [**Ng12**].

On introduit en sus le concept de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative, qui est la structure naturelle permettant de garder l'information sur le le couple périphérique (λ, μ) du noeud. $H_0^{string}(K)$ peut alors être reformulé comme sous-$\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative de $\mathbb{Z}[\pi]$, lorsque $K \neq U$.

5. Applications

5.1. Quelques propriétés supplémentaires des groupes de noeud. On commence cette partie par une série de résultats sur les groupes de noeuds et leurs algèbres de groupe, qui nous serviront à prouver que $H_0^{string}(K)$ détecte certains noeuds et certaines propriétés des noeuds.

PROPOSITION 8. *Soient $0 < p < q$ premiers entre eux et $T := T_{p,q}$ le (p,q)-noeud torique. Alors le centre de son groupe de noeud π_T est égal à*

$$\mathrm{Z}(\pi_T) = \langle \mu_T^{pq} \lambda_T \rangle.$$

De plus, le centre du groupe de noeud de tout noeud qui n'est pas équivalent à un noeud torique est trivial.

PROPOSITION 9. *Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe des éléments $v \in \hat{\pi}_K$ et $g \in \pi_K \backslash \hat{\pi}_K$ tels que $vg = gv$.

(ii) K est un (p,q)-noeud câblé ou est composé.

De plus, s'il existe des éléments $v \in \hat{\pi}_K$ et $g \in \pi_K \backslash \hat{\pi}_K$ tels que $vg = gv$, on connaît la forme de v :

(a) Si K est un noeud composé, v est une puissance de μ_K.

(b) Si K est un (p,q)-noeud câblé, v est une puissance de $\mu_K^{pq}\lambda_K$.

Enfin, si K est un noeud composé (resp. un (p,q)-noeud câblé), il existe $g \in \pi_K \backslash \hat{\pi}_K$ tel que $g\mu = \mu g$ (resp. $g\mu_K^{pq}\lambda_K = \mu_K^{pq}\lambda_K g$).

On conclut cette section par une proposition sur l'algèbre de groupe d'un groupe de noeud :

TERMINOLOGIE. Soit K un noeud de $\mathbb{R}^3$. On appelle *algèbre du groupe de noeud de K* l'algèbre de groupe du groupe π_K.

PROPOSITION 10. *Les algèbres de groupes de noeud sont intègres.*

5.2. L'homologie de cordes détecte le noeud trivial. On commence par démontrer que l'homologie de cordes de degré 0 détecte le noeud trivial U. Plus précisément :

THÉORÈME 4. *Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. Alors la multiplication à gauche par $\lambda - 1$ dans $H_0^{string}(K)$ est injective si et seulement si K n'est pas trivial.*

DÉMONSTRATION. On utilise dans cette démonstration la description $\mathfrak{W}(K)$ de $H_0^{string}(K)$. Si $K = U$ alors $\lambda = 1$ dans π_K donc

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)\{1\}[1]\{1\} &= \{\lambda\}[1]\{1\} - \{1\}[1]\{1\} \\ &= \{1\}[\lambda]\{1\} - \{1\}[1]\{1\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\{1\}[1]\{1\}$ est bien $\neq 0$ d'après la proposition 6. Supposons maintenant $K \neq U$. La proposition 7 assure que $H_0^{string}(K)$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[\pi]$, qui est intègre. De plus, d'après la proposition 2, $\lambda \neq 1$ dans $\mathbb{Z}[\pi]$. Nécessairement la multiplication par $\lambda - 1$ est injective. □

5.3. L'homologie de cordes détecte les noeuds toriques.

THÉORÈME 5. *Soient K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$ et $T_{p,q}$ le (p,q)-noeud torique. Si $H_0^{string}(K) \cong H_0^{string}(T_{p,q})$ en tant que $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives alors K est équivalent à $T_{p,q}$ en tant que noeud orienté.*

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce résultat est fondé sur les résultats des propositions 8 et 10. La description de la proposition 7 de $H_0^{string}(K)$ comme sous-anneau de $\mathbb{Z}[\pi]$ est utilisée ici. Enfin, on note $T := T_{p,q}$ dans la suite de la démonstration. Comme $H_0^{string}(K)$ détecte le noeud trivial on suppose sans perte de généralités que K n'est pas le noeud trivial. On note dans la suite $\mathfrak{R}_i := \hat{A}_i + A_i(\mu_i - 1)$.

Par définition, il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives

$$\psi : \mathfrak{R}_K \xrightarrow{\sim} \mathfrak{R}_T,$$

tel que $\psi(\mu_K) = \mu_T$ et $\psi(\lambda_K) = \lambda_T$. On pose de plus

$$\phi_K := \mu_K^{pq}\lambda_K \text{ et } \phi_T := \mu_T^{pq}\lambda_T.$$

Alors $\psi(\phi_K) = \phi_T$.

On commence par démontrer que K est un noeud torique. Supposons que K n'est pas un noeud torique. Alors le centre de son groupe de noeud est trivial. Donc il existe $\gamma \in \pi_K$ tel que $\gamma\phi_K \neq \phi_K\gamma$. Mais comme ϕ_T est central dans $\mathfrak{R}_T$, ϕ_K l'est dans $\mathfrak{R}_K$ via l'isomorphisme ψ. En particulier, comme $(\mu_K - 1)\gamma$ est dans $\mathfrak{R}_K$, $(\mu_K - 1)\gamma\phi_K = \phi_K(\mu_K - 1)\gamma$, soit $(\mu_K - 1)(\gamma\phi_K - \phi_K\gamma) = 0$. Mais les algèbres de groupe de noeuds n'admettent pas de diviseurs de zéros. C'est absurde. Donc le centre de π_K est non vide, ce qui implique que K est un noeud torique.

Soient donc p' et q' tels que $K = T_{p',q'}$. En premier lieu, on démontre que $p'q' = pq$. On a vu dans le paragraphe précédent que $\mu_K^{pq}\lambda_K$ est un élément du centre de π_K. Mais ce centre est exactement : $\mathrm{Z}(\pi_K) = \langle \mu_K^{p'q'}\lambda_K \rangle$. Nécessairement, $p'q' = pq$. Le fait que $p = p'$ et $q = q'$ découle des deux articles [**Cor13a**] et [**Cor13b**] de Cornwell. Dans ces articles, est associé à toute classe d'équivalence de noeud orienté, un polynôme en deux variables, qui se déduit de l'homologie de cordes de degré 0. Dans le cas particulier des (a, b)-noeuds toriques, le plus petit degré du terme non constant de ce polynôme est $ab - b + 1$. Ici, comme K et T ont même homologie de cordes de degré 0, $p'q' - q' + 1 = pq - q + 1$. Donc $q = q'$ et $p = p'$. Ce qui conclut la démonstration. □

5.4. L'homologie de cordes détecte les (p,q)-noeuds câblés et les noeuds composés.

THÉORÈME 6. *Soient K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$ et $C_{p,q}(J)$ un (p, q)-noeud câblé sur un noeud J. Si $H_0^{string}(K) \cong H_0^{string}(C_{p,q}(J))$ en tant que $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives alors il existe $0 < p' < q'$ premiers entre eux et J' un noeud tel que $K \cong C_{p',q'}(J')$ et $p'q' = pq$.*

DÉMONSTRATION. Comme dans la démonstration précédente, on suppose que K n'est pas le noeud trivial. On note de plus $T := C_{p,q}(J)$, et ψ l'isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives entre $H_0^{string}(K)$ et $H_0^{string}(C_{p,q}(J))$.

Soit g un élément de π_T tel que $\mu_T^{pq}\lambda_T g = g\mu_T^{pq}\lambda_T$. Alors, cette égalité est également vraie dans $\mathbb{Z}[\pi_T]$ et implique que

$$(\mu_T - 1)g\mu_T^{pq}\lambda_T = \mu_T^{pq}\lambda_T(\mu_T - 1)g.$$

Soit $a := \psi((1 - \mu_T)g)$. L'égalité précédente s'écrit dans $\mathbb{Z}[\pi_K]$ comme

$$a\mu_K^{pq}\lambda_K = \mu_K^{pq}\lambda_K a.$$

Or, a s'écrit sous la forme

$$a := z + \sum_{i=1}^{n} b_i w_i,$$

où $z \in \mathbb{Z}[\hat{\pi}_K]$ et pour tout i, $a_i \in \mathbb{Z}$ et $w_i \in \pi_K \backslash \hat{\pi}_K$. Comme $\mu_K^{pq}\lambda_K$ et z commutent,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mu_K^{pq}\lambda_K w_i - w_i\mu_K^{pq}\lambda_K).$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\mu_K^{pq}\lambda_K)^k w_1 = w_1(\mu_K^{pq}\lambda_K)^k$. Comme $w_1 \notin \hat{\pi}_K$, la proposition 9 implique que K est un (p', q')-noeud câblé. Le même raisonnement que dans le début du dernier paragraphe de la démonstration du théorème 5 implique alors que $p'q' = pq$. □

Nous énonçons un dernier résultat sans démonstration, celle-ci étant similaire à la démonstration du théorème précédent :

THÉORÈME 7. *Soient K un noeud orienté et J un noeud composé de $\mathbb{R}^3$. Si $H_0^{string}(K) \cong H_0^{string}(J)$ en tant que $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives alors K est composé.*

6. Homologie de cordes simple en degré quelconque

On va construire dans le chapitre 5 une algèbre différentielle graduée $C(\mathscr{R})$ associée au fibré conormal en sphère Λ_K d'un noeud K, avec les outils de la géométrie de contact : on appellera son homologie, *l'homologie de contact de noeud simple* de K. Historiquement, l'homologie de cordes a été construite après l'homologie de contact. En fait, la notion de cordes brisées a été choisie expressément car elle a un lien étroit avec les disques holomorphes définissant l'homologie de contact. On prouvera dans le chapitre 5 que l'homologie de cordes et de contact de degré 0 sont isomorphes. On construit dans ce but une algèbre différentielle graduée $C(\Sigma)$ dont la différentielle prolonge les opérations de cordes δ_N et δ_Q et dont l'homologie de degré 0 est exactement $H_0^{string}(K)$.

Cela nous permet de définir dans le chapitre 5 un morphisme d'algèbres différentielles graduées $\Phi : C(\mathscr{R}) \to C(\Sigma)$ qui induit l'isomorphisme souhaité entre les homologies de degré 0.

On renvoie à la partie 5 de l'article [**CELN16**] pour une construction plus détaillée.

6.1. Définition de l'homologie de cordes simple du noeud K. On souhaite donc définir dans cette partie une algèbre différentielle graduée $C(\Sigma)$ dont le 0-ème groupe d'homologie est $H_0^{string}(K)$. On la construit à partir de générateurs de degrés 0, 1 et 2. Cela tient principalement au fait que pour une k-chaîne de cordes brisées avec $k \geq 3$, il est plus ardu de trouver une bonne définition de généricité que dans les cas 0, 1 et 2.

En premier lieu, de même qu'on a défini la notion de généricité pour des 0-chaînes et des 1-chaînes de cordes brisées, on peut définir une notion idoine de *2-chaînes génériques de cordes brisées*. C'est une application $s : \Delta_2 \to \Sigma$ qui vérifie certaines conditions de transversalité pour la variété à bord Δ_2 et telle que les lieux d'intersection de chaque Q-corde ou N-corde de s^λ avec K sont suffisamment sympathiques. On peut alors définir sur le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les 2-chaînes génériques $C_2(\Sigma)$ des opérateurs d'insertion de piques

$$\delta_N, \delta_Q : C_2(\Sigma^l) \longrightarrow C_1(\Sigma^{l+1}) \ ,$$

qui vérifient l'égalité suivante

$$(\partial + \delta_Q + \delta_N)^2 = 0 \ .$$

Intéressons-nous maintenant à la définition du produit entre i-chaînes pour $i \leq 2$. Le produit d'une 0-chaîne avec une i-chaîne correspond à la concaténation en x_0 et est toujours bien défini. La concaténation en x_0 permet également de définir un produit

$$\times : C_1(\Sigma^l) \times C_1(\Sigma^{l'}) \longrightarrow C_2(\Sigma^{l+l'}) \ ,$$

où on applique la subdivision classique de $\Delta_1 \times \Delta_1$ en deux 2-simplexes Δ_2.

On définit alors $C_d(\Sigma^l)$ pour $d > 2$ comme le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les mots de la forme $S_1 \times \cdots \times S_r$ où pour tout i, $S_i \in C_{d_i}(\Sigma^{l_i})$ avec $0 \leq d_i \leq 2$, $\sum_{i=1}^r d_i = d$ et $\sum_{i=1}^r l_i = l$, quotienté par le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par

$$S_1 \times \cdots \times S_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_r - S_1 \times \cdots \times (S_i \times S_{i+1}) \times \cdots \times S_r \ ,$$

où S_i et S_{i+1} sont des chaînes dont la somme des degrés est ≤ 2.

L'application $D := \partial + \delta_Q + \delta_N$ est ensuite définie sur

$$C_d(\Sigma) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_d(\Sigma^l) \ ,$$

par la règle de Leibniz. Cette définition assure en particulier qu'on a bien $D^2 = 0$.

Le produit $\times$ et l'application D induisent une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée sur $C_*(\Sigma)$. Son homologie est appelée *homologie de cordes simple* de K,

$$H_*^{string}(K) := H_*(C_*(\Sigma), D) \ .$$

L'algèbre différentielle graduée $C(\Sigma)$ est bien un invariant du noeud orienté K, une isotopie entre deux noeuds K et K' induisant l'isomorphisme entre leurs deux algèbres différentielles graduées.

6.2. La filtration sur $C(\Sigma)$. On conclut cette partie en introduisant une filtration sur $C(\Sigma)$. Elle s'avérera déterminante dans la démonstration de l'isomorphisme entre les homologies de cordes et de contact de degré 0.

Définissons la longueur d'une corde brisée $s = (s_1, \dots, s_{2l+1})$ comme la somme des longueurs des Q-cordes,

$$L(s) := \sum_{i=1}^{l} L(s_{2i}),$$

où on n'inclut pas dans la somme les Q-cordes qui sont des piques. La longueur d'une k-chaîne générique $S : K \to \Sigma$ est alors définie comme

$$L(S) := \max_{k \in K} \left(L(S(k)) \right) \ .$$

Cela définit une filtration des $C_i(\Sigma)$ par les sous-espaces

$$\mathscr{F}^l C_i(\Sigma) := \left\{ \sum a_j S_j \in C_i(\Sigma), L(S_j) \leq l \text{ si } a_j \neq 0 \right\} \ ,$$

c'est-à-dire, pour tout $k \leq l$,

$$\mathscr{F}^k C_i(\Sigma) \subset \mathscr{F}^l C_i(\Sigma)$$

et

$$D\left(\mathscr{F}^l C_i(\Sigma)\right) \subset \mathscr{F}^l C_{i-1}(\Sigma) \ .$$

Chapitre 3

Homologie de cordes améliorée

L'homologie de cordes simple détecte le noeud trivial, les noeuds toriques et les noeuds câblés et composés. Cependant, on ne sait pas si $H_0^{string}(K)$ ou l'intégralité de l'homologie de cordes simple est un invariant complet de noeud. Bien que $H_0^{string}(K)$ garde trace du couple périphérique du noeud, on n'est pas parvenu à ce jour à recouvrer l'intégralité du groupe de noeud à partir de sa structure, ce qui assurerait par le théorème 3 qu'il forme un invariant complet de noeud.

L'homologie de cordes simple a été construite afin de donner une formulation du point de vue de la topologie des cordes, à l'homologie de contact legendrienne du fibré conormal en sphère Λ_K du noeud K. Dans [**She16**], a en fait été démontré que Λ_K constitue un invariant complet de noeud. Sa démonstration utilise la théorie des faisceaux microlocaux et a fait apparaître l'idée suivante : on peut espérer obtenir un invariant complet de noeud en rajoutant un point q dans $\mathbb{R}^3\backslash K$ et en autorisant une corde brisée à avoir des extrémités sur ce point.

On introduit dans ce chapitre une généralisation de la notion de cordes brisées, en considérant les cordes brisées du couple (K, q). On définit dans la dernière partie une nouvelle algèbre différentielle graduée dont la différentielle est constituée des opérations de cordes δ_Q et δ_N, ainsi que de deux nouvelles opérations associées au point q. $C(\Sigma)$ peut notamment être retrouvée à partir de cette nouvelle algèbre différentielle graduée. Nous montrons alors qu'en considérant trois morceaux de cette nouvelle homologie ainsi qu'un produit particulier, on obtient un invariant complet de noeud, en la personne du quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$, où R_{KK} est le $H_0^{string}(K)$ du chapitre précédent.

Plutôt que d'adopter le point de vue abscons d'une algèbre différentielle graduée dans les premières sections, nous introduisons le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ de manière plus naïve et géométrique. Nous montrons que comme pour $H_0^{string}(K)$, il admet une reformulation sympathique avec le formalisme des chemins puis celui des mots brisés. En le reliant finalement à des sous-structures de l'algèbre de groupe de noeud $\mathbb{Z}[\pi]$, on démontre que le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ contient le système périphérique (π, λ, μ) du noeud et en constitue donc un invariant complet.

Ce chapitre suit les grandes lignes de l'article [**ENS16**].

1. Cordes brisées

On note dans la suite $Q := \mathbb{R}^3$. Soient K un noeud orienté de Q et q un point de $\mathbb{R}^3\backslash K$. On choisit un voisinage tubulaire N de K et B un voisinage tubulaire de q : on voit N comme un tore qu'on a enroulé sur lui-même le long de K et B comme une boule de centre q. On fixe de plus un point base $x_0 \in \partial N$ et un vecteur $v_0 \in T_{x_0}\partial N$, ainsi qu'un point base $x_1 \in \partial B$ et un vecteur $v_1 \in T_{x_1}\partial B$.

1.1. Cordes brisées du couple (K, q). On définit, comme dans la partie 1 du chapitre 2, les *cordes brisées* associées au couple (K, q), en autorisant cette fois les *brisures* à avoir lieu sur K ou en q.

Terminologie. On appelle dans la suite *N-corde* (resp. *Q-corde*, *B-corde*) la donnée d'une application de classe C^1 d'un segment I à valeurs dans N (resp. Q, B). Un élément d'une de ces trois classes d'applications est appelé *corde*.

DÉFINITION 17. On appelle *corde brisée à n composantes* du couple (K, q), la donnée de n nombres réels $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ et de n cordes $s_1, \ldots, s_n$ vérifiant les conditions suivantes :

Point de départ - s_1 a l'une des deux propriétés suivantes :

(i) s_1 est une N-corde telle que
$$s_1(0) = x_0 \text{ et } \dot{s}_1(0) = v_0.$$

(ii) s_1 est une B-corde telle que
$$s_1(0) = x_1 \text{ et } \dot{s}_1(0) = v_1.$$

Raccordement et nature des cordes - Pour tout $k \leq n-1$,
$$s_k(a_k) = s_{k+1}(a_k)$$
et la nature des cordes est déterminée par la règle inductive suivante :

(i) Si s_k est une N-corde alors s_{k+1} est une Q-corde et $s_k(a_k) \in K$.

(ii) Si s_k est une B-corde alors s_{k+1} est une Q-corde et $s_k(a_k) = q$.

(iii) Si s_k est une Q-corde alors, soit $s_k(a_k) \in K$ et s_{k+1} est une N-corde, soit $s_k(a_k) = q$ et s_{k+1} est une B-corde.

Point d'arrivée - s_n a l'une des deux propriétés suivantes :

(i) s_n est une N-corde telle que
$$s_n(a_n) = x_0 \text{ et } \dot{s}_n(a_n) = v_0.$$

(ii) s_1 est une B-corde telle que
$$s_n(a_n) = x_1 \text{ et } \dot{s}_n(a_n) = v_1.$$

Le n-uplet $s := (s_1, \ldots, s_n)$ est désigné comme la *corde brisée* s et peut alors être vu comme une application continue d'après les conditions de raccordement ci-dessus.

Dérivées aux brisures Les conditions suivantes sont imposées aux points de brisure de s, où la notation $(\cdot)^{\text{normal}}$ est la même que dans la définition 9 :

(a) Si s passe de N à Q en a_k alors
$$(\dot{s}_k(a_k))^{\text{normal}} = (\dot{s}_{k+1}(a_k))^{\text{normal}}.$$

(b) Si s passe de B à Q en a_k alors
$$\dot{s}_k(a_k) = \dot{s}_{k+1}(a_k).$$

(c) Si s passe de Q à N en a_k alors
$$(\dot{s}_k(a_k))^{\text{normal}} = -(\dot{s}_{k+1}(a_k))^{\text{normal}}.$$

(d) Si s passe de Q à B en a_k alors
$$\dot{s}_k(a_k) = -\dot{s}_{k+1}(a_k).$$

TERMINOLOGIE. On répartit les cordes brisées en quatre ensembles, en fonction de leur extrémités initiale et finale. Si $s(0) = s(a_n) = x_0$ alors s est appelée *KK-corde brisée*. Si $s(0) = x_0$ et $s(a_n) = x_1$ alors s est appelée *Kq-corde brisée*. On définit de même les *qK-cordes brisées* et les *qq-cordes brisées*

REMARQUE. Quelles sont les motivations derrière chacune des conditions de la définition 17 ?

(i) Les conditions en a_0 et a_n assurent à nouveau que l'on peut concaténer les cordes brisées entre elles, cette fois sous réserve que les extrémités coïncident.

(ii) Les conditions sur les dérivées aux points de brisure modélisent à nouveau le comportement de disques holomorphes en leurs pointes d'intersection lagrangienne, que nous introduirons dans le chapitre 6.

Un exemple de corde brisée de (K, q) est représenté sur la figure 1. Les changements sont représentés par des croix noires, les Q-cordes par les portions bleues, les N-cordes par les portions rouges et les B-cordes par les portions vertes.

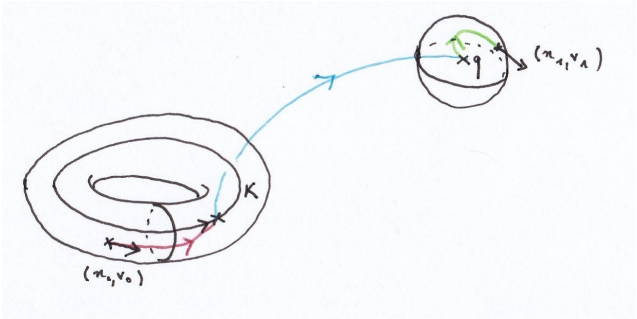


FIGURE 1. Un exemple de corde brisée de (U, q)

DÉFINITION 18. Pour tout $n \geq 1$ et tout $l \in \mathbb{N}$, on note $\Sigma_{n,l}^{KK}$ (resp. $\Sigma_{n,l}^{qK}$, $\Sigma_{n,l}^{Kq}$, $\Sigma_{n,l}^{qq}$) l'ensemble des KK-cordes brisées (resp. qK-cordes brisées, Kq-cordes brisées, qq-cordes brisées) à n changements dont l changements en q.

On note dans la suite $\Sigma_{n,l}^{ij}$ lorsqu'il n'est pas besoin de spécifier les $i, j \in \{K, q\}$.

On achève cette section par la définition de la bonne notion de famille à 1-paramètre de cordes brisées :

DÉFINITION 19. Une *1-chaîne de ij-cordes brisées à n changements dont l changements en q* est la donnée, pour tout $\lambda \in [0,1]$ d'un élément $s^\lambda := (s_1^\lambda, \ldots, s_n^\lambda) \in \Sigma_{n,l}^{ij}$, tel que, n, l et ij ne dépendent pas de λ pour tout k et l'application

$$\begin{aligned} [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow Q \text{ (resp. } N, B) \\ (t, \lambda) &\longmapsto s_k^\lambda((1-t)a_{k-1}^\lambda + ta_k^\lambda) \end{aligned}$$

est de classe C^1.

1.2. Généricité. On souhaite maintenant définir sur les 1-chaînes de cordes brisées, des opérations associées aux instants où l'une des composantes rencontre K ou q. On introduit à cet effet une nouvelle notion de *généricité* de cordes brisées :

DÉFINITION 20. Une corde brisée $s := (s_1, \ldots, s_n)$ est dite *générique* lorsqu'elle satisfait les deux conditions suivantes :

(a) Pour un changement sur K (resp. q) au point de brisure a_k, $\dot{s}_k(a_k)$ n'est pas tangente à K (resp. est non nulle).

(b) Les Q-cordes et les N-cordes de s ne rencontrent pas K en-dehors de leurs extrémités.

DÉFINITION 21. Une 1-chaîne de cordes brisées,

$$\lambda \in [0,1] \mapsto s^\lambda = (s_1^\lambda, \ldots, s_n^\lambda) \in \Sigma_{n,l}^{ij} \ ,$$

est dite *générique* lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) s^0 et s^1 sont des cordes brisées génériques,

(b) Pour tout changement sur K (resp. q) au point de brisure a_k^λ, $\dot{s}_k^\lambda(a_k^\lambda)$ n'est pas tangente à K (resp. est non nulle).

(c) Pour toute sous-famille de Q-cordes (resp. de N-cordes) s_k^λ, l'application

$$\begin{aligned}]0,1[\times]0,1[&\longrightarrow Q \text{ (resp. } N) \\ (t,\lambda) &\longmapsto s_k^\lambda((1-t)a_{k-1}^\lambda + ta_k^\lambda) \end{aligned}$$

intersecte K transversalement en un nombre fini de points.

Les conditions relatives à K et aux N-cordes et aux Q-cordes sont les mêmes que dans le chapitre précédent, car la démarche adoptée est la même : on va définir dans la section suivante les opérations de cordes δ_Q^K et δ_N^K, puis réinterpréter le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}), défini par ces opérations, du point de vue des chemins.

En fait, nous définirons également les opérations de cordes δ_Q^p et δ_N^p dans la partie 5. Elles associent à une *2-chaîne générique de cordes brisées* une somme signée de cordes brisées génériques, en insérant des B-piques et des Q-piques aux points d'intersection de la famille avec q. Les deux définitions ci-dessus qui sont presque identiques à celles du chapitre précédent, devraient être légèrement modifiées pour introduire rigoureusement les opérations δ_Q^p et δ_N^p mais nous n'en avons pas besoin pour la définition de notre invariant et ne les introduisons donc pas rigoureusement.

1.3. Les opérations de cordes δ_Q^K et δ_N^K. Soient $C_0^{ij}(\Sigma_{n,l})$ (resp. $C_1^{ij}(\Sigma_{n,l})$) le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les ij-cordes brisées génériques à n changements dont l changements en q (resp. 1-chaînes génériques de ij-cordes brisées à n changements dont l changements en q). Pour $k = 0, 1$ on pose

$$C_k^{ij}(\Sigma_l) := \bigoplus_{n=l}^{\infty} C_k^{ij}(\Sigma_{n,l}).$$

On définit alors δ_Q^K et δ_N^K exactement de la même manière que le Q-coproduit et le N-coproduit du chapitre précédent, de sorte que chacun laisse les B-cordes de s^λ inchangées. On dispose également toujours de l'opérateur de bord classique ∂,

$$\partial(s^\lambda) := s^1 - s^0.$$

1.4. Définition du triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}). Dans cette section nous considérons les $\mathbb{Z}$-modules $C_0^{KK}(\Sigma_0)$, $C_1^{KK}(\Sigma_0)$, $C_0^{qK}(\Sigma_1)$, $C_1^{qK}(\Sigma_1)$, $C_0^{Kq}(\Sigma_1)$ et $C_1^{Kq}(\Sigma_1)$. La concaténation de cordes brisées en x_0 définit les structures suivantes sur ces $\mathbb{Z}$-modules :

(i) Une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur $C_0^{KK}(\Sigma_0)$.

(ii) Une structure de $C_0^{KK}(\Sigma_0)$-bimodule sur $C_1^{KK}(\Sigma_0)$.

(iii) Une structure de $C_0^{KK}(\Sigma_0)$-module à gauche sur $C_1^{Kq}(\Sigma_1)$ et $C_1^{Kq}(\Sigma_1)$.

(iv) Une structure de $C_0^{KK}(\Sigma_0)$-module à droite sur $C_1^{qK}(\Sigma_1)$ et $C_1^{qK}(\Sigma_1)$.

Alors les opérations ∂, δ_Q^K et δ_N^K définissent des applications qui sont respectivement $C_0^{KK}(\Sigma_0)$-bilinéaire, $C_0^{KK}(\Sigma_0)$-linéaire à gauche et $C_0^{KK}(\Sigma_0)$-linéaire à droite :

$$\begin{aligned} \partial + \delta_N^K + \delta_Q^K &: C_1^{KK}(\Sigma_0) \longrightarrow C_0^{KK}(\Sigma_0) \ , \\ \partial + \delta_N^K + \delta_Q^K &: C_1^{Kq}(\Sigma_1) \longrightarrow C_0^{Kq}(\Sigma_1) \ , \\ \partial + \delta_N^K + \delta_Q^K &: C_1^{qK}(\Sigma_1) \longrightarrow C_0^{qK}(\Sigma_1) \ . \end{aligned}$$

Définition 22. Le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) est le triplet constitué des trois ensembles suivants :

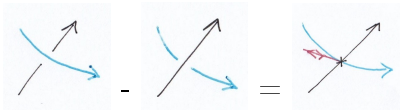
(i) La $\mathbb{Z}$-algèbre
$$R_{KK} := C_0^{KK}(\Sigma_0)/\mathrm{Im}(\partial + \delta_N^K + \delta_Q^K) \ ,$$
(ii) le R_{KK}-module à gauche
$$R_{Kq} := C_0^{Kq}(\Sigma_1)/\mathrm{Im}(\partial + \delta_N^K + \delta_Q^K) \ ,$$
(iii) le R_{KK}-module à droite
$$R_{qK} := C_0^{qK}(\Sigma_1)/\mathrm{Im}(\partial + \delta_N^K + \delta_Q^K) \ ,$$
où les applications $\partial + \delta_N^K + \delta_Q^K$ sont celles définies dans le paragraphe précédent.

R_{KK} n'est autre que la $\mathbb{Z}$-algèbre $H_0^{string}(K)$ définie dans le chapitre précédent.

Remarque. (i) Les actions de $C_0^{KK}(\Sigma_0)$ passent bien au quotient en des actions de R_{KK} sur R_{Kq} et R_{qK}. Les détails, simples mais fastidieux, ne sont pas donnés.

(ii) Ce quotientage permet de déplacer le long de K l'extrémité ou les extrémités en K d'une ij-corde brisée générique, sans changer son représentant dans R_{ij}.

Le triplet peut également être défini à partir des deux relations

(a)  ,

(b) .

On note dans la suite :

(i) $\mathcal{B}_{KK}$ la $\mathbb{Z}$-algèbre engendrée en tant que $\mathbb{Z}$-module libre par les classes d'homotopie de KK-cordes brisées génériques avec 0 changement en q, et $\mathcal{I}_{KK}$ son idéal bilatère engendré par les relations (a) et (b).

(ii) $\mathcal{B}_{Kq}$ le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les classes d'homotopie de Kq-cordes brisées génériques avec 1 changement en q, et $\mathcal{I}_{Kq}$ son sous $\mathbb{Z}$-module engendré par les relations (a) et (b).

(iii) $\mathcal{B}_{qK}$ le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les classes d'homotopie de qK-cordes brisées génériques avec 1 changement en q, et $\mathcal{I}_{qK}$ son sous $\mathbb{Z}$-module engendré par les relations (a) et (b).

Alors $\mathcal{B}_{Kq}$ (resp. $\mathcal{B}_{qK}$) est un $\mathcal{B}_{KK}$-module à gauche (resp. à droite). La construction a déjà été fait pour $\mathcal{B}_{KK}$ dans le chapitre précédent. On termine donc en donnant les grandes lignes pour $\mathcal{B}_{Kq}$, celles pour $\mathcal{B}_{qK}$ étant analogues.

On quotiente $\mathcal{B}_{Kq}$ par le sous-$\mathcal{B}_{KK}$-module $\mathcal{I}_{Kq}$. $\mathcal{B}_{Kq}/\mathcal{I}_{Kq}$ et R_{Kq} sont alors isomorphes en tant que $\mathbb{Z}$-modules par le même argument que dans le chapitre précédent. De plus, deux éléments de $\mathcal{B}_{KK}$ ayant le même représentant dans $\mathcal{B}_{KK}/\mathcal{I}_{KK}$ induisent la même action sur $\mathcal{B}_{Kq}/\mathcal{I}_{Kq}$.

On déduit la proposition qui suit, en notant $\psi_{ij} : R_{ij} \tilde{\to} \mathcal{B}_{ij}/\mathcal{I}_{ij}$ les isomorphismes issus de la construction précédente :

Proposition 11. *Les isomorphismes $\psi_{ij} : R_{ij} \tilde{\to} \mathcal{B}_{ij}/\mathcal{I}_{ij}$ vérifient les propriétés suivantes :*

(a) ψ_{KK} est un isomorphisme d'anneaux,

(b) Pour tous $a \in R_{KK}$ et $x \in R_{Kq}$,
$$\psi_{Kq}(a \cdot x) = \psi_{KK}(a) \cdot \psi_{Kq}(x).$$

(c) Pour tous $a \in R_{KK}$ et $x \in R_{qK}$,

$$\psi_{qK}(x \cdot a) = \psi_{qK}(x) \cdot \psi_{KK}(a).$$

Les triplets (R_{ij}) et $\mathcal{B}_{ij}/\mathcal{I}_{ij}$ sont donc « isomorphes en tant que triplets ». On introduira cette notion dans la section 1.6.

1.5. L'anneau R_{qq} et le produit P. On construit maintenant le dernier élément de l'invariant construit dans ce chapitre : le produit P.

On introduit le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\partial + \delta_N^K + \delta_Q^K : C_1^{qq}(\Sigma_2) \longrightarrow C_0^{qq}(\Sigma_2).$$

On définit le $\mathbb{Z}$-module

$$R_{qq} := C_0^{qq}(\Sigma_2)/\mathrm{Im}(\partial + \delta_N^K + \delta_Q^K).$$

Comme en fin de section précédente, en quotientant $\mathcal{B}_{qq}$, le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les classes d'homotopie de qq-cordes brisées génériques à 2 changements en q, par le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par les relations (a) et (b), les $\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{B}_{qq}/\mathcal{I}_{qq}$ et R_{qq} sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}$-modules.

Le résultat précédent permet d'obtenir R_{qq} à partir du triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) :

PROPOSITION 12. *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules*

$$R_{qK} \otimes_{R_{KK}} R_{Kq} \cong R_{qq}.$$

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est d'associer à une qK-corde brisée de $\mathcal{B}_{qK}$ et à une Kq-corde brisée de $\mathcal{B}_{Kq}$, la qq-corde brisée de $\mathcal{B}_{qq}$ obtenue par concaténation. Les détails ne sont pas effectués. □

On souhaite maintenant définir une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur le $\mathbb{Z}$-module R_{qq}. Plus précisément, on va définir un morphisme de R_{KK}-bimodule

$$P : R_{Kq} \otimes_{\mathbb{Z}} R_{qK} \to R_{KK},$$

qui induira la multiplication

$$R_{qq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qq} \to R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes P\otimes \mathrm{id}]{} R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{KK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \to R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \to R_{qq}.$$

On commence donc par définir le produit P. On utilise pour cela le point de vue des $\mathcal{B}_{ij}$ introduit à la fin de la dernière section. Étant données une Kq-corde brisée c_1 de $\mathcal{B}_{Kq}$ et une qK-corde brisée c_2 de $\mathcal{B}_{qK}$, on définit leur produit P comme la KK-corde brisée à 0 changement en q, $P(c_1, c_2) \in \mathcal{B}_{KK}$, obtenue en supprimant les B-cordes de c_1 et c_2 et en concaténant la Q-corde finale de c_1 et la Q-corde initiale de c_2 en q. Un exemple de produit P est donné sur la figure 2.

On définit ainsi un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$P : \mathcal{B}_{Kq} \times \mathcal{B}_{qK} \longrightarrow \mathcal{B}_{KK}.$$

D'après la formule le définissant, il vérifie de plus les égalités

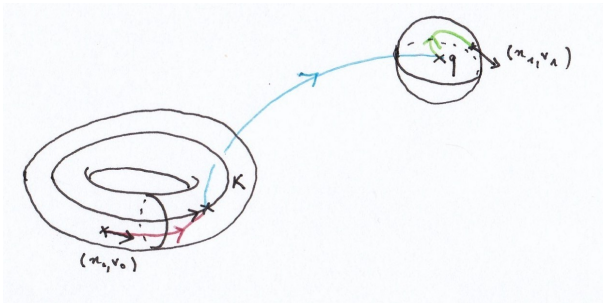
$$P(a \cdot x, y) = a \cdot P(x, y)$$

et

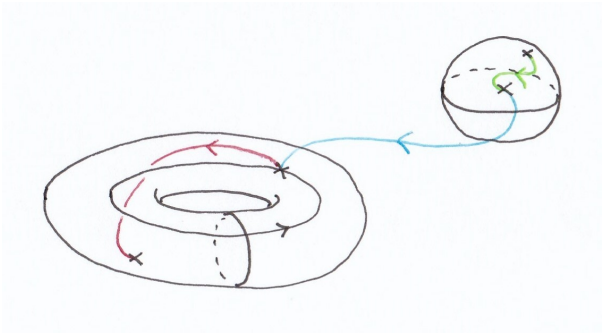
$$P(x, y \cdot a) = P(x, y) \cdot a,$$

pour $a \in \mathcal{B}_{KK}$, $x \in \mathcal{B}_{Kq}$ et $y \in \mathcal{B}_{qK}$. On dit qu'il est $\mathcal{B}_{KK}$-bilinéaire. Il passe au quotient en un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

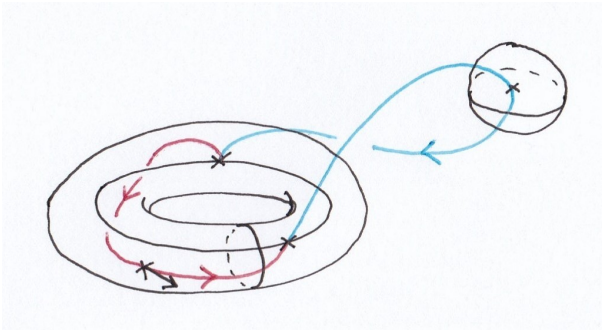
$$P : R_{Kq} \times R_{qK} \longrightarrow R_{KK},$$



Une Kq-corde brisée c_1



Une qK-corde brisée c_2



La KK-corde brisée $P(c_1, c_2)$

FIGURE 2

qui est $\mathcal{B}_{KK}$-bilinéaire pour les structures de $\mathcal{B}_{KK}$-modules sur R_{Kq} et R_{qK}. On vérifie alors sur l'action de $\mathcal{B}_{KK}$ que l'application précédente définit un morphisme de R_{KK}-bimodules. Elle passe au produit tensoriel en un morphisme de R_{KK}-bimodules :

$$P : R_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qK} \longrightarrow R_{KK}.$$

DÉFINITION 23. Le morphisme de R_{KK}-bimodules $P : R_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qK} \longrightarrow R_{KK}$ ainsi obtenu est appelé le produit P du triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}).

Ce produit P induit en particulier une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur le $\mathbb{Z}$-module R_{qq} à travers l'application :

$$R_{qq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qq} \to R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes P\otimes \mathrm{id}]{} R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{KK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \to R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} \to R_{qq}.$$

1.6. Isomorphisme de quadruplets. Introduisons la terminologie d'isomorphisme de quadruplets. Pour $i = 1, 2$, soit (A_i, M_i^1, M_i^2, P_i) la donnée des objets suivants

(i) une $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative A_i,

(ii) un A_i-module à gauche M_i^1,

(iii) un A_i-module à droite M_i^2,

(iv) un morphisme de A_i-bimodules $M_i^1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M_i^2 \to A_i$.

On dit que le quadruplet (A_1, M_1^1, M_1^2, P_1) est *isomorphe* au quadruplet (A_2, M_2^1, M_2^2, P_2) s'il existe

(i) un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives $\psi_A : A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$,

(ii) un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\psi_{M^1} : M_1^1 \xrightarrow{\sim} M_2^1$,

(iii) et un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\psi_{M^2} : M_1^2 \xrightarrow{\sim} M_2^2$,

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Pour tous $a \in A_1$ et $x \in M_1^1$,
$$\psi_{M^1}(a \cdot x) = \psi_A(a) \cdot \psi_{M^1}(x),$$

(b) pour tous $a \in A_1$ et $x \in M_1^2$,
$$\psi_{M^2}(x \cdot a) = \psi_{M^2}(x) \cdot \psi_A(a),$$

(c) et pour tous $x_1 \in M_1^1$ et $x_2 \in M_1^2$
$$P_2 \circ (\psi_{M^1} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \psi_{M^2}) = \psi_A \circ P_1.$$

1.7. L'invariant $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$**.** On munit la $\mathbb{Z}$-algèbre R_{KK} d'une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative, par le morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}] \longrightarrow R_{KK}$ qui à X associe λ et à Y associe μ, où λ et μ sont les N-cordes associées au couple périphérique de K.

Alors le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ est un invariant de noeud orienté : une isotopie ambiante entre deux noeuds orientés K et K' induit un isomorphisme de quadruplets entre le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ et le quadruplet $(R_{K'K'}, R_{K'q'}, R_{q'K'}, P')$.

2. Algèbre et modules de chemins

Comme dans le chapitre précédent, l'homologie de cordes améliorée peut être interprétée du point de vue des chemins du couple (K, q).

Soient donc K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$ et q un point dans $\mathbb{R}^3 \backslash K$. Soit K' une copie parallèle de K par rapport à la longitude de Seifert de K. On choisit un point base $*$ de K et le point base $*$ correspondant de K'.

Définition 24. Une application continue $\gamma : [0, 1] \to Q$ telle que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont des éléments de $(K' \backslash \{*\}) \cup \{q\}$ et telle que γ n'intersecte pas K en son intérieur est appelée *chemin* du couple (K, q).

Terminologie. Si les deux extrémités de γ sont sur K' on parle de *KK-chemin*. On parle de même de *Kq-chemin*, de *qK-chemin* et de *qq-chemin*.

Un exemple de qK-chemin est donné sur la figure 3.

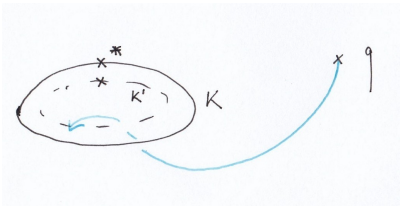
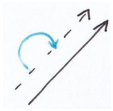
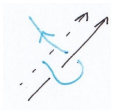


Figure 3. Un exemple de qK-chemin

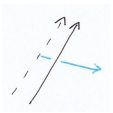
L'algèbre de cordes du couple (K, q) est alors définie de la même manière que dans le chapitre 2. On considère l'anneau non-commutatif engendré par les classes d'homotopie de KK-chemins et quatre générateurs supplémentaires notés $\lambda, \lambda^{-1}, \mu$ et μ^{-1}. On quotiente cet anneau par les relations suivantes :
$$\lambda \cdot \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \lambda = \mu \cdot \mu^{-1} = \mu^{-1} \cdot \mu = 1 \text{ et } \lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda,$$
et on note $\mathcal{A}_{KK}$ l'anneau résultant.

On définit $\mathcal{M}_{KK}$, l'idéal bilatère de $\mathcal{A}_{KK}$ engendré par les relations suivantes (où K est dessiné en ligne pleine, K' est dessiné en pointillé) :

(a)  $= \mu - 1$,

(b)  $= \mu \cdot$ et $=$ $\cdot \mu$,

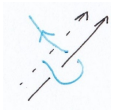
(c) $= \lambda \cdot$ et $=$ $\cdot \lambda$,

(d) - $=$ $\cdot$  ,

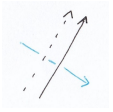
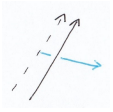
où les chemins représentés coïncident en-dehors de la zone dessinée et ont leurs extrémités en K'.

Définition 25. On appelle *algèbre de chemins de* K et on note $\mathfrak{P}_{KK}$, l'anneau quotient $\mathcal{A}_{KK}/\mathcal{M}_{KK}$.

Soit $\mathcal{A}_{Kq}$ le $\mathfrak{P}_{KK}$-module à gauche librement engendré par les classes d'homotopie de Kq-chemins. On le quotiente par les mêmes relations que l'anneau $\mathcal{A}_{KK}$, hormis la première relation qui n'a pas de sens ici :

(a)  $= \mu \cdot$,

(b) $= \lambda \cdot$,

(c) -  $=$ $\cdot$  ,

où les chemins représentés coïncident en-dehors de la zone dessinée et ont leur extrémité initiale en K et finale en q.

On insiste sur le fait que les coefficients apparaissant dans le membre de droite des relations précédentes sont vus comme des éléments de $\mathfrak{P}_{KK}$.

Définition 26. On appelle *module de* Kq*-chemins de* K et on note $\mathfrak{P}_{Kq}$, le $\mathfrak{P}_{KK}$-module à gauche ainsi obtenu. On définit de manière analogue le *module de* qK*-chemins de* K, qui est cette fois un $\mathfrak{P}_{KK}$-module à droite.

Notation. Le module de Kq-chemins de K (resp. le module de qK-chemins de K) est noté $\mathfrak{P}_{Kq}$ (resp. $\mathfrak{P}_{qK}$).

On définit enfin le morphisme de $\mathfrak{P}_{KK}$-bimodules

$$P_{\mathfrak{P}} : \mathfrak{P}_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathfrak{P}_{qK} \longrightarrow \mathfrak{P}_{KK} \ ,$$

qui à un Kq-chemin et à un qK-chemin associe le KK-chemin obtenu par concaténation en q.

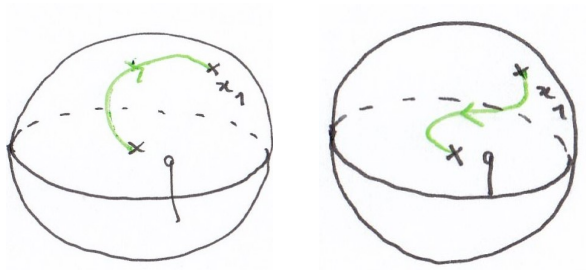
On obtient une nouvelle interprétation du quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ grâce au point de vue des chemins du couple (K, q) :

Proposition 13. *Il existe un isomorphisme de quadruplets*

$$\psi : (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{P}_{KK}, \mathfrak{P}_{Kq}, \mathfrak{P}_{qK}, P_{\mathfrak{P}}).$$

DÉMONSTRATION. On reprend les notations de la démonstration de la proposition 4. L'isomorphisme ψ_{KK} est l'isomorphisme construit dans cette démonstration. Les isomorphismes ψ_{Kq} et ψ_{qK} se construisent de manière similaire. On donne les grandes lignes de la construction de ψ_{Kq}.

On pose w un élément de $T_q\mathbb{R}^3$. Alors tout Kq-chemin peut-être déformé par homotopie en un Kq-chemin ayant dérivée w en son extrémité finale en q : tous les Kq-chemins sont désormais vus de cette manière. On introduit de plus les B-cordes γ_B et $\tilde{\gamma}_B$ comme sur la figure 4.



γ_B $\tilde{\gamma}_B$

FIGURE 4. γ_B a pour dérivée initiale $-w$ et dérivée finale v_1 tandis que $\tilde{\gamma}_B$ a pour dérivée initiale v_1 et dérivée finale w.

On définit le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules suivant : $\phi_{Kq} : \mathcal{A}_{Kq} \longrightarrow R_{Kq}$ associe à tout $\alpha_1 x_1 \alpha_2 x_2 \dots x_n \alpha_{n+1} \cdot y \in \mathcal{A}_{Kq}$, où y désigne un Kq-chemin, l'élément de R_{Kq},

$$(\alpha_1\gamma_N)(\tilde{\gamma}_Q x_1 \gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha_2 \gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_Q x_n \gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha_{n+1}\gamma_N)(\tilde{\gamma}_Q y)(\gamma_B).$$

On vérifie que ϕ_{Kq} définit bien une application telle que pour tout $x \in \mathfrak{P}_{KK}$ et tout Kq-chemin y, $\phi_{Kq}(x \cdot y) = \psi_{KK}(x) \cdot \phi_{Kq}(y)$.

Par les mêmes arguments que dans la démonstration pour $\mathfrak{P}_{KK}$, ϕ_{Kq} passe bien au quotient pour la relation (c), et quotienter par les relations (a) et (b) assure que l'application obtenue ψ_{Kq} est injective.

Enfin,

$$\begin{aligned}
&\psi_{KK}(P_{\mathfrak{P}}(\alpha_1 x_1 \dots x_n \alpha_{n+1} \cdot y \otimes y' \cdot \alpha'_1 x'_1 \dots x'_m \alpha'_{m+1})) \\
&= \psi_{KK}(\alpha_1 x_1 \dots x_n \alpha_{n+1} \cdot (y \cdot y') \alpha'_1 x'_1 \dots x'_m \alpha'_{m+1}) \\
&= (\alpha_1\gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_N \alpha_{n+1}\gamma_N)(\tilde{\gamma}_Q(y \cdot y')\gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha'_1 \gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_N \alpha'_{n+1}),
\end{aligned}$$

où $(y \cdot y')$ désigne le KK-chemin issu de la concaténation de y et y', et

$$\begin{aligned}
&P(\psi_{KK}(\alpha_1 x_1 \dots x_n \alpha_{n+1} \cdot y) \otimes \psi_{KK}(y' \cdot \alpha'_1 x'_1 \dots x'_m \alpha'_{m+1})) \\
&= P((\alpha_1\gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_N \alpha_{n+1}\gamma_N)(\tilde{\gamma}_Q y)(\gamma_B) \otimes (\tilde{\gamma}_B))(y'\gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha'_1 \gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_N \alpha'_{n+1})) \\
&= (\alpha_1\gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_N \alpha_{n+1}\gamma_N)(\tilde{\gamma}_Q(y \cdot y')\gamma_Q)(\tilde{\gamma}_N \alpha'_1 \gamma_N) \dots (\tilde{\gamma}_N \alpha'_{n+1}).
\end{aligned}$$

Ainsi les deux quadruplets sont bien isomorphes. □

3. Le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ en terme de l'algèbre de groupe de noeud

3.1. Idée et formalisme. Dans la partie 3 du chapitre 2, on a construit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives entre R_{KK} et un sous-anneau de l'algèbre de groupe de noeud de K. Cela a été possible en reformulant l'interprétation de R_{KK} en terme de chemins en une interprétation de R_{KK} en terme de mots brisés.

L'objectif de cette partie est le même. Cette fois, il faut cependant considérer en plus de mots brisés de la forme

$$\{\alpha_1\}\,[x_1] \cdots [x_n]\,\{\alpha_{n+1}\},$$

correspondant aux KK-cordes brisées, des mots brisés de la forme

$$\{\alpha_1\}\,[x_1]\cdots[x_{n-1}]\,\{\alpha_n\}\,[x_n]$$

et de la forme

$$[x_1]\,\{\alpha_1\}\,[x_2]\cdots[x_{n-1}]\,\{\alpha_n\}$$

correspondant respectivement aux Kq-cordes brisées et aux qK-cordes brisées.

Les notations de cette section sont les mêmes que dans le chapitre précédent. Soient K un noeud de $Q=\mathbb{R}^3$ orienté et N un voisinage tubulaire de K. On pose toujours,

$$\pi := \pi_1\left(Q\backslash K\right)$$
$$\hat{\pi} := \pi_1\left(\partial N\right).$$

On choisit q comme point base de π et x_0 comme point base de ∂N. On fixe de plus un chemin γ_0 dans $\mathbb{R}^3\backslash K$ de q vers x_0. Le morphisme $\hat{\pi}\to\pi$ associe alors à $\alpha\in\hat{\pi}$ l'élément $\gamma_0\alpha\gamma_0^{-1}\in\pi$.

Enfin, on appelle *mot brisé* en π et $\hat{\pi}$ un mot dont les lettres alternent entre les éléments de π et $\hat{\pi}$. On adopte le même formalisme de notation en accolades et en crochets que dans le chapitre précédent.

3.2. L'interprétation du quadruplet (R_{KK},R_{Kq},R_{qK},P) en terme de mots brisés. On commence par introduire les structures considérées dans cette section :

(i) $\mathcal{C}_{KK}$ est le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les mots brisés de la forme

$$\{\alpha_1\}\,[x_1]\cdots[x_n]\,\{\alpha_{n+1}\}\ ,$$

(ii) $\mathcal{C}_{Kq}$ est le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les mots brisés de la forme

$$\{\alpha_1\}\,[x_1]\cdots[x_{n-1}]\,\{\alpha_n\}\,[x_n]\ ,$$

(iii) $\mathcal{C}_{qK}$ est le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les mots brisés de la forme

$$[x_1]\,\{\alpha_1\}\,[x_2]\cdots[x_{n-1}]\,\{\alpha_n\}\,.$$

On définit la concaténation de mots brisés

$$(\cdots_1\{\alpha_1\})\cdot(\{\alpha_2\}\cdots_2) := \cdots_1\{\alpha_1\alpha_2\}\cdots_2\ ,$$

où la première (resp. la dernière lettre) de $\cdots_1$ (resp. de $\cdots_2$) peut être de la forme $\{\alpha\}$ ou de la forme $[x]$. Cette opération définit

(i) une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur $\mathcal{C}_{KK}$,

(ii) une structure de $\mathcal{C}_{KK}$-module à gauche sur $\mathcal{C}_{Kq}$,

(iii) une structure de $\mathcal{C}_{KK}$-module à droite sur $\mathcal{C}_{qK}$.

On définit en plus la concaténation d'un élément de $\mathcal{C}_{Kq}$ et de $\mathcal{C}_{qK}$,

$$(\cdots_1[x_1])\cdot([x_2]\cdots_2) := \cdots_1[x_1x_2]\cdots_2\ .$$

$\mathcal{C}_{KK}$ est muni de sa structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm1},Y^{\pm1}]$-algèbre non commutative associée au couple périphérique :

$$\mathbb{Z}[X^{\pm1},Y^{\pm1}]\longrightarrow\mathcal{C}_{KK},\qquad X\longmapsto\{\lambda\},\qquad Y\longmapsto\{\mu\}\ .$$

On quotiente alors chacun des $\mathbb{Z}$-modules libres $\mathcal{C}_{ij}$ par les relations suivantes :

(a) $\cdots_1[x\alpha_1]\,\{\alpha_2\}\cdots_2=\cdots_1[x]\,\{\alpha_1\alpha_2\}\cdots_2$,

(b) $\cdots_1\{\alpha_1\}\,[\alpha_2x]\cdots_2=\cdots_1\{\alpha_1\alpha_2\}\,[x]\cdots_2$,

(c) $(\cdots_1[x_1\mu x_2]\cdots_2)-(\cdots_1[x_1x_2]\cdots_2)=\cdots_1[x_1]\,\{1\}\,[x_2]\cdots_2$,

(d) $(\cdots_1\{\alpha_1\mu\alpha_2\}\cdots_2)-(\cdots_1\{\alpha_1\alpha_2\}\cdots_2)=\cdots_1\{\alpha_1\}\,[1]\,\{\alpha_2\}\cdots_2$.

REMARQUE. On quotiente donc $\mathcal{C}_{KK}$ (resp. $\mathcal{C}_{Kq}$, $\mathcal{C}_{qK}$) par l'idéal bilatère (resp. le $\mathcal{C}_{KK}$-module à gauche, resp. le $\mathcal{C}_{KK}$-module à droite) engendré par ces relations.

NOTATION. On note $\mathfrak{W}_{KK}$, $\mathfrak{W}_{Kq}$ et $\mathfrak{W}_{qK}$ les $\mathbb{Z}$-modules ainsi obtenus.

Alors, les opérations de concaténation passent au quotient en :

(i) une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur $\mathfrak{W}_{KK}$,

(ii) une structure de $\mathfrak{W}_{KK}$-module à gauche sur $\mathfrak{W}_{Kq}$,

(iii) une structure de $\mathfrak{W}_{KK}$-module à droite sur $\mathfrak{W}_{qK}$,

NOTATION. On appelle $\mathfrak{W}_{KK}$(resp. $\mathfrak{W}_{Kq}$, $\mathfrak{W}_{qK}$) l'algèbre des KK-mots brisés de (K, q) (resp. le module des Kq-mots brisés de (K, q), le module des qK-mots brisés de (K, q)).

On définit enfin le morphisme de $\mathfrak{W}_{KK}$-bimodules,

$$P_{\mathfrak{W}} : \mathfrak{W}_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathfrak{W}_{qK} \longrightarrow \mathfrak{W}_{KK}$$
$$\cdots_1 [x_1] \otimes [x_2] \cdots_2 \longmapsto \cdots_1 [x_1 x_2] \cdots_2 \ .$$

PROPOSITION 14. *Il existe un isomorphisme de quadruplets*

$$\phi : (\mathfrak{P}_{KK}, \mathfrak{P}_{Kq}, \mathfrak{P}_{qK}, P_{\mathfrak{P}}) \longrightarrow (\mathfrak{W}_{KK}, \mathfrak{W}_{Kq}, \mathfrak{W}_{qK}, P_{\mathfrak{W}}).$$

Cet isomorphisme se construit de la même manière que dans la proposition 5. On prendra simplement garde au fait que cette fois un chemin dont une des extrémités sur K doit être composés à ses extrémités par le chemin γ_0 choisi dans la section précédente pour donner un lacet du groupe fondamental π basé en q.

3.3. La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathfrak{W}_{qq}$. Soit $\mathcal{C}_{qq}$ est $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les mots brisés de la forme

$$[x_1] \{\alpha\} [x_2], [x_1] \{\alpha_1\} [x_2] \{\alpha_2\} [x_3], \ldots \ .$$

On note $\mathfrak{W}_{qq}$ le $\mathbb{Z}$-module obtenu en quotientant par les relations (a), (b), (c) et (d). Alors, le morphisme $\mathfrak{W}_{qq} \to \mathfrak{W}_{qK} \otimes_{\mathfrak{W}_{KK}} \mathfrak{W}_{Kq}$ qui à tout mot $[x_1] \{\alpha_1\} \cdots \{\alpha_{n-1}\} [x_n] \in \mathfrak{W}_{qq}$ associe l'élément $[x_1] \{1\} \otimes \{\alpha_1\} \cdots \{\alpha_{n-1}\} [x_n] \in \mathfrak{W}_{qK} \otimes_{\mathfrak{W}_{KK}} \mathfrak{W}_{Kq}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules.

La multiplication définie par $P_{\mathfrak{W}}$ sur $\mathfrak{W}_{qq}$ correspond à l'opération de concaténation

$$\cdots_1 [x_1] \cdot [x_2] \cdots_2 = \cdots_1 [x_1 x_2] \cdots_2 \ .$$

REMARQUE. Les isomorphismes définis dans les propositions 12, 13 et 14 induisent un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $R_{qq} \cong \mathfrak{W}_{qq}$.

Notons que l'on n'a pas inclus les mots brisés de la forme $[x]$ dans $\mathcal{C}_{qq}$: un élément de R_{qq} a en effet deux changements en q, et donc au moins deux Q-cordes qui sont représentées par les crochets du mot brisé.

3.4. Le quadruplet $(\mathfrak{W}_{KK}, \mathfrak{W}_{Kq}, \mathfrak{W}_{qK}, P_{\mathfrak{W}})$ en terme de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\pi]$. Dans $\mathfrak{W}_{ij}$ la relation (c) permet de réduire tout ij-mot brisé contenant au moins une accolade intérieure

$$\cdots_1 [x_1] \{\alpha\} [x_2] \cdots_2$$

en une somme signée de ij-mots brisés de longueur strictement inférieure. C'est le contenu de la proposition suivante :

PROPOSITION 15. *(a) $\mathfrak{W}_{KK}$ est engendré en tant que $\mathbb{Z}$-module par les éléments de la forme $\{\alpha\}$ et $\{1\} [x] \{1\}$, $\alpha \in \hat{\pi}$ et $x \in \pi$.*

(b) $\mathfrak{W}_{Kq}$ est engendré en tant que $\mathbb{Z}$-module par les éléments de la forme $\{1\} [x]$, $x \in \pi$.

(c) $\mathfrak{W}_{qK}$ *est engendré en tant que* $\mathbb{Z}$*-module par les éléments de la forme* $[x]\{1\}$, $x \in \pi$.

(d) $\mathfrak{W}_{qq}$ *est engendré en tant que* $\mathbb{Z}$*-module par les éléments de la forme* $[x_1]\{1\}[x_2]$ *où* $x_1, x_2 \in \pi$.

On pose dans la suite $A := \mathbb{Z}[\pi]$ et $\hat{A}$ l'image de $\mathbb{Z}[\hat{\pi}]$ dans A. A est muni de sa structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative induite par le couple périphérique de K. On va construire un isomorphisme de quadruplets entre le quadruplet $(\mathfrak{W}_{KK}, \mathfrak{W}_{Kq}, \mathfrak{W}_{qK}, P_{\mathfrak{W}})$ et des sous-structures de A.

On note ω les applications suivantes :

(i) Le morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_{KK} \longrightarrow A \\ \{\alpha_1\}[x_1]\{\alpha_2\}[x_2]\cdots\{\alpha_n\}[x_n]\{\alpha_{n+1}\} \longmapsto \alpha_1 x_1 \alpha_2(\mu-1)\cdots\alpha_n(\mu-1)x_n\alpha_{n+1}(\mu-1)\ .\end{gathered}$$

(ii) Le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_{Kq} \longrightarrow A \\ \{\alpha_1\}[x_1]\{\alpha_2\}[x_2]\cdots\{\alpha_n\}[x_n] \longmapsto \alpha_1 x_1 \alpha_2(\mu-1)\cdots\alpha_n(\mu-1)x_n\ .\end{gathered}$$

(iii) Le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_{qK} \longrightarrow A \\ [x_1]\{\alpha_1\}[x_2]\cdots\{\alpha_{n-1}\}[x_n]\{\alpha_n\} \longmapsto x_1\alpha_1(\mu-1)\cdots\alpha_{n-1}(\mu-1)x_n\alpha_n(\mu-1)\ .\end{gathered}$$

(iv) Le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_{qq} \longrightarrow A \\ [x_1]\{\alpha_1\}[x_2]\cdots\{\alpha_{n-1}\}[x_n] \longmapsto x_1\alpha_1(\mu-1)\cdots\alpha_{n-1}(\mu-1)x_n\ .\end{gathered}$$

En résumé, ces morphismes remplacent toute accolade intérieure ou finale $\{\alpha\}$ par $\alpha(\mu-1)$.

On note $\hat{A} + A(\mu-1)$ la sous-$\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative de A engendrée par $\hat{A}$ et $A(\mu-1)$, et $\cdot$ la multiplication dans A. On peut en particulier voir $\cdot$ comme un morphisme de $\hat{A} + A(\mu-1)$-bimodules

$$A(\mu-1) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A \longrightarrow \hat{A} + A(\mu-1)\ .$$

NOTATION. On étend la notation $\cdots_1[x]\cdots_2$ à tout élément $x \in \mathbb{Z}[\pi]$. Par exemple, pour $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathbb{Z}[\pi]$ où les x_i sont des éléments de π et les a_i des coefficients dans $\mathbb{Z}$, $[x] = \sum_{i=1}^n a_i [x_i]$.

Ces morphismes passent alors au quotient, et on vérifie qu'ils définissent un morphisme de quadruplet

$$\omega : (\mathfrak{W}_{KK}, \mathfrak{W}_{Kq}, \mathfrak{W}_{qK}, P_{\mathfrak{W}}) \tilde{\longrightarrow} (\hat{A} + A(\mu-1), A, A(\mu-1), \cdot).$$

Montrons que ce morphisme est un isomorphisme. On remarque déjà que dans les formules définissant ω, on peut remplacer les $x_i \in \pi$ par des $x_i \in \mathbb{Z}[\pi]$. Les morphismes sont bien tous surjectifs.

Pour l'injectivité, on utilise la proposition 15. Le résultat a déjà été démontré dans le chapitre précédent pour le morphisme ω_{KK}. Tout élément de R_{Kq} s'écrit sous la forme $\{1\}[x]$ avec $x \in \mathbb{Z}[\pi]$. Alors, $\omega_{Kq}(\{1\}[x]) = x = 0$ implique $x = 0$ donc ω_{Kq}. Tout élément de R_{qK} s'écrit sous la forme $[x]\{1\}$ avec $x \in \mathbb{Z}[\pi]$. Alors, $\omega_{qK}([x]\{1\}) = x(\mu-1) = 0$ implique $x = 0$ car A est intègre.

Enfin,

$$\begin{aligned}&\omega_{KK}(P_{\mathfrak{W}}(\cdots_1\{\alpha_n\}[x_n] \otimes [y_1]\{\beta_1\}\cdots_2) \\ &= \cdots_1 \alpha_n(\mu-1)x_n y_1 \beta_1(\mu-1)\cdots_2\end{aligned}$$

et

$$\omega_{Kq}(\cdots_1 \{\alpha_n\}\,[x_n]) \cdot \omega_{qK}([y_1]\,\{\beta_1\}\cdots_2) = \cdots_1 \alpha_n(\mu-1)x_n y_1 \beta_1(\mu-1)\cdots_2 \ .$$

On a donc construit un isomorphisme de quadruplets.

PROPOSITION 16. *L'application ω est un isomorphisme de quadruplets entre les quadruplets $(\mathfrak{W}_{KK}, \mathfrak{W}_{Kq}, \mathfrak{W}_{qK}, P_{\mathfrak{W}})$ et $(\hat{A} + A(\mu-1), A, A(\mu-1), \cdot)$.*

$A(\mu-1)\otimes_{\mathbb{Z}} A$ est isomorphe de manière canonique à l'idéal bilatère engendré par $\mu-1$, $A(\mu-1)A$. De plus, on a défini dans la section 3.3 un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\mathfrak{W}_{qq} \cong \mathfrak{W}_{qK} \otimes_{\mathfrak{W}_{KK}} \mathfrak{W}_{Kq}$. On vérifie que la composition de ces deux isomorphismes avec l'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\omega_{qK} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \omega_{Kq} : \mathfrak{W}_{qK} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathfrak{W}_{Kq} \xrightarrow{\sim} A(\mu-1) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A$$

est exactement l'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules ω_{qq} construit dans cette section, défini par

$$\mathfrak{W}_{qq} \xrightarrow{\sim} A(\mu-1)A$$
$$[x_1]\,\{\alpha_1\}\,[x_2]\cdots\{\alpha_{n-1}\}\,[x_n] \longmapsto x_1\alpha_1(\mu-1)\cdots\alpha_{n-1}(\mu-1)x_n \ .$$

Si $\mathfrak{W}_{qq}$ est muni de sa structure de $\mathbb{Z}$-algèbre induite par le produit $P_{\mathfrak{W}}$ et $A(\mu-1)A$ est muni de la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre induite par celle de A, alors

PROPOSITION 17. *L'application $\omega_{qq} : \mathfrak{W}_{qq} \to A(\mu-1)A$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres.*

On conclut cette section en prouvant que la $\mathbb{Z}$-algèbre $A(\mu-1)A$ permet de recouvrer l'intégralité de la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre de A.

PROPOSITION 18. *Les sous-$\mathbb{Z}$-modules de A, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\cdot 1$ et $A(\mu-1)A$ sont complémentaires :*

$$\mathbb{Z} \oplus A(\mu-1)A \xrightarrow{\sim} A$$

en tant que $\mathbb{Z}$-modules.

DÉMONSTRATION. L'homomorphisme de π vers le groupe trivial $\{0\}$ induit un morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $A \to \mathbb{Z}$ égal à 0 sur $A(\mu-1)A$ et égal à l'identité sur $\mathbb{Z}$. Donc $\mathbb{Z} \cap A(\mu-1)A = 0$. De plus d'après la démonstration esquissée de la présentation de Wirtinger dans la section 2.2 du chapitre 1, le groupe π est engendré par un nombre fini de méridiens de la forme $\gamma\mu\gamma^{-1}$ où $\gamma \in \pi$. Or

$$\gamma\mu\gamma^{-1} = 1 + \gamma(\mu-1)\gamma^{-1} \in \mathbb{Z} + A(\mu-1)A \ .$$

On a donc bien $A = \mathbb{Z} \oplus A(\mu-1)A$.

□

On conclut cette partie en montrant qu'on peut recouvrer la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur A à partir de la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur $\mathfrak{W}_{qq}$.

On considère le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \oplus \mathfrak{W}_{qq}$ muni de la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre pour la multiplication

$$(n_1, w_1) \cdot (n_2, w_2) = (n_1 n_2, n_1 w_2 + n_2 w_1 + w_1 w_2) \ ,$$

où $\mathfrak{W}_{qq}$ est muni de la multiplication définie plus haut. Alors,

PROPOSITION 19. *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbre $f : \mathbb{Z} \oplus \mathfrak{W}_{qq} \xrightarrow{\sim} A$ qui vérifie*

$$f(n, [x_1]\,\{\alpha\}\,[x_2]) = n + x_1\alpha(\mu-1)x_2 \ .$$

DÉMONSTRATION. En munissant $\mathbb{Z}\oplus A(\mu-1)A$ de la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre définie par la même formule que pour $\mathbb{Z} \oplus \mathfrak{W}_{qq}$, l'application $\mathrm{id} \oplus \omega_{qq} : \mathbb{Z} \oplus \mathfrak{W}_{qq} \to \mathbb{Z} \oplus A(\mu-1)A$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres. De plus, l'application $\mathbb{Z} \oplus A(\mu-1)A \to A$ induite par la décomposition en somme directe de A est également un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres. L'isomorphisme f de l'énoncé s'obtient alors en prenant la composée de ces deux isomorphismes. □

4. Applications

Le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ contient donc l'information du couple périphérique (λ, μ) de K, et permet de recouvrer la structure d'algèbre sur $\mathbb{Z}[\pi]$. On verra que la structure d'algèbre sur $\mathbb{Z}[\pi]$ est suffisante pour obtenir l'intégralité du groupe de noeud π. Pourquoi ne pas définir directement l'invariant comme le couple (R_{KK}, R_{qq}) dans ce cas ? En fait, les structures sur R_{Kq} et R_{qK} permettront de « transférer » le couple (λ, μ) de R_{KK} à R_{qq} et d'obtenir le système périphérique du noeud, ce qui n'aurait pas été possible en considérant seulement le couple (R_{KK}, R_{qq}).

4.1. Résultats préliminaires.

On énonce dans cette section deux propositions qui serviront dans la démonstration des théorèmes 8 et 12.

PROPOSITION 20. *Les éléments inversibles d'une algèbre de groupe de noeud $\mathbb{Z}[\pi]$ sont exactement les éléments $\pm\gamma$, où $\gamma \in \pi$.*

PROPOSITION 21. *Soit $\mathbb{Z}[\pi]$ une algèbre de groupe de noeud. S'il existe $m, g \in \pi$ et $z \in \mathbb{Z}[\pi]$ tels que $z(m-1) = g-1$ dans $\mathbb{Z}[\pi]$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g = m^n$.*

4.2. Le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ comme invariant complet de noeud.

THÉORÈME 8. *Soient K_i un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$ et $q_i \in \mathbb{R}^3 \backslash K_i$ pour $i = 1, 2$. Si les quadruplets $(R_{K_1K_1}, R_{K_1q_1}, R_{q_1K_1}, P_1)$ et $(R_{K_2K_2}, R_{K_2q_2}, R_{q_2K_2}, P_2)$ sont isomorphes, alors les noeuds K_1 et K_2 sont équivalents en tant que noeuds orientés.*

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est la suivante. On a vu à la fin de la partie précédente qu'il est possible de recouvrer la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{Z}[\pi]$ à partir de la structure de $\mathbb{Z}$-algèbre de R_{qq}. Cette remarque combinée à la proposition 20 nous permet d'obtenir un isomorphisme de groupes entre les groupes de noeud de K_1 et K_2. On utilise finalement les propriétés de l'isomorphisme de quadruplets pour montrer que les systèmes périphériques des deux noeuds sont isomorphes. Comme R_{KK} détecte le noeud trivial, on peut de plus supposer que les noeuds K_1 et K_2 ne sont pas triviaux.

L'isomorphisme de quadruplets est noté ψ dans la suite de la démonstration, et on pose π_1 (resp. π_2) le groupe de noeuds de K_1 (resp. K_2). Il induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres

$$\psi_{qq} : R_{q_1q_1} \xrightarrow{\sim} R_{q_2q_2} \ ,$$

qui induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres

$$\psi_A : \mathbb{Z} \oplus R_{q_1q_1} \cong A_1 \xrightarrow{\sim} A_2 \cong \mathbb{Z} \oplus R_{q_2q_2} \ ,$$

d'après la proposition 19.

Alors, ψ_A échange les unités de A_1 et A_2. La proposition 20 assure que les unités d'une algèbre de groupe de noeud sont exactement ses monômes $\gamma \in \pi$. Pour tout $\gamma \in \pi_1$, on pose $\Psi(\gamma) := \pm\psi_A(\gamma) \in \pi_2$. On vérifie avec cette formule que Ψ définit bien un morphisme de groupes, qui est un isomorphisme. On a donc construit un isomorphisme de groupes

$$\Psi : \pi_1 \xrightarrow{\sim} \pi_2 \ .$$

Reste à démontrer que ce sont en fait les systèmes périphériques qui sont isomorphes, c'est-à-dire à trouver un isomorphisme de groupes $\bar{\Psi} : \pi_1 \xrightarrow{\sim} \pi_2$ tel que

$$\bar{\Psi}(\lambda_1) = \lambda_2 \qquad\qquad \bar{\Psi}(\mu_1) = \mu_2 \ .$$

On va utiliser les propriétés de ψ pour montrer qu'il existe $\gamma \in \pi_2$ tel que $\Psi(\lambda_1) = \gamma\lambda_2\gamma^{-1}$ et $\Psi(\mu_1) = \gamma\mu_2\gamma^{-1}$. L'isomorphisme de systèmes périphériques $\bar{\Psi}$ sera alors la conjugaison par γ^{-1} composée avec Ψ.

On sait déjà que $\psi_{KK}(\mu_1) = \mu_2$ et $\psi_{KK}(\lambda_1) = \lambda_2$. De plus, en voyant les éléments $1 \in A_1 \cong R_{K_1q_1}$ et $\mu_1 - 1 \in A_1(\mu_1 - 1) \cong R_{q_1K_1}$, il existe $x, x' \in A_1$ tels que

$$\psi_{Kq}(1) = x \qquad\qquad \psi_{qK}(\mu_1 - 1) = x'(\mu_2 - 1) \ .$$

La suite d'égalité suivante est vérifiée dans A_2 :

$$\begin{aligned}\mu_2 - 1 &= \psi_{KK}(\mu_1 - 1) = \psi_{KK}(P_1(1, \mu_1 - 1)) \\ &= P_2(\psi_{Kq}(1), \psi_{qK}(\mu_1 - 1)) = P_2(x, x'(\mu_2 - 1)) \\ &= xx'(\mu_2 - 1)\end{aligned}$$

Les algèbres de groupe de noeud sont intègres donc $xx' = 1$. Par la proposition 20, il existe $\gamma \in \pi_2$ tel que $x' = \pm\gamma$ et $x = \pm\gamma^{-1}$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{Z}$. On voit $\lambda_1^\alpha(\mu_1 - 1) = (\mu_1 - 1) \cdot \lambda_1^\alpha \cdot 1$ comme un élément de $R_{q_1K_1} \otimes_{R_{K_1K_1}} R_{K_1q_1}$. Alors,

$$\begin{aligned}\psi_A(\lambda_1^\alpha(\mu_1 - 1)) &= \psi_{qq}((\mu_1 - 1) \cdot \lambda_1^\alpha \cdot 1) \\ &= \psi_{qK}(\mu_1 - 1) \cdot \psi_{Kq}(\lambda_1^\alpha \cdot 1) \\ &= \psi_{qK}(\mu_1 - 1) \cdot \psi_{KK}(\lambda_1^\alpha) \cdot \psi_{Kq}(1) \\ &= \gamma(\mu_2 - 1) \cdot \lambda_2^\alpha \gamma^{-1} \ .\end{aligned}$$

Comme $\psi_A(\lambda_1^\alpha) = \pm\Psi(\lambda_1^\alpha) \in \pi_2$ et $\psi_A(\lambda_1^\alpha \mu_1) = \pm\Psi(\lambda_1^\alpha \mu_1) \in \pi_2$,

$$\{\Psi(\lambda_1^\alpha \mu_1), \Psi(\lambda_1^\alpha)\} = \left\{\gamma\lambda_2^\alpha \mu_2 \gamma^{-1}, \gamma\lambda_2^\alpha \gamma^{-1}\right\} \ .$$

En évaluant l'égalité précédente en $\alpha = 0, 1$, on obtient les égalités souhaitées :

$$\Psi(\lambda_1) = \gamma\lambda_2\gamma^{-1} \qquad\qquad \Psi(\mu_1) = \gamma\mu_2\gamma^{-1} \ .$$

□

Nous démontrerons dans la section 3.4 du chapitre 6 qu'en relaxant les hypothèses de l'isomorphisme sur les $R_{K_iK_i}$, le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ est un invariant de noeud à image miroir et inverse près.

5. Homologie de cordes améliorée en degré quelconque

On a construit dans la partie 6 du chapitre précédent une $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée $C(\Sigma)$ dont l'homologie en degré 0 est exactement R_{KK}. De la même manière, nous donnons dans cette partie les grandes lignes de la construction d'une $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée permettant de recouvrer le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) en homologie, et contenant $C(\Sigma)$. Sa différentielle est définie par les opérations δ_Q^K et δ_N^K déjà introduites dans le chapitre précédent, ainsi que par deux nouvelles opérations, δ_Q^q et δ_B^q qui insèrent cette fois des piques au point q.

On construira dans le chapitre 6 une $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée, dont l'homologie définira l'homologie de contact legendrienne de la legendrienne $\Lambda_K \cup \Lambda_q$, et contenant la $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée $C(\mathscr{R})$ définissant l'homologie de contact legendrienne de Λ_K. On pourra alors définir un morphisme d'algèbres différentielles graduées Φ prolongeant le morphisme Φ : $C(\mathscr{R}) \to C(\Sigma)$, construit dans le chapitre 5. Il induira un isomorphisme de quadruplets entre le quadruplet $(R_{KK}^{cont}, R_{Kq}^{cont}, R_{qK}^{cont}, P^{cont})$ défini par l'homologie de contact améliorée, et le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ défini par l'homologie de cordes améliorée.

5.1. L'algèbre composable $C(\Sigma)$. On oublie momentanément dans la fin de ce chapitre la notation $C(\Sigma)$ pour la $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée définissant l'homologie de cordes simple.

La $\mathbb{Z}$-algèbre $C(\Sigma)$ qui définit l'homologie de cordes améliorée, également appelée *algèbre composable du couple* (K,q), est construite sur le même schéma que l'algèbre $C(\Sigma)$. Pour $k=0,1,2$, les k-chaînes génériques de ij-cordes brisées sont définies comme les k-chaînes de ij-cordes brisées satisfaisant des conditions génériques de transversalité par rapport au noeud K et au point q. On pose alors $C_k^{ij}(\Sigma_l)$ le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les k-chaînes génériques de ij-cordes brisées ayant exactement l changements en q, et

$$C_k(\Sigma_l) := C_k^{KK}(\Sigma_l) \oplus C_k^{Kq}(\Sigma_l) \oplus C_k^{qK}(\Sigma_l) \oplus C_k^{qq}(\Sigma_l)$$
$$C_k(\Sigma) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_k(\Sigma_l) \ .$$

Soit S_1 une k-chaîne générique de ij-cordes brisées et S_2 une k'-chaîne générique de $i'j'$-cordes brisées, telle que $k+k' \leq 2$. Le produit $S_1 \times S_2$ est défini comme 0 si $j \neq i'$ et comme la concaténation des cordes brisées en leur extrémité commune si $j=i'$, en appliquant la subdivision classique de $\Delta_1 \times \Delta_1$ en deux 2-simplexes Δ_2 lorsque $k=k'=1$.

On définit maintenant un ij-mot composable en chaînes de cordes brisées comme un produit formel de chaînes de cordes brisées de la forme

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r \ ,$$

pour lequel il existe une suite d'éléments $i_h \in \{K,q\}$ telle que S_h est une chaîne générique de $i_h i_{h+1}$-cordes brisées pour tout h, et $i_1 = i$, $i_{r+1} = j$. En d'autres termes, à chaque signe $\times$, l'extrémité finale de S_h et l'extrémité initiale de S_{h+1} coïncident.

Pour tout $k \geq 3$, $C_k^{ij}(\Sigma_l)$ est alors défini comme le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les ij-mots composables, $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ tels que pour tout h, $S_h \in C_{k_h}^{i_h i_{h+1}}(\Sigma_{l_h})$ avec $0 \leq k_h \leq 2$, $\sum_{h=1}^r k_h = k$ et $\sum_{h=1}^r l_h = l$, quotienté par le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par les

$$S_1 \times \cdots \times S_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_r - S_1 \times \cdots \times (S_i \times S_{i+1}) \times \cdots \times S_r \ ,$$

où S_i et S_{i+1} sont des chaînes dont la somme des degrés est ≤ 2.

On pose enfin

$$C_k(\Sigma_l) := C_k^{KK}(\Sigma_l) \oplus C_k^{Kq}(\Sigma_l) \oplus C_k^{qK}(\Sigma_l) \oplus C_k^{qq}(\Sigma_l) \ ,$$
$$C_k(\Sigma) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_k(\Sigma_l) \quad \text{et} \quad C(\Sigma) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} C_k(\Sigma) \ .$$

$C(\Sigma)$ est appelée *l'algèbre composable du couple* (K,q). Il reste à définir une structure de produit dessus. Le produit d'un ij-mot composable $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ et d'un $i'j'$ mot composable $S'_1 \times S'_2 \times \cdots \times S'_{r'}$ est défini comme 0 si $j \neq i'$, et lorsque $j = i'$ comme

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r \times S'_1 \times S'_2 \times \cdots \times S'_{r'} \ .$$

Notons avant de poursuivre que nous n'avons pas encore fixé de graduation sur cette algèbre. Cela est fait dans la section 5.3.

5.2. La différentielle sur $C(\Sigma)$. Munissons maintenant l'algèbre composable $C(\Sigma)$ d'une différentielle. Elle est définie par quatre opérations de cordes δ_Q^K, δ_N^K, δ_Q^q et δ_B^q.

Les deux premières opérations δ_Q^K et δ_N^K ont déjà été introduites. Elles insèrent une pique dans une Q-corde (resp. une N-corde) d'une corde brisée lorsqu'elle intersecte K en son intérieur. Ces

deux opérations sont définies sur les 1-chaînes et les 2-chaînes

$$\delta_Q^K, \delta_N^K : C_1(\Sigma_l) \longrightarrow C_0(\Sigma_l)$$
$$\delta_Q^K, \delta_N^K : C_2(\Sigma_l) \longrightarrow C_1(\Sigma_l)$$

et étendues aux mots composables par la règle de Leibniz.

Les deux autres opérations δ_Q^q et δ_N^q sont définies de manière similaire, au point q. Pour une 2-chaîne générique de cordes brisées, elles insèrent une pique dans une Q-corde (resp. une B-corde) d'une corde brisée lorsqu'elle intersecte q en son intérieur. Elles sont illustrées sur la figure 5. Alors que les opérations δ_Q^K et δ_N^K étaient de codimension 1, ces deux nouvelles opérations sont de codimension 2

$$\delta_Q^q, \delta_B^q : C_2(\Sigma_l) \longrightarrow C_0(\Sigma_{l+2}) \ .$$

On les étend également aux mots composables par la règle de Leibniz.

L'opération δ_Q^q L'opération δ_B^q

FIGURE 5

Enfin, en étendant la différentielle singulière classique ∂ à tout mot composable, on définit la différentielle sur $C(\Sigma)$ comme

$$D := \partial + \delta_Q^K + \delta_N^K + \delta_Q^q + \delta_B^q \ .$$

Elle vérifie bien $D \circ D = 0$.

5.3. La graduation sur $C(\Sigma)$. Pour finir de munir $C(\Sigma)$ d'une structure d'algèbre différentielle graduée, il reste à définir une graduation sur $C(\Sigma)$, pour laquelle D est de degré -1.

Soit $m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. On pose

$$C_m := \bigoplus_{k+l/2=m} C_k(\Sigma_l) \ .$$

Notons que pour m entier, $C_m = C_m^{KK} \oplus C_m^{qq}$ et pour $m \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$, $C_m = C_m^{Kq} \oplus C_m^{qK}$. On opère le décalage d'indice suivant

$$\tilde{C}_m^{KK} = C_m^{KK} \ , \qquad \tilde{C}_m^{qq} = C_m^{qq} \ , \qquad \tilde{C}_m^{qK} = C_{m-1/2}^{qk} \ , \qquad \tilde{C}_m^{Kq} = C_{m+1/2}^{Kq} \ ,$$

et on pose

$$\tilde{C}_m = \tilde{C}_m^{KK} \oplus \tilde{C}_m^{qq} \oplus \tilde{C}_m^{qK} \oplus \tilde{C}_m^{Kq} \ .$$

La graduation sur $C(\Sigma)$ est alors définie par la décomposition

$$C(\Sigma) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_m$$

et on vérifie que D envoie bien $\tilde{C}_m$ dans $\tilde{C}_{m-1}$ pour ce choix de graduation.

REMARQUE. Ce choix de graduation est en fait motivé par la construction de l'isomorphisme $\Phi : C(\mathscr{R}) \to C(\Sigma)$ dans le chapitre 6. Nous renvoyons à sa démonstration dans la section 3.1 pour plus de détails.

5.4. Définition de l'homologie de cordes améliorée. $C(\Sigma)$ est munie d'une structure d'algèbre différentielle graduée pour la graduation définie par les $\tilde{C}_m$ et la différentielle $D = \partial + \delta_Q^K + \delta_N^K + \delta_Q^q + \delta_B^q$. L'homologie de cette algèbre différentielle est appelée *l'homologie de cordes améliorée* du noeud K. En fait, la différentielle D préserve la décomposition

$$C(\Sigma) = C^{KK}(\Sigma) \oplus C^{Kq}(\Sigma) \oplus C^{qK}(\Sigma) \oplus C^{qq}(\Sigma) \ ,$$

on peut donc écrire une décomposition de son homologie en

$$H_*(C(\Sigma)) = H_*(C^{KK}(\Sigma)) \oplus H_*(C^{Kq}(\Sigma)) \oplus H_*(C^{qK}(\Sigma)) \oplus H_*(C^{qq}(\Sigma)) \ .$$

Le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) est exactement le triplet $(H_0(C^{KK}(\Sigma)), H_0(C^{Kq}(\Sigma)), H_1(C^{qK}(\Sigma)))$ de cette homologie. En effet,

$$\begin{aligned} D : \tilde{C}_1^{KK}(\Sigma) = C_1^{KK}(\Sigma_0) \oplus C_0^{KK}(\Sigma_2) &\longrightarrow \tilde{C}_0^{KK}(\Sigma) = C_0^{KK}(\Sigma_0) \\ D : \tilde{C}_1^{Kq}(\Sigma) = C_1^{Kq}(\Sigma_1) \oplus C_0^{Kq}(\Sigma_3) &\longrightarrow \tilde{C}_0^{Kq}(\Sigma) = C_0^{Kq}(\Sigma_1) \\ D : \tilde{C}_2^{qK}(\Sigma) = C_1^{qK}(\Sigma_1) \oplus C_0^{qK}(\Sigma_3) &\longrightarrow \tilde{C}_1^{qK}(\Sigma) = C_0^{qK}(\Sigma_1) \end{aligned}$$

vaut à chaque fois 0 sur le deuxième terme et $\partial + \delta_Q^K + \delta_N^K$ sur le premier. Les conoyaux de ces applications définissent $(H_0(C^{KK}(\Sigma)), H_0(C^{Kq}(\Sigma)), H_1(C^{qK}(\Sigma)))$ qui est bien le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}). On peut aussi retrouver de cette manière R_{qq} comme $H_1(C^{qq}(\Sigma))$.

5.5. Prolongement du produit P. Prolongeons également le produit P défini dans la section 1.5. Soient deux chaînes de cordes brisées dans $C_{k_1}^{Kq}(\Sigma_{l_1})$ et $C_{k_2}^{qK}(\Sigma_{l_2})$. On définit leur produit P comme la chaîne de cordes brisées de $C_{k_1+k_2}^{KK}(\Sigma_{l_1+l_2-2})$ obtenue en concaténant les cordes brisées en x_1 et en supprimant la B-corde formée par la concaténation de la B-corde finale de la première corde brisée avec la B-corde initiale de la deuxième corde brisée.

Ce produit P définit un morphisme de degré -1 pour la graduation $\tilde{C}_*^{ij}$,

$$P : \tilde{C}_*^{Kq} \otimes \tilde{C}_*^{qK} \longrightarrow \tilde{C}_*^{KK} \ .$$

5.6. Comment retrouver l'homologie de cordes simple ? Expliquons enfin comment retrouver la $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée $(C(\Sigma), \partial + \delta_N + \delta_Q)$ du chapitre 2 à partir de $(C(\Sigma), D)$.

On appelle *Q-corde mixte* d'une corde brisée une Q-corde dont l'extrémité initiale et l'extrémité finale sont sur deux composantes distinctes de $K \cup \{q\}$ et *Q-corde pure* d'une corde brisée une Q-corde dont l'extrémité initiale et l'extrémité finale sont sur la même composante de $K \cup \{q\}$

On définit sur $C(\Sigma)$ la filtration comptant le nombre de Q-cordes mixtes,

$$C(\Sigma) = \mathscr{F}^0 C(\Sigma) \supset \mathscr{F}^1 C(\Sigma) \supset \mathscr{F}^2 C(\Sigma) \supset \cdots$$

où $\mathscr{F}^k C(\Sigma)$ est le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les mots composables dont le nombre total de Q-cordes mixtes vaut au moins k. Cela définit une filtration sur les $C^{ij}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} C^{KK}(\Sigma) &= \mathscr{F}^0 C^{KK}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^2 C^{KK}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^4 C^{KK}(\Sigma) \supset \cdots \\ C^{Kq}(\Sigma) &= \mathscr{F}^1 C^{Kq}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^3 C^{Kq}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^5 C^{Kq}(\Sigma) \supset \cdots \\ C^{qK}(\Sigma) &= \mathscr{F}^1 C^{qK}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^3 C^{qK}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^5 C^{qK}(\Sigma) \supset \cdots \\ C^{qq}(\Sigma) &= \mathscr{F}^0 C^{qq}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^2 C^{qq}(\Sigma) \supset \mathscr{F}^4 C^{qq}(\Sigma) \supset \cdots \ . \end{aligned}$$

Cette filtration est compatible avec la multiplication, $\mathscr{F}^k C(\Sigma) \cdot \mathscr{F}^h C(\Sigma) \subset \mathscr{F}^{k+h} C(\Sigma)$, et avec la différentielle, $D(\mathscr{F}^k C(\Sigma)) \subset \mathscr{F}^k C(\Sigma)$. On note $C^{ij}(\Sigma)^{(k)} := \mathscr{F}^k C^{ij}(\Sigma)/\mathscr{F}^{k+2} C^{ij}(\Sigma)$ le

$\mathbb{Z}$-module gradué engendré par les mots composables de $C^{ij}(\Sigma)$ contenant au total exactement k Q-cordes mixtes. D passe alors au quotient en une différentielle

$$D : C^{ij}(\Sigma)^{(k)} \longrightarrow C^{ij}(\Sigma)^{(k)} \ .$$

Alors, la $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée $(C^{KK}(\Sigma)^{(0)}, D)$ est exactement la $(C(\Sigma), \partial + \delta_N + \partial_Q)$ du chapitre 2.

Chapitre 4

Vers l'homologie de contact legendrienne

On renvoie par exemple à [**Gei08**] et à [**McD12**] pour les définitions et résultats de base de la géométrie de contact, de la géométrie symplectique et de la théorie des courbes holomorphes.

Dans ce chapitre, ainsi que dans les deux qui vont suivre, on définit les grandes lignes d'un invariant algébrique associé à un couple (M, Λ) composé d'une variété de contact M et d'une sous-variété legendrienne Λ de M : *l'homologie de contact legendrienne*. La variété de contact M sera S^*Q munie de la forme de contact canonique $\lambda = pdq$ et la legendrienne Λ sera Λ_K ou $\Lambda_K \cup \Lambda_q$ où Q est $\mathbb{R}^3$ et Λ_N est le fibré conormal unitaire d'une sous-variété $N \subset \mathbb{R}^3$. C'est un exemple de construction qui s'inscrit dans le cadre plus général de la SFT (Symplectic Field Theory).

Plus précisément, on définira une algèbre différentielle graduée associée au couple (M, Λ), pour laquelle la différentielle est construite par un comptage de disques holomorphes satisfaisant certaines propriétés. On introduit dans ce chapitre les définitions et résultats qui nous serviront à la définition de l'homologie de contact legendrienne dans les chapitres 5 et 6.

1. Disques holomorphes

1.1. Disques holomorphes d'une variété symplectique. Dans les chapitres 5 et 6 on s'intéresse à des applications à valeurs dans les variétés symplectiques $\mathbb{R} \times S^*Q$ et T^*Q, appelées *disques holomorphes*. Ici, la variété $\mathbb{R} \times S^*Q$ est munie de la structure symplectique $\omega = d(e^t\lambda)$ induite par la structure de contact $\lambda = pdq$ sur S^*Q, et est appelée la *symplectisation* de S^*Q. La variété T^*Q est quant à elle munie de sa structure symplectique standard $\omega = d(pdq)$. Les variétés symplectiques $\mathbb{R} \times S^*Q$ et $T^*Q \backslash Q$ sont alors symplectomorphes à travers l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times S^*Q &\longrightarrow T^*Q \backslash Q \\ (t, q, p) &\longmapsto (q, e^t p) \ . \end{aligned}$$

On note dans la suite N une des deux variétés symplectiques T^*Q ou $\mathbb{R} \times S^*Q$ et on pose $M := S^*Q$. On pose de plus $\xi := \mathrm{Ker}\lambda$, qui est une distribution sur M de rang 4. On appelle *sous-variété legendrienne de M* toute sous-variété $L \subset M$ de dimension 2 telle que pour tout $p \in L$, l'espace tangent $T_pL \subset \xi_p$. On définit également le *champ de vecteurs de Reeb* R sur M comme l'unique champ de vecteurs solution des équations

$$\lambda(R) = 1 \qquad\qquad d\lambda(R, \cdot) = 0 \ .$$

On appelle *sous-variété lagrangienne* de N toute sous-variété $L \subset N$ de dimension 3 telle que pour tout $p \in L$, l'espace tangent T_pL est lagrangien pour ω_p.

Soit Λ une legendrienne de la variété de contact M. On appelle *corde de Reeb* de Λ une solution $a : [0, T] \to M$ de l'équation $\dot{a} = R$ telle que $a(0), a(T) \in \Lambda$. On vérifie de plus par un calcul rapide qu'à toute legendrienne Λ de M est associée la lagrangienne $\mathbb{R} \times \Lambda$ de $\mathbb{R} \times M$.

Dans le chapitre 5, on travaille avec deux lagrangiennes : la lagrangienne $\mathbb{R} \times \Lambda_K$ de $\mathbb{R} \times S^*Q$ où Λ_K est le fibré conormal en sphère de K, et la lagrangienne $L = L_K \cup Q$ de T^*Q où L_K est le fibré conormal de K. La lagrangienne L est l'union des deux lagrangiennes L_K et Q qui s'intersectent proprement en la variété K.

On choisit sur N une structure presque-complexe J compatible avec la forme symplectique ω : cela signifie par définition que $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot,\cdot)$, et que la forme bilinéaire $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne sur N. En notant $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$, on appelle disque holomorphe une application $\mathbb{D} \to N$ de classe C^∞, qui vérifie l'égalité

$$J \circ du = du \circ i \ ,$$

où i est la structure complexe standard sur $\mathbb{D}$. Notons que cette définition dépend d'un choix de structure presque-complexe sur N. Néanmoins nous demeurerons vague à ce sujet, et préciserons seulement le choix d'une structure presque complexe quand cela sera déterminant.

1.2. Pointes d'un disque holomorphe. En fait, on ne va pas exactement regarder des applications partant de $\mathbb{D}$ mais plutôt de $\mathbb{D}\backslash\{x_1, \dots, x_n\}$ où les x_i sont des points de $\partial\mathbb{D}$. Les points x_i sont appelés les *pointes* du disque holomorphe. On imposera alors, en fonction des situations, différents comportements au bord. Une bonne façon de voir un disque holomorphe est celle de la figure 1.

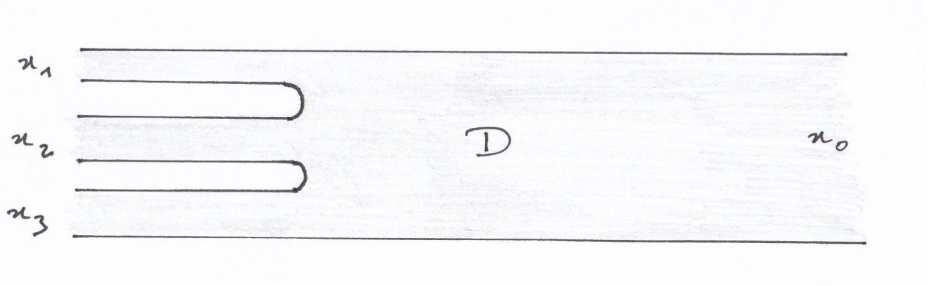


FIGURE 1. Un exemple de disque à quatre pointes. Les bords du ruban sont ceux du disque tandis que les différentes bandes allant vers $\pm\infty$ correspondent aux pointes du disque.

On garde désormais le point de vue de la figure 1. Soit u un disque holomorphe à valeurs dans $\mathbb{R} \times S^*Q$. Au voisinage de x_0 on peut en particulier voir u comme une application de $\mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R} \times S^*Q$. On note a la projection de u en $\mathbb{R}$, et f la projection de u en S^*Q. On dit que le disque holomorphe u a une *pointe positive* en x_0 s'il existe une corde de Reeb $c : [0,T] \to S^*Q$ et une constante $a_0 \in \mathbb{R}$ telles que

$$a(s,t) - Ts - a_0 \to 0 \qquad\qquad f(s,t) \to c(Tt)$$

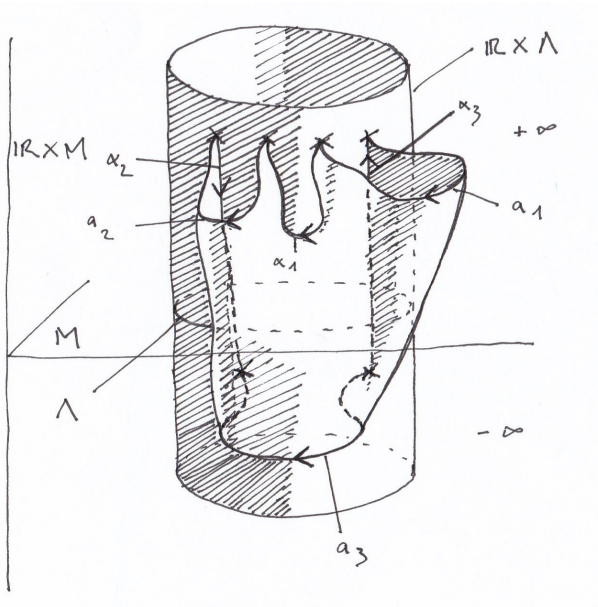
uniformément en t lorsque $s \to \infty$. On dira également que le disque holomorphe est *positivement asymptotique à* c en x_0. La notion de *pointe négative* est définie en demandant cette fois que

$$a(s,t) + Ts - a_0 \to 0 \qquad\qquad f(s,t) \to c(-Tt)$$

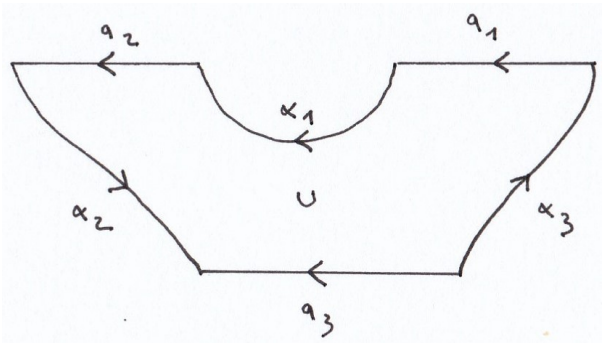
uniformément lorsque $s \to \infty$. On a représenté sur la figure 2 un exemple de disque holomorphe à valeurs dans la variété symplectique $\mathbb{R} \times M$, à bord sur $\mathbb{R} \times \Lambda$ et avec deux pointes positives et une pointe négative.

La terminologie est la même pour un disque holomorphe à valeurs dans T^*Q, en voyant $T^*Q\backslash Q$ comme $\mathbb{R} \times S^*Q$ à travers le symplectomorphisme du début de cette section.

En fait, on imposera des conditions au bord sur les disques holomorphes que l'on étudiera dans la partie suivante : le disque holomorphe u devra envoyer le bord $\partial\mathbb{D}$ dans une lagrangienne L de la variété symplectique N. On autorise pour cela un troisième comportement possible aux pointes : *l'intersection lagrangienne*. En notant $L = L_K \cup Q$ et $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (T^*Q, L)$ un disque holomorphe



Une représentation plus géométrique du disque holomorphe u, où l'on a triché sur la dimension de M et Λ



Une représentation simplifiée du disque holomorphe u

FIGURE 2. Un exemple de disque holomorphe u à valeurs dans $\mathbb{R} \times M$ et à bord sur $\mathbb{R} \times \Lambda$, avec deux pointes positives a_1 et a_2 et une pointe négative a_3. Les chemins α_i correspondent au parcours du bord $\partial\mathbb{D}$ entre chaque pointe, dans le sens trigonométrique.

à valeurs dans T^*Q envoyant $\partial\mathbb{D}$ sur L, on dit que u a une *pointe d'intersection lagrangienne* en la pointe x_i s'il existe $p \in K$ tel que

$$u(s,t) \to p$$

uniformément en t lorsque $s \to \infty$.

On conclut cette section en introduisant les deux cas particuliers de disques holomorphes dont nous aurons besoin par la suite. On note D le disque unité avec $m+1$ pointes $x_0, \dots, x_m$ sur $\partial\mathbb{D}$ écrites dans l'ordre trigonométrique. Un disque holomorphe $u : D \to \mathbb{R} \times S^*Q$ qui envoie ∂D sur $\mathbb{R} \times \Lambda_K$, a une pointe positive en x_0 et m pointes négatives en les x_i pour $i \geq 1$, est appelé *disque de symplectisation à m pointes négatives*. Un disque holomorphe $u : D \to T^*Q$ qui envoie ∂D sur $L_K \cup Q$, a une pointe positive en x_0 et m pointes d'intersection lagrangienne en les x_i pour $i \geq 1$, est appelé *disque de cobordisme à m pointes d'intersections lagrangiennes*.

1.3. Disques brisés. On utilisera dans le chapitre suivant le fait que toute suite de disques holomorphes de cobordisme ou toute suite de disques holomorphes de symplectisation admet une sous-suite convergente (pour une certaine définition de la convergence). On introduit à cet effet le formalisme des disques holomorphes brisés dans cette section. L'idée est la suivante : lorsqu'on regarde une suite de disques holomorphes vérifiant tous les mêmes propriétés (par exemple ce sont tous des disques de cobordisme à m pointes d'intersection lagrangienne et avec la même pointe positive a), il n'est pas toujours possible de la faire converger vers un disque holomorphe possédant les mêmes propriétés. Cependant, il est possible de « casser les disques en plus petits disques » sur lesquels la définition de convergence prend du sens.

On appelle dans la suite *disque source* un disque D à $m+1$ pointes sur son bord, $x_0, \dots, x_m$: la pointe x_0 est formellement désignée comme la *pointe positive* tandis que les autres pointes sont

appelées les *pointes négatives*. Un *disque source brisé* $\boldsymbol{D}_m$ *à* r *niveaux et* $m+1$ *pointes* est défini comme une union finie de disques sources

$$\boldsymbol{D}_m = D^{1,1} \cup (D^{2,1} \cup \cdots \cup D^{2,l_2}) \cup \cdots \cup (D^{r,1} \cup \cdots \cup D^{r,l_r}) \ ,$$

où les disques $D^{j,1} \cup \cdots \cup D^{j,l_j}$ sont appelés les *disques du* $j^{\text{ème}}$ *niveau* et vérifient les propriétés suivantes

(a) Pour tout $j \leq r$, la pointe positive a d'un disque source $D^{j,k}$ dans le $j^{\text{ème}}$ niveau est formellement attachée à la pointe négative d'un disque source $D^{j-1,h}$ dans le $(j-1)^{\text{ème}}$ niveau. On dit alors que $D^{j,k}$ est attaché à $D^{j-1,h}$ en la pointe a.

(b) Étant donnée une pointe négative d'un disque source d'un niveau $j < r$, il existe un unique disque source du niveau $j+1$ relié à cette pointe.

(c) Le nombre total de pointes négatives au dernier niveau r est égal à m.

Par exemple, un disque source brisé à 1 niveau est un disque source. Un exemple de disque source brisé à 2 niveaux est représenté sur la figure 3.

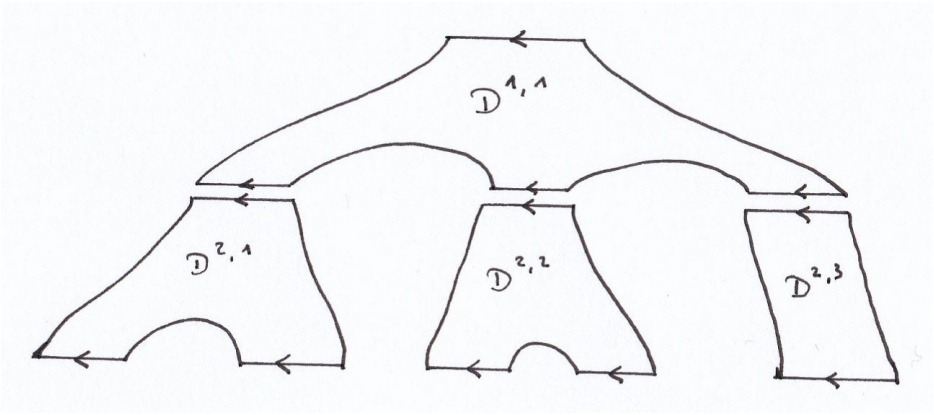


FIGURE 3. Un exemple de disque source brisé à 2 niveaux et 6 pointes

2. Espaces de modules

Considérons l'espace des disques holomorphes satisfaisant un ensemble de conditions $\mathcal{C}$. Alors, le groupe des biholomorphismes du disque source induit une action sur cet espace par composition à la source. L'espace obtenu en quotientant par l'action de ce groupe de biholomorphismes est appelé *l'espace de modules* associé aux conditions $\mathcal{C}$. En faisant un choix générique de structure presque-complexe, on peut souvent munir un espace de modules d'une structure de variété de dimension finie et on dispose d'une formule explicite pour la dimension. Sous certaines conditions, ces espaces peuvent même être compactifiés et être munis d'une orientation naturelle. Enfin, pour un choix de structure presque-complexe $\mathbb{R}$-invariante, il est parfois idoine de regarder l'espace de modules quotienté par l'action de $\mathbb{R}$. Nous manipulerons de nombreux espaces de modules dans les chapitres suivants, par exemple pour définir la différentielle de l'homologie de contact legendrienne.

Chapitre 5

Homologie de contact de noeud simple

Plutôt que d'être vu directement comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$, on peut étudier un noeud K à travers son fibré conormal en sphères $\Lambda_K = L_K \cap S^*Q$ qui est une legendrienne de la variété de contact S^*Q. Cette legendrienne est en fait un invariant complet de noeud :

THÉORÈME 9 ([**She16**]). *Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés de $\mathbb{R}^3$.*

(a) S'il existe une isotopie de legendriennes entre Λ_{K_1} et Λ_{K_2}, alors K_1 et K_2 sont isotopes en tant que noeuds orientés à inverse et image miroir près.

(b) S'il existe une isotopie de legendriennes paramétrisées entre Λ_{K_1} et Λ_{K_2}, alors K_1 et K_2 sont isotopes en tant que noeuds orientés.

En voyant le fibré conormal en sphère Λ_{K_i} comme le bord d'un voisinage tubulaire de K_i, une isotopie de legendriennes paramétrisées est par définition une isotopie de legendriennes qui envoie le couple périphérique de K_1, $(\mu_1, \lambda_1) \in H_1(\Lambda_{K_1})$, sur le couple périphérique de K_2, $(\mu_2, \lambda_2) \in H_1(\Lambda_{K_2})$. Notons également qu'une isotopie entre deux noeuds induit une isotopie de legendriennes paramétrisées entre leurs fibrés conormaux en sphères.

À l'aune de ce théorème, on peut espérer que certains invariants algébriques qui sont associés par la SFT à la legendrienne Λ_K, définissent des invariants complets de noeud. On donne dans ce chapitre les grandes lignes de la construction d'un de ces invariants : *l'homologie de contact legendrienne* de Λ_K. Elle définit un invariant de noeud orienté, qu'on appelle *homologie de contact de noeud simple*. C'est en fait de l'homologie de contact legendrienne qu'est née l'homologie de cordes simple : cette dernière a été construite en partie dans le but d'être reliée à l'homologie de contact de noeud simple. On démontre ainsi en conclusion de ce chapitre que ces deux homologies sont isomorphes en degré 0. On ne sait pas à ce jour si l'une d'elles forme un invariant complet de noeud.

On étudie dans un premier temps les espaces de modules de disques holomorphes servant à construire la différentielle de l'homologie de contact de noeud simple. On définit ensuite l'algèbre différentielle graduée $C(\mathscr{R})$ induisant l'homologie de contact de noeud simple, qu'on munit d'une filtration similaire à celle de $C(\Sigma)$. Après avoir étudié des espaces de modules de disques holomorphes dont les bords peuvent être vus comme des cordes brisées de K, nous définissons un morphisme d'algèbres différentielles graduées Φ entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Lambda)$. Finalement, en utilisant les filtrations définies sur $C(\mathscr{R})$ et $C(\Lambda)$, on montre que Φ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives en degré 0.

Ce chapitre donne un aperçu des démonstrations et résultats de l'article [**CELN16**].

1. Préliminaires

Soit K un noeud orienté de $Q := \mathbb{R}^3$. On pose $M := S^*Q$ le fibré cosphérique muni de sa structure de contact associée à la 1-forme $\lambda := pdq$ et $\Lambda := \Lambda_K$ le fibré conormal unitaire de K. La variété Λ est une legendrienne de la variété de contact M. Il y a alors une correspondance bijective entre les cordes de Reeb de Λ et les *cordes binormales* de K, c'est-à-dire les segments géodésiques de Q rencontrant K de manière orthogonale en leurs extrémités. On choisit de plus un point base

$x_0 \in \Lambda$ et pour toute corde de Reeb a, des chemins de raccordement des extrémités de a à x_0 à valeurs dans Λ.

Observons maintenant que les cordes binormales de K correspondent exactement aux points critiques de la fonction distance sur $K \times K$ privé de sa diagonale. On suppose dans la suite que K satisfait la condition de généricité suivante : toute corde binormale de K correspond à un point critique de Morse de cette fonction distance. Il est toujours possible de déformer K par isotopie de sorte que K satisfasse cette condition. Le degré d'une corde de Reeb a de Λ est alors défini comme son indice de Morse :

$$|a| := \mathrm{ind}(a).$$

Ce degré peut prendre trois valeurs différentes dans ce cas particulier : 0, 1 ou 2.

On peut également définir ce degré à partir de l'indice de Maslov de a : on renvoie à la partie 6.1. de l'article [**CELN16**] pour plus de détails à ce sujet.

2. Les espaces de modules $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$

2.1. Définition de l'espace de modules $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$. Soient a une corde de Reeb et $\boldsymbol{b} = b_1 \dots b_m$ un mot en cordes de Reeb. On définit $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$ l'espace de modules des disques de symplectisation $u : D = \mathbb{D}\backslash\{x_0,\dots,x_m\} \to \mathbb{R}\times S^*Q$ (où les x_i sont ordonnées dans l'ordre trigonométrique sur $\partial\mathbb{D}$) tels que

(a) u envoie le bord $\partial\mathbb{D}\backslash\{x_0,\dots,x_m\}$ sur $\mathbb{R}\times\Lambda$,

(b) u est positivement asymptotique à a en x_0,

(c) u est négativement asymptotique à b_i en x_i.

On peut trouver un exemple de disque de symplectisation u de $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$ sur la figure 1.

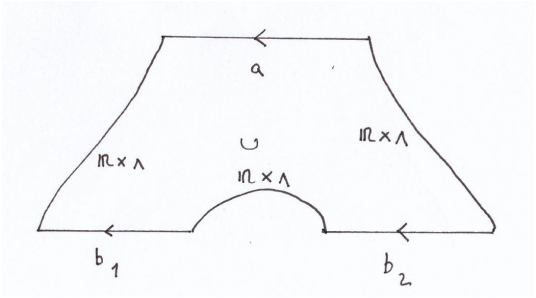


FIGURE 1. Un exemple de disque de symplectisation à 2 pointes négatives b_1 et b_2

2.2. Convergence d'une suite de disques de symplectisation. On va voir dans la section suivante que les espaces de modules $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$ peuvent en fait être munis de structures de variétés, et que les variétés quotients $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}$ peuvent même être compactifiées. On énonce ici, avec le formalisme des disques source brisés, le résultat de compacité déterminant dans la démonstration des énoncés de la section suivante.

On appelle bande triviale au-dessus d'une corde de Reeb c, le disque holomorphe représenté par l'application

$$\begin{aligned} u_c : \mathbb{R}\times[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}\times S^*Q \\ (s,t) &\longmapsto (Ts, c(Tt)) \ . \end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{D}_m$ un disque source brisé. Un *disque de symplectisation brisé à r niveaux et m pointes négatives* est une famille de disques holomorphes $v^{j,k}$ définis sur les $D^{j,k}$ tels que

(a) Pour tout $1 \le j \le r$ et tout $1 \le k \le l_j$, $v^{j,k}$ est un élément de $\mathscr{M}^{sy}(a^{j,k};b_1^{j,k},\dots,b_s^{j,k})$.

(b) Pour tout $j > 1$ la corde de Reeb $a^{j,k}$ à la pointe positive de $v^{j,k}$ est la corde de Reeb $b^{j-1,k'}$ à la pointe négative du disque $v^{j-1,k'}$ de $D^{j-1,k'}$ à laquelle $D^{j,k}$ est attachée.

(c) Il existe au moins un $v^{j,k}$ qui n'est pas une bande triviale.

Enfin, on appelle *arc* dans un disque source un chemin simple qui n'intersecte la frontière de D qu'en ses extrémités.

On dit alors qu'une suite de disques de symplectisation

$$u_j \in \mathscr{M}^{sy}(a; b_1, \dots, b_s)$$

converge vers un disque de symplectisation brisé s'il existe des arcs disjoints dans les domaines des u_j qui décomposent leur domaine en un disque source brisé tel que, dans le complémentaire de ces arcs, les applications u_j convergent uniformément sur tout compact vers les applications correspondantes du disque de symplectisation brisé. L'illustration de ce phénomène est représentée sur la figure 2.

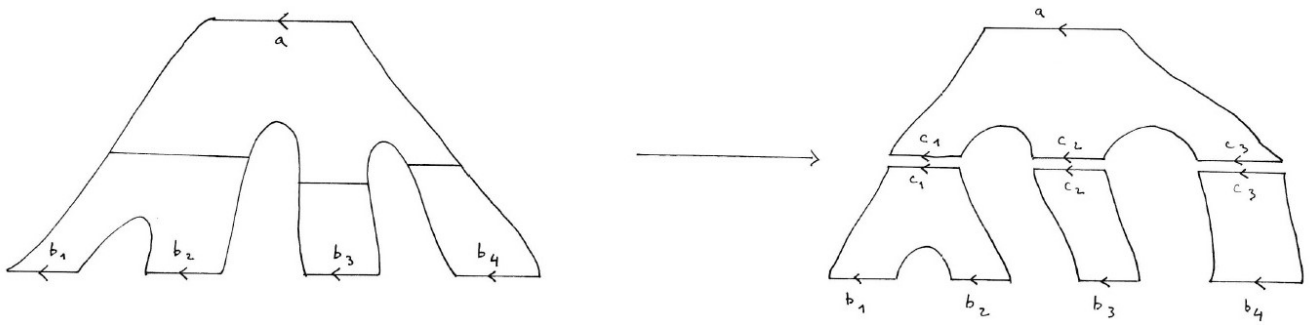


FIGURE 2. Convergence d'une suite de disques de symplectisation vers un disque de symplectisation brisé à 2 niveaux. Les arcs des domaines des disques de symplectisation sont représentés par les segments horizontaux à gauche.

PROPOSITION 22. *Toute suite de disques $u_j \in \mathscr{M}^{sy}(a; b_1, \dots, b_s)$ admet une sous-suite qui converge vers un disque de symplectisation brisé.*

2.3. Structure de variété sur $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$. Pour un choix générique de structure presque-complexe, l'espace de modules $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ peut être muni d'une structure de variété orientée de dimension

$$\dim(\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})) = |a| - |\boldsymbol{b}| = |a| - \sum_{i=1}^{m} |b_i| \ .$$

On dit que $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ est de type $[i, j]^{sy}$ si $|a| = i$ et $|\boldsymbol{b}| = j$. On rappelle de plus que le degré de a peut prendre pour valeurs 0, 1 et 2. Il existe donc six types de variétés $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$: $[0, 0]^{sy}$, $[1, 0]^{sy}$, $[1, 1]^{sy}$, $[2, 0]^{sy}$, $[2, 1]^{sy}$ et $[2, 2]^{sy}$.

En fait, la structure presque-complexe choisie sur $\mathbb{R} \times S^*Q$ sera toujours $\mathbb{R}$-invariante, et induit donc une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$. La variété $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})/\mathbb{R}$ est alors encore une variété orientée, de dimension $|a| - |\boldsymbol{b}| - 1$. Ce résultat ne nous intéresse donc que pour les variétés de type $[2, 0]^{sy}$, $[2, 1]^{sy}$ et $[1, 0]^{sy}$. Plus précisément, on dispose de la proposition suivante :

PROPOSITION 23. *Si $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ est un espace de modules de type $[1, 0]^{sy}$ ou $[2, 1]^{sy}$ alors le quotient $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})/\mathbb{R}$ est une variété compacte naturellement orientée de dimension 0.*

Si $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ est un espace de modules de type $[2, 0]^{sy}$ alors $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})/\mathbb{R}$ peut être naturellement compactifiée en une variété compacte de dimension 1, notée $\bar{\mathscr{M}}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$. Les points du bord de $\bar{\mathscr{M}}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ sont en correspondance avec les disques à deux niveaux $\hat{v}$ tels que v^1 est de type $[2, 1]^{sy}$

et exactement un disque du deuxième niveau $v^{2,s}$ est de type $[1,0]^{sy}$ tandis que tous les autres sont des bandes triviales.

La formation du bord du quotient d'un espace de modules de type $[2,0]^{sy}$ est représentée sur la figure 3.

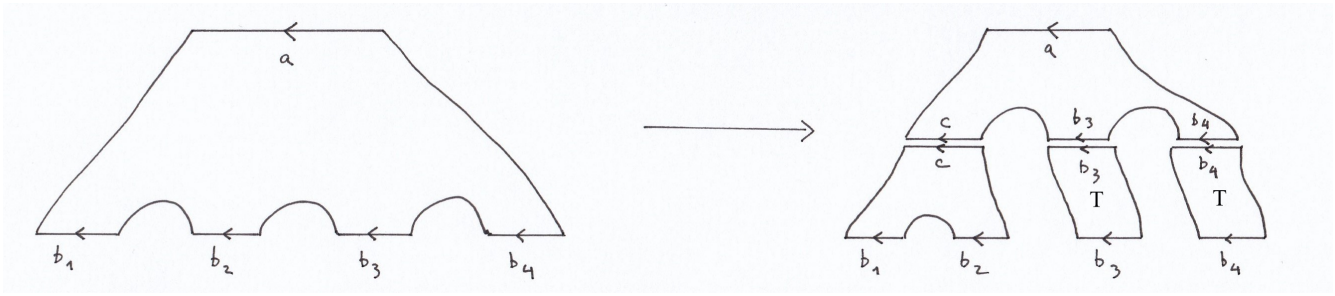


FIGURE 3. La formation du bord de $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}$ pour les espaces de modules de type $[2,0]^{sy}$. Les T désignent les bandes triviales.

3. Définition de l'homologie de contact legendrienne de Λ

3.1. Chemins de Reeb. On note dans la suite $P_{x,y}\Lambda$ l'espace des chemins $\gamma : [a,b] \to \Lambda$ tels que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. On remarque que $P_{x_0,x_0}\Lambda$ est exactement l'espace de Moore des lacets de Λ basés en x_0, $\Omega_{x_0}\Lambda$.

DÉFINITION 27. On appelle *chemin de Reeb de Λ à l cordes de Reeb* une expression de la forme $\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_l a_l \alpha_{l+1}$ où les $a_i : [0,T_i] \to M$ sont des cordes de Reeb et les α_i sont des chemins tels que

$$\alpha_1 \in P_{x_0 a_1(T_1)}\Lambda, \qquad \alpha_i \in P_{a_{i-1}(0)a_i(T_i)}\Lambda \text{ pour } 2 \le i \le l, \qquad \alpha_{l+1} \in P_{a_l(0)x_0}\Lambda\ .$$

On peut voir un chemin de Reeb de la manière représentée sur la figure 4.

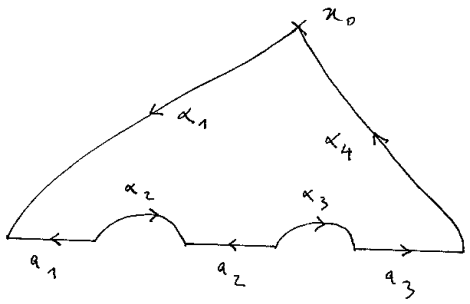


FIGURE 4. Un exemple de chemin de Reeb

À un disque holomorphe $u \in \mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$ on peut associer le chemin de Reeb comme suit. Parcourir le bord du domaine de u dans le sens trigonométrique définit une suite de chemins $\beta_1, \dots, \beta_l$ dans $\mathbb{R} \times \Lambda$ dont on prend la projection sur Λ,

$$\beta_1 \in P_{a(T)b_1(T_1)}\Lambda, \qquad \beta_i \in P_{b_{i-1}(0)b_i(T_i)}\Lambda \text{ pour } 2 \le i \le l, \qquad \beta_{l+1} \in P_{b_l(0)a(0)}\Lambda\ ,$$

comme sur la figure 5.

On obtient ainsi un chemin de Reeb,

$$\partial u := \beta_1 b_1 \beta_2 b_2 \dots \beta_l b_l \beta_{l+1}\ ,$$

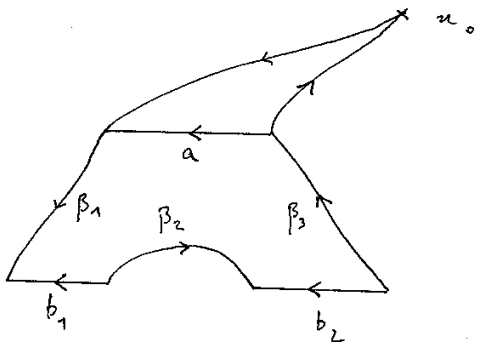


FIGURE 5. Le chemin de Reeb associé à ce disque holomorphe u est $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2 \beta_3$ où β_1 et β_3 sont raccordés à x_0 par les raccordements de la corde de Reeb a à x_0.

où β_1 et β_{l+1} ont été raccordés au point x_0 par les raccordements de a qu'on avait fixés dans le premier paragraphe de la partie 1.

3.2. L'algèbre différentielle graduée. Soit $l \geq 0$. On note $\mathscr{R}^l$ l'espace des chemins de Reeb à l cordes, muni de la topologie pour les espaces de chemins. À toute collection de l cordes de Reeb correspond une composante connexe de $\mathscr{R}^l$. On pose alors

$$\mathscr{R} := \coprod_{l \geq 0} \mathscr{R}^l \ .$$

On note $C(\mathscr{R})$ les chaînes singulières à valeurs dans $\mathscr{R}$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

$$C(\mathscr{R}) := \bigoplus_{d \geq 0} C_d(\mathscr{R}) \ .$$

À cet espace sont associées deux graduations : la graduation d associée au degré de la chaîne singulière, qu'on appelle *degré de chaîne*, et la graduation associée aux degrés des cordes de Reeb $\sum_{i=1}^{l} |b_i|$, qu'on appelle *degré de cordes*. La graduation totale sur $C(\mathscr{R})$ est alors définie comme la somme de ces deux graduations.

La concaténation de chemins de Reeb au point base et le produit de chaînes définissent sur $C(\mathscr{R})$ une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre graduée. Elle contient la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre graduée

$$C(\mathscr{R}^0) := C(\Omega_{x_0}\Lambda) \ .$$

On définit enfin sur $C(\mathscr{R})$ la différentielle suivante,

$$\partial_\Lambda := \partial^{sing} + \partial^{sy} : C(\mathscr{R}) \longrightarrow C(\mathscr{R}) \ .$$

∂^{sing} est la différentielle singulière classique, et on va définir ∂^{sy} dans les lignes qui suivent. Soit $u \in \mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$. On peut définir un nouveau chemin de Reeb de la manière représentée sur la figure 6. Si la corde de Reeb a associée à la pique positive de u apparaît dans un chemin de Reeb $\boldsymbol{a} := \alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_l a_l \alpha_{l+1}$ en tant que $a_i = a$ alors on peut former un nouveau chemin de Reeb

$$\partial(u) \cdot_i \boldsymbol{a} := \alpha_1 a_1 \dots \tilde{\alpha}_i \partial(u) \tilde{\alpha}_{i+1} \dots a_l \alpha_{l+1} \ ,$$

où le chemin $\tilde{\alpha}_i$ (resp. $\tilde{\alpha}_{i+1}$) est la concaténation du chemin α_i (resp. α_{i+1}) avec le chemin β_1 (resp. β_{l+1} de $\partial(u)$). Pour une chaîne $\boldsymbol{a} \in C(\mathscr{R})$ de chemins de Reeb de type $\boldsymbol{a} = \alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_l a_l \alpha_{l+1}$, on définit alors

$$\partial^{sy}(\boldsymbol{a}) := \sum_{i=1}^{l} \sum_{\substack{|a_i|-|\boldsymbol{b}|=1 \\ u \in \mathscr{M}^{sy}(a_i;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}}} \varepsilon (-1)^{d+|a_1|+\dots+|a_{i-1}|} \partial(u) \cdot_i \boldsymbol{a} \ ,$$

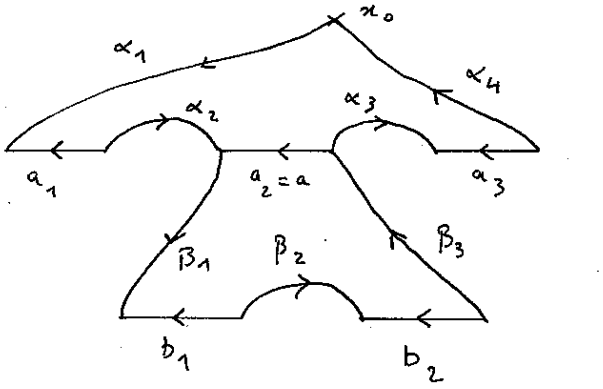


FIGURE 6. La définition de $\partial^{sy}(a)$

où d est le degré de la chaîne $\boldsymbol{a}$ et ε est le signe associé à l'orientation au point u de la variété compacte orientée de dimension 0, $\mathscr{M}^{sy}(a_i;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}$. ∂^{sy} préserve le degré de chaîne et diminue le degré de cordes de 1 tandis que ∂^{sing} préserve le degré de cordes et diminue le degré de chaîne de 1. Ainsi ∂_Λ est de degré -1 pour le degré total.

PROPOSITION 24. *Le morphisme $\partial_\Lambda : C(\mathscr{R}) \to C(\mathscr{R})$ est une différentielle pour l'algèbre graduée $C(\mathscr{R})$. L'homologie associée à cette algèbre différentielle graduée est appelée* homologie de contact de noeud simple de K, *et est notée $H_*^{contact}(K)$.*

DÉMONSTRATION. Les égalités $\partial^{sing} \circ \partial^{sing} = 0$ et $\partial^{sing} \circ \partial^{sy} + \partial^{sy} \circ \partial^{sing} = 0$ s'obtiennent directement. Pour démontrer que $\partial_\Lambda \circ \partial_\Lambda = 0$ il reste donc à démontrer que $\partial^{sy} \circ \partial^{sy} = 0$.

D'après la formule définissant ∂^{sy} il suffit de vérifier cette égalité sur les chaînes de chemins de Reeb de la forme $\alpha_1 a \alpha_2$, l'égalité générale se déduisant par la règle de Leibniz. Lorsque a est de degré 0 ou 1, l'égalité $\partial^{sy} \circ \partial^{sy}(\alpha_1 a \alpha_2) = 0$ est vraie car ∂^{sy} diminue le degré de cordes par 1. Supposons maintenant que a est de degré 2. Alors les contributions à la somme $\partial^{sy} \circ \partial^{sy}(a)$ sont en correspondance avec les bords orientés des espaces de modules $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$ de type $[2,0]^{sy}$, ce qui implique que $\partial^{sy} \circ \partial^{sy}(a) = 0$.

On a traité tous les degrés possibles pour a, le morphisme ∂_Λ est bien une différentielle pour l'algèbre graduée $C(\mathscr{R})$. □

Ainsi, $(C(\mathscr{R}), \partial_\Lambda)$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée. On remarque de plus qu'elle contient comme sous-$\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée

$$(C(\mathscr{R}^0), \partial^{sing}) = (C(\Omega_{x_0}\Lambda), \partial^{sing}) \ .$$

L'homologie de contact de noeud simple de K est alors une algèbre non commutative sur l'anneau

$$H_*(\Omega_{x_0}\Lambda, \partial^{sing}) \subset H_0^{contact}(K) \ .$$

Démontrons que $H_*(\Omega_{x_0}\Lambda, \partial^{sing}) = \mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda)]$. Notons en premier lieu que $\Lambda \cong \mathbb{T}^2$ est un $K(\pi, 1)$. Sachant que pour tout i, $\pi_i(\Omega_{x_0}\Lambda, e_{x_0}) = \pi_{i+1}(\Lambda, x_0)$, on dispose des égalités suivantes

$$\pi_0(\Omega_{x_0}\Lambda, e_{x_0}) = \pi_1(\Lambda, x_0) \qquad\qquad \pi_i(\Omega_{x_0}\Lambda, e_{x_0}) = 0 \ \forall \ i \geq 1 \ .$$

Le théorème de Hurewicz assure que le premier groupe d'homologie non trivial de $\Omega_{x_0}\Lambda$ en degré ≥ 1 apparaît en même degré que son premier groupe d'homotopie non trivial. Ainsi, l'homologie singulière de $\Omega_{x_0}\Lambda$ est concentrée en degré 0 et

$$H_0(\Omega_{x_0}\Lambda, \partial^{sing}) = \bigoplus_{\pi_0(\Omega_{x_0}\Lambda)} \mathbb{Z} = \bigoplus_{\pi_1(\Lambda)} \mathbb{Z} \ ,$$

et la structure multiplication sur $H_0(\Omega_{x_0}\Lambda)$ est induite par la structure de groupe sur $\pi_1(\Lambda)$. On a donc démontré que

$$H_0(\Omega_{x_0}\Lambda, \partial^{sing}) = \mathbb{Z}\left[\pi_1(\Lambda)\right] \ .$$

On fixe un difféomorphisme entre un voisinage tubulaire N de K et un voisinage de K dans son fibré conormal L_K. Cela induit un difféomorphisme entre L_K et N. On peut alors voir un méridien μ et une longitude λ de K comme un élément de $\pi_1(\Lambda)$ sous cette identification. Le couple périphérique de K induit donc une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur $H_0^{contact}(K)$.

3.3. La filtration sur $C(\mathscr{R})$. Étant donné $\boldsymbol{a} = \alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_l a_l \alpha_{l+1}$ un élément de $C(\mathscr{R})$, on associe à $\boldsymbol{a}$ la longueur

$$L(\boldsymbol{a}) := \sum_{i=1}^{l} L(a_i) \ ,$$

où $L(a_i) = \int_{a_i} \lambda$ désigne l'action de la corde de Reeb a_i, qui est également égale à sa longueur en tant que corde binormale de K. La longueur est préservée par l'opérateur ∂^{sing} et, de part la proposition qui suit, décroît sous l'action de l'opérateur ∂^{sy}.

PROPOSITION 25. *Si l'espace de modules $\mathscr{M}^{sy}(a; \boldsymbol{b})$ est non vide, c'est-à-dire s'il existe au moins un disque holomorphe avec une pointe positive en a et dont les pointes négatives sont décrites par $\boldsymbol{b} = b_1 \cdots b_m$, alors*

$$\sum_{i=1}^{m} L(b_m) \leq L(a) \ .$$

La longueur L définit donc une filtration sur l'algèbre différentielle graduée $C(\mathscr{R})$. Nous utiliserons cette filtration ainsi que celle introduite dans la section 6.2 du chapitre 2 pour prouver l'isomorphisme entre $H_0^{string}(K)$ et $H_0^{contact}(K)$.

3.4. L'homologie de contact de noeud simple est un invariant de noeud orienté. Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés. Une isotopie de legendriennes entre Λ_{K_1} et Λ_{K_2} induit un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées Θ entre $C(\mathscr{R})_{K_1}$ et $C(\mathscr{R})_{K_2}$. En particulier, en considérant les $H_0^{contact}(K_i)$ comme des $\mathbb{Z}$-algèbres, on obtient un isomorphisme

$$\Theta_* : H_0^{contact}(K_1) \longrightarrow H_0^{contact}(K_2) \ .$$

Cet isomorphisme est de plus décrit sur les éléments de $H_0(C(\Omega_{x_0}\Lambda_{K_1}), \partial^{sing}) = \mathbb{Z}\left[\pi_1(\Lambda_{K_1})\right]$ comme l'isomorphisme induit $\pi_1(\Lambda_{K_1}) \to \pi_1(\Lambda_{K_2})$.

On suppose que cette isotopie de legendriennes est paramétrisée, c'est-à-dire qu'en notant (λ_i, μ_i) le couple périphérique vu dans $\pi_1(\Lambda_{K_i})$, l'isotopie envoie le couple (λ_1, μ_1) sur le couple (λ_2, μ_2). Dans ce cas, en voyant cette fois les $H_0^{contact}(K_i)$ munis de leur structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative, l'isomorphisme θ_* ci-dessus est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives. Une isotopie de noeuds orientés entre K_1 et K_2 fournit en particulier une isotopie de legendriennes paramétrisées sur leurs legendriennes, donc la $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative $H_0^{contact}(K)$, et plus généralement l'homologie de contact de noeud simple, sont des invariants de noeud orienté.

4. Les espaces de modules $\mathscr{M}(a; \boldsymbol{n})$

4.1. Définition de l'espace de module $\mathscr{M}(a; \boldsymbol{n})$. On pose dans la suite $L := Q \cup L_K \subset T^*Q$, qui est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique T^*Q. On va définir dans cette section des espaces de modules de disques de cobordisme $u : D = \mathbb{D} \backslash \{x_0, \dots, x_m\} \to T^*Q$ (où les x_i sont ordonnées dans l'ordre trigonométrique sur $\partial\mathbb{D}$) avec une pointe positive en x_0 et m pointes

d'intersection lagrangienne en les $x_i,\ i \geq 1$. En fait, à toute pointe d'intersection lagrangienne, on peut associer un demi-entier strictement positif appelé son *indice* : c'est un élément de $\mathbb{N} + \frac{1}{2}$ si, en parcourant le bord ∂D, u passe de L_K à Q ou de Q à L_K, et c'est un élément de $\mathbb{N}$ si, en parcourant le bord, u passe de L_K à L_K ou de Q à Q.

Soient a une corde de Reeb de Λ_K et $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ une suite d'indices strictement positifs $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\right\}$ qui seront les indices des pointes d'intersection lagrangienne. On définit $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$ comme l'espace de modules de disques de cobordisme $u : (\mathbb{D}\backslash\{x_0, \ldots, x_m\}, \partial\mathbb{D}) \to (T^*Q, L)$ avec une pointe positive a en x_0 et m pointes d'intersection lagrangienne d'indices respectifs n_i en les $x_i,\ i \geq 1$. Un exemple de disque de cobordisme de $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$ est représenté sur la figure 7. On définit de plus

$$|\boldsymbol{n}| := \sum_{i=1}^{m} 2(n_i - \frac{1}{2}) \ .$$

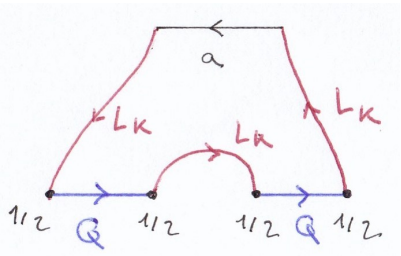


FIGURE 7. Un exemple de disque de cobordisme de $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

On munit dans la suite de cette partie les espaces de modules $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$ d'une structure de variété orientée. Comme pour les variétés $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$, elles peuvent êtres compactifiées grâce au point de vue des disques source brisés. En fait, pour construire le morphisme d'algèbres différentielles graduées entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$ dans la partie suivante, il est nécessaire de comprendre la structure des variétés $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$, ce que nous nous attachons à faire dans les deux dernières sections de cette partie.

4.2. Compacité pour les disques de cobordisme. On appelle *disque holomorphe constant*, la donnée d'un disque source D, d'un point $q \in K$ et de la structure suivante. On associe à toute composante du bord l'étiquette « L_K » ou « Q », et à chaque pointe x_i un élément de $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\right\}$, de sorte qu'une pointe séparant la même composante irréductible a un indice $\in \mathbb{N}$ tandis qu'elle a un indice $\in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ dans l'autre cas. On demande enfin que $n_0 = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Soit $\boldsymbol{D}_m$ un disque source brisé à r niveaux et $1 \leq r_0 \leq r$. On appelle *disque de cobordisme brisé à r_0 niveaux non constants* sur $\boldsymbol{D}_m$ la donnée de disques holomorphes $v^{j,k}$ définis sur chaque $D^{j,k}$ tels que

(a) Pour tous $j < r_0$ et $1 \leq k \leq l_j$, $v^{j,k}$ est un élément de $\mathscr{M}^{sy}(a; b_1^{j,k}, \ldots, b_s^{j,k})$ et les pointes positives et négatives correspondent comme dans la définition d'un disque de symplectisation brisé.

(b) Pour tout $j < r_0$, au moins un des disques de symplectisation $v^{j,k}$ n'est pas une bande triviale.

(c) Pour $j = r_0$ et tous $1 \leq k \leq l_j$, $v^{j,k}$ est un élément de $\mathscr{M}(a^{j,k}; n_1^{j,k}, \ldots, n_s^{j,k})$ et la corde de Reeb à la pointe positive correspond à la corde de Reeb à la pointe négative où les deux disques sources sont attachés.

(d) Pour tous $j > r_0$, $v^{j,k}$ est un disque holomorphe constant vers un point q de K qui est l'image de la pointe négative de $v^{j-1,k'}$ de $D^{j-1,k'}$ à laquelle $D^{j,k}$ est attaché.

(e) Pour tous $j > r_0$, $D^{j,k}$ a au moins trois pointes et l'indice et les étiquettes à sa pointe positive concordent avec celle de la pointe négative à laquelle elle est attachée.

La convergence vers un disque de cobordisme brisé se définit alors de manière analogue à la convergence vers un disque de symplectisation brisé, et on dispose du cousin du théorème sur les suites de disques de symplectisation.

PROPOSITION 26. *Toute suite de disques de cobordisme de $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$ admet une sous-suite convergente vers un disque de cobordisme brisé.*

4.3. Structure de variété sur $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$. Pour un choix générique de structure presque-complexe, l'espace de modules $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$ peut être muni d'une structure de variété orientée de dimension

$$\dim(\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})) = |a| - |\boldsymbol{n}| \ .$$

On dit que $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n})$ est de type $[i,j]$ si $|a| = i$ et $|\boldsymbol{n}| = j$. On rappelle de plus que le degré de a peut prendre pour valeurs 0, 1 et 2.

En fait, ces espaces de modules admettent des compactifications naturelles en des variétés à coins orientées, que nous décrivons dans les deux dernières sections de cette partie. Ces descriptions nous serviront à définir le morphisme d'algèbres différentielles graduées entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$ dans la partie suivante.

4.4. Structure des espaces de modules de dimension 1. Pour une corde de Reeb de degré 1, il existe deux types d'espaces de modules possibles :

(i) Les espaces de type $[1,0]$, correspondant à $\boldsymbol{n} = (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$. Ils sont de dimension 1.

(ii) Les espaces de type $[1,1]$ correspondant à un $\boldsymbol{n}$ ne contenant que des $\frac{1}{2}$ sauf un 1 inséré quelque part. Ils sont de dimension 0.

On dispose alors du théorème suivant pour les espaces de modules de type $[1,0]$.

PROPOSITION 27. *Si a est une corde de Reeb de degré 1, alors $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ admet une compactification en une variété orientée de dimension 1. Sa frontière consiste en les espaces suivants*

(a) Les espaces de modules de type (Lag), $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n'})$ où $\boldsymbol{n'}$ est obtenu en fusionnant deux $\frac{1}{2}$ en un 1.

(b) Les produits d'espaces de modules de type (sy), $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R} \times \prod_{b_j\in\boldsymbol{b}} \mathscr{M}(b_j;\boldsymbol{n_j})$ où la concaténation des $\boldsymbol{n_j}$ donne $\boldsymbol{n}$ et $|\boldsymbol{b}| = 0$.

Les schémas expliquant la formation des bords de type (Lag) et de type (sy) sont représentés sur les figures 8, 9 et 10.

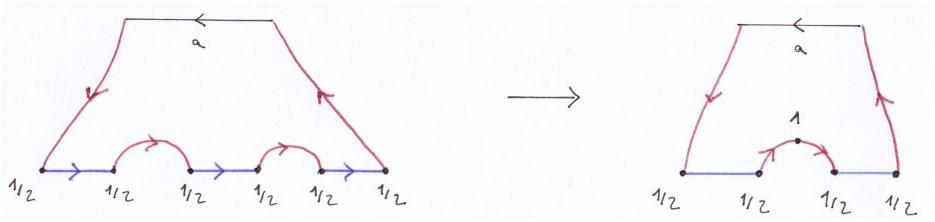


FIGURE 8. Formation du bord de type (Lag) par disparition d'un arc sur Q

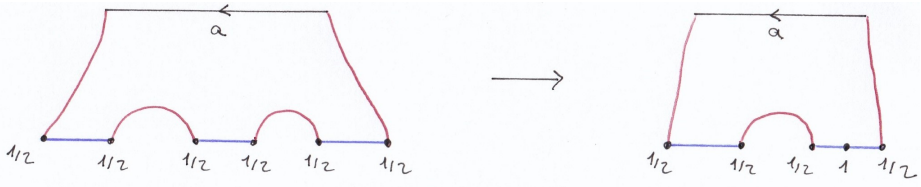


FIGURE 9. Formation du bord de type (Lag) par disparition d'un arc sur N

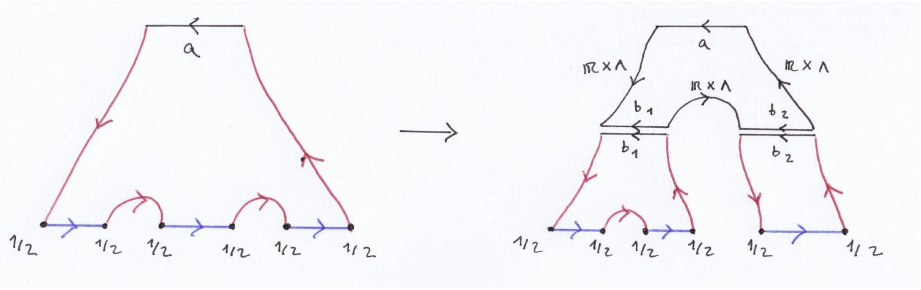


FIGURE 10. Formation du bord de type (sy)

4.5. Structure des espaces de modules de dimension 2. Pour une corde de Reeb de degré 2, l'espace de modules $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ admet lui aussi une compactification en une variété à coins. La description du bord et des coins est cette fois plus longue.

PROPOSITION 28. *Soit a une corde de Reeb de degré 2. Alors $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ peut être compactifiée en une variété à coins orientée de dimension 2.*

Les segments de bord sont décrits par les espaces suivants :

(a) Les espaces de modules de type (Lag), $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n'})$ où $\boldsymbol{n'}$ est obtenu en fusionnant deux $\frac{1}{2}$ consécutifs en un 1.

(b) Les produits d'espaces de modules de type (sy),

$$\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}\times\prod_{b_j\in\boldsymbol{b}}\mathscr{M}(b_j;\boldsymbol{n_j})$$

où la concaténation des n_j donne $\boldsymbol{n}$.

Les coins sont quant à eux décrits par les espaces suivants :

(a) Les espaces de modules de type (Lag|Lag)^1, $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n'})$ où $\boldsymbol{n'}$ est obtenu en prenant deux paires de $\frac{1}{2}$ consécutifs et en insérant des 1 à leur place.

(b) Les espaces de modules de type (Lag|Lag)^2, $\mathscr{M}(a;\boldsymbol{n''})$ où $\boldsymbol{n''}$ est obtenu en fusionnant trois $\frac{1}{2}$ consécutifs en un $\frac{3}{2}$.

(c) Les produits d'espaces de modules de type (sy|Lag)

$$\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}\times\prod_{b_j\in\boldsymbol{b}}\mathscr{M}(b_j;\boldsymbol{n_j})$$

où $\boldsymbol{b}=1$ et la concaténation des $\boldsymbol{n_j}$ donne la liste $\boldsymbol{n}$ de laquelle on a retiré deux $\frac{1}{2}$ consécutifs pour insérer un 1.

(d) Les produits d'espaces de modules de type (sy|sy)

$$\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}\times\prod_{b_j\in\boldsymbol{b}}\mathscr{M}^{sy}(b_j;\boldsymbol{c_j})/\mathbb{R}\times\prod_{c_{jk}\in\boldsymbol{c_j}}\mathscr{M}(c_{jk};\boldsymbol{n_{jk}})$$

où la concaténation des $\boldsymbol{n_{jk}}$ donne $\boldsymbol{n}$ et tous les $\mathscr{M}^{sy}(b_j;\boldsymbol{c_j})$, excepté un, correspondent à des bandes triviales au-dessus des cordes b_j (cf. suite).

Plus précisément, les coins de type (sy|sy) correspondent à des disques de cobordisme brisés à trois niveaux tels que le disque v^1 est un disque de symplectisation de type $[2,1]^{sy}$, un disque $v^{2,s}$ est un disque de symplectisation de type $[1,0]^{sy}$ tandis que tous les autres disques de niveau 2 sont des bandes triviales, et les disques $v^{3,j}$ sont tous de type $[0,0]$.

Les schémas expliquant la formation des segments de bord sont les mêmes que ceux de la section précédente. Les schémas expliquant la formation des coins sont représentés sur les figures 11, 12, 13 et 14.

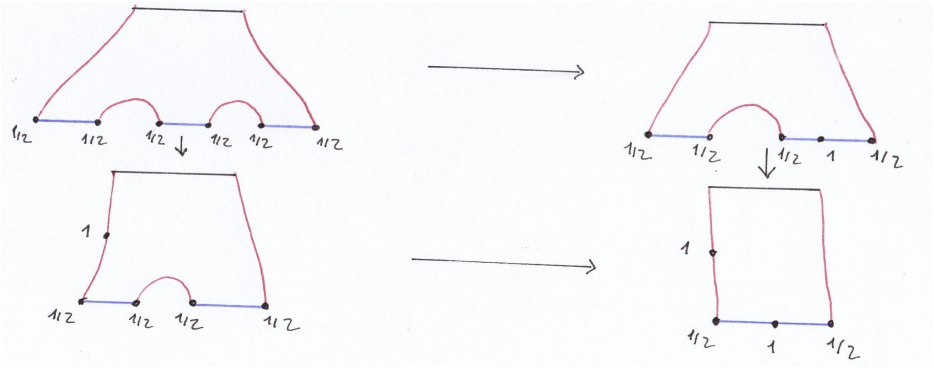


FIGURE 11. Formation d'un coin de type (Lag|Lag)^1

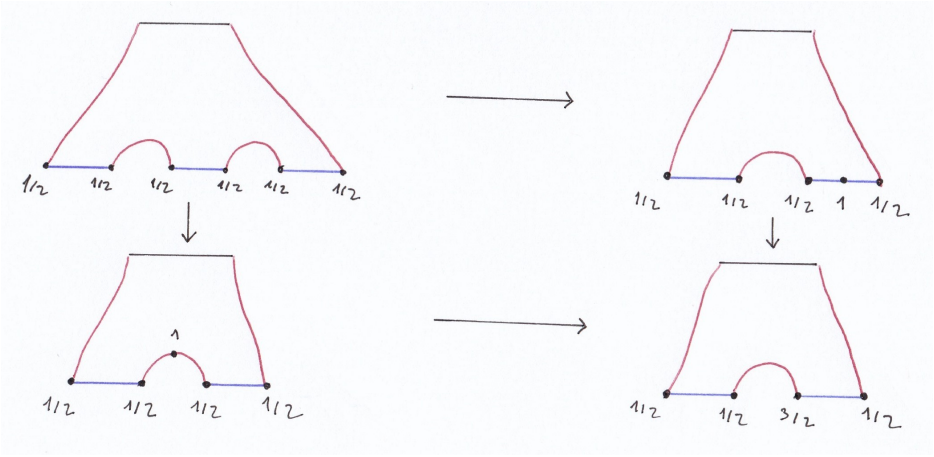


FIGURE 12. Formation d'un coin de type (Lag|Lag)^2

4.6. Les sous-variétés $\delta\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$. On introduit pour la suite de cette section la notation suivante

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^s := (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})\ .$$

On note également $\bar{\mathscr{M}}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ les variétés compactifiées des espaces de modules $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$.

PROPOSITION 29. *Soit a une corde de Reeb de degré 1. Alors l'espace de modules $\mathscr{M}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^s,1,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^t)$ de type $[1,1]$ est une variété compacte de dimension 0. Ces espaces se plongent naturellement dans l'intérieur de la variété $\bar{\mathscr{M}}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s+t})$ par oubli de la $(s+1)^{ème}$ pointe d'intersection lagrangienne*

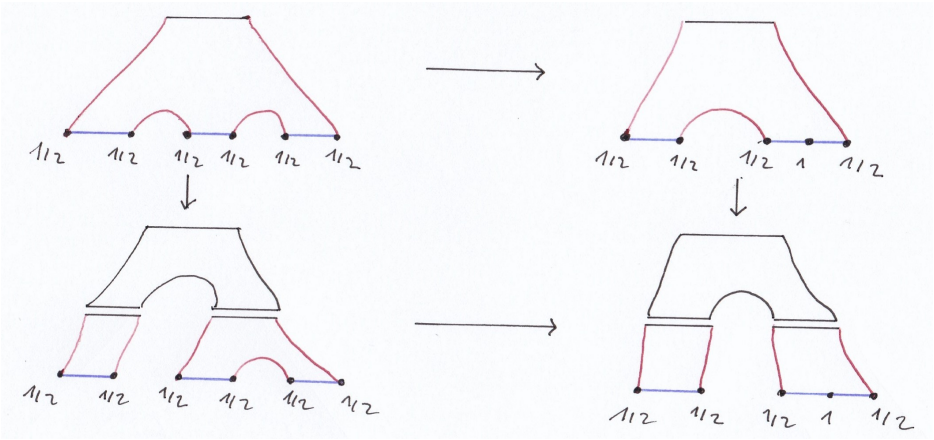


FIGURE 13. Formation d'un coin de type (sy|Lag)

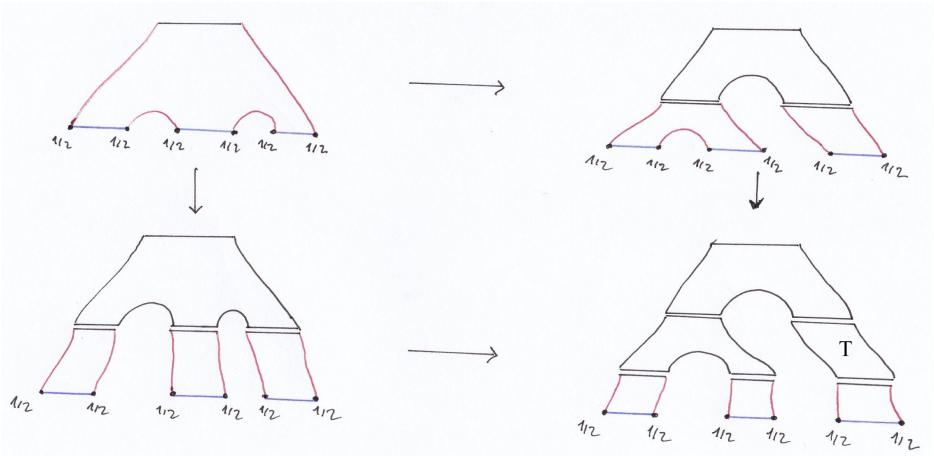


FIGURE 14. Formation d'un coin de type (sy|sy)

d'indice 1. Les images de tous les plongements dans un même $\bar{\mathscr{M}}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s+t})$ *sont deux à deux disjointes. L'image de chaque* $\mathscr{M}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s},1,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{t})$ *correspond à l'ensemble des disque de cobordisme de* $\bar{\mathscr{M}}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s+t})$ *qui rencontrent* K *sur leur* $(s+1)^{ème}$ *composante de bord. Enfin, leur union correspond exactement à l'ensemble des disques de cobordisme de* $\bar{\mathscr{M}}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s+t})$ *qui rencontrent* K *en dehors de leurs pointes d'intersection lagrangienne. On la note* $\delta\mathscr{M}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s+t})$.

On dispose d'une description analogue des applications d'oubli $\bar{\mathscr{M}}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s},1,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{t}) \to \bar{\mathscr{M}}(a;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{s+t})$ pour les cordes de Reeb de degré 2. Nous ne la donnons pas, car nous ne l'utilisons pas dans la suite de ce chapitre.

5. Le morphisme Φ entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$

Les espaces de modules $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ étudiés dans la section précédente vont maintenant servir à définir le morphisme d'algèbres différentielles graduées entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$. En effet, la lagrangienne L_K peut être identifiée à un voisinage tubulaire de K de la même manière qu'à la fin de la section 3.2. On démontre que cette identification permet de voir le bord de toute disque de $\mathscr{M}(a;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ comme une corde brisée de K.

5.1. Construction des applications $\phi_l(a)$. Soit a une corde de Reeb. On a vu dans la partie précédente que l'espace de modules de disques de cobordisme $\mathscr{M}(a;\mathbf{\frac{1}{2}}^{2l})$ admet une compactification en une variété orientée de dimension $|a|$. Nous la notons $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ par la suite et écrivons son bord $\partial\bar{\mathscr{M}}_l(a) = (sy)\cup(Lag)$.

PROPOSITION 30. *Il existe des triangulations des variétés $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ et des chaînes génériques de cordes brisées*

$$\phi_l(a) : \bar{\mathscr{M}}_l(a) \longrightarrow \Sigma^l$$

telle que

$$\partial\phi_l(a) = \phi_l(\partial^{sy}a) - (\delta_N + \delta_Q)\phi_{l-1}(a) \ .$$

Les chaînes $\phi_l(a)$ sont des sommes signées de chaînes correspondant à la triangulation de $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$. La notation $\phi_l(\partial^{sy}a)$ est quant-à-elle éclaircie dans la démonstration.

DÉMONSTRATION. Commençons par expliquer comment obtenir une corde brisée à partir d'un disque de cobordisme. Soit u un élément de $\mathscr{M}(a;\mathbf{\frac{1}{2}}^{2l})$. En rattachant les extrémités de a à x_0 et en identifiant la lagrangienne L_K avec un voisinage tubulaire de K, le parcours du bord de u définit une suite de N-cordes et de Q-cordes sur K, les points de changement sur K correspondant aux pointes d'intersection lagrangienne. De plus, une étude du voisinage d'une pointe d'intersection lagrangienne d'indice $\frac{1}{2}$ montre que les conditions sur les dérivées sont bien satisfaites aux extrémités des cordes. Le disque u définit donc bien une corde brisée de K. Cela définit ainsi une application

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_l(a) : \mathscr{M}_l(a) &\longrightarrow \Sigma^l \\ u &\longmapsto \partial u \ .\end{aligned}$$

Cependant, ces applications ne s'étendent pas à la compactification, car des N-cordes et des Q-cordes disparaissent sur les bords de type (Lag). Dans la formule de l'énoncé, le terme $\phi_l(\partial^{sy}a)$ correspondra au bord de type (sy) tandis que le terme $(\delta_N+\delta_Q)\phi_{l-1}(a)$ correspondra au bord de type (Lag). Nous concluons cette esquisse de démonstration en décrivant les cas $|a| = 0, 1$.

Dans le cas $|a| = 0$, les espaces $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ sont des variétés compactes de dimension 0 et on peut poser $\phi_l(a)(u) := \partial u$.

On démontre le cas $|a| = 1$ par récurrence sur l. Avant de débuter, définissons le terme $\phi_l(\partial^{sy}a)$. On a vu que le bord (sy) de $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ correspond aux produits d'espaces de modules $\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}\times\prod_{b_j\in\boldsymbol{b}}\mathscr{M}(b_j;\boldsymbol{n_j})$ où $|\boldsymbol{b}| = 0$. Soit donc $u\in\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})$ où $|\boldsymbol{b}| = 0$. À tout disque brisé du bord (sy) associé à u, on associe la corde brisée comme sur la figure 15. On note alors $\psi_l(u)$ la somme de ces cordes brisées, signée par l'orientation, et on définit

$$\phi_l(\partial^{sy}a) := \sum_{\substack{|a|-|\boldsymbol{b}|=1\\ u\in\mathscr{M}^{sy}(a;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}}} \psi_l(u) \ .$$

Débutons donc notre démonstration par récurrence. Dans le cas $l = 0$, la variété $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ n'a pas de bord de type (Lag) et l'expression $\phi_l(\partial^{sy}a)$ étend bien la définition de $\tilde{\phi}_l(a)$ à $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$. On obtient une application $\phi_l(a) : \bar{\mathscr{M}}_l(a) \longrightarrow \Sigma^l$ qui vérifie $\partial\phi_l(a) = \phi_l(\partial^{sy}a) - (\delta_N+\delta_Q)\phi_{l-1}(a)$. Supposons maintenant qu'on a construit $\phi_k(a)$ pour $k = 0,\dots,l-1$. Comme précédemment, on peut bien étendre $\tilde{\phi}_l(a)$ à son bord (sy). Mais le problème va être de l'étendre à son bord (Lag), pour lequel une composante à valeurs dans Q ou L_K disparaît.

En fait, lorsqu'on se place dans un voisinage assez petit d'un bord de type (Lag), on peut montrer que pour les disques de l'intérieur de $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$, la composante qui disparaît au bord est envoyée sur une pique par $\tilde{\phi}_l(a)$. On note également qu'on peut identifier le bord (Lag) de $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ à $\delta\mathscr{M}(a;\mathbf{\frac{1}{2}}^{2l-2})$ d'après la section précédente. Alors, faire agir $\partial_N+\partial_Q$ sur $\phi_{l-1}(a)$ revient à insérer

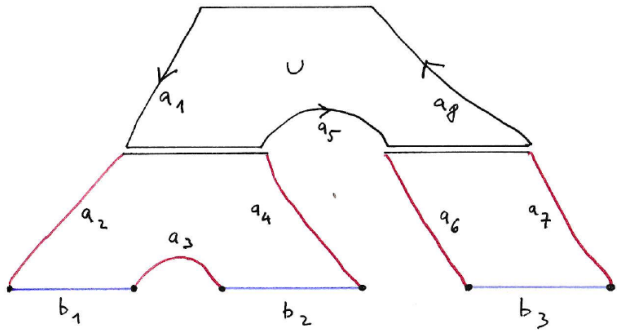


FIGURE 15. La corde brisée $(a_1a_2)(b_1)(a_3)(b_2)(a_4a_5a_6)(b_3)(a_7a_8)$ où a_1 et a_8 sont raccordés à x_0 par les chemins de raccordement de a, est associée à ce disque brisé

des piques dans tout corde brisée intersectant K en son intérieur. Ces cordes brisées correspondent à l'image par $\phi_{l-1}(a)$ des $u \in \delta\mathscr{M}(a; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{2l-2})$, qui sont identifiés au bord (Lag) de $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$. Ces deux observations assurent qu'on peut définir $\phi_l(a)$ sur tout $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ de sorte que $\partial\phi_l(a) = \phi_l(\partial^{sy}a) - (\delta_N + \delta_Q)\phi_{l-1}(a)$, en interpolant entre la formule $(\delta_N + \delta_Q)\phi_{l-1}(a)$ sur le bord et la formule $\tilde{\phi}_l(a)$ sur l'intérieur.

Enfin, l'ensemble fini $\delta\mathscr{M}(a; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{2l})$ correspond aux cordes brisés intersectant K en leur intérieur. On définit une triangulation de $\bar{\mathscr{M}}_l(a)$ quelconque dont les segments ne rencontrent pas $\delta\mathscr{M}(a; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{2l})$ en leurs extrémités. La proposition 29 de la section précédente assure alors que les 1-chaînes de cordes brisées associées à chaque segment sont génériques. Ce qui conclut la démonstration du cas $|a| = 1$ par récurrence. □

REMARQUE. Notons que cet isomorphisme nécessite une légère redéfinition des N-cordes d'une corde brisée. On choisit cette fois un voisinage tubulaire ouvert de K, correspondant à L_K et le point base x_0 et choisi sur une strate torique interne du voisinage tubulaire, correspondant à l'image de Λ_K par le difféomorphisme $L_K \to N$. Cela ne change rien aux résultats qu'on a démontrés dans les chapitres précédents.

5.2. Définition du morphisme Φ. On pose $\delta := \delta_N + \delta_Q$. On a défini dans la section précédente une application $\phi_l(a)$ pour tout corde Reeb a et tout l, telle que $\partial\phi_l(a) = \phi_l(\partial^{sy}a) - \delta\phi_{l-1}(a)$. On veut maintenant définir pour tout corde de Reeb a

$$\Phi(a) := \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(a) \in C(\Sigma) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} C(\Sigma^l)$$

qui vérifiera alors bien la relation

$$\partial\Phi(a) = \Phi(\partial^{sy}a) - \delta\Phi(a) \ .$$

La proposition suivante implique que $\Phi(a)$ est en fait une somme finie (voir **[CEL09]** pour une démonstration).

PROPOSITION 31. *Le nombre de pointes d'intersection lagrangienne que peut avoir un disque de cobordisme $u : (D, \partial D) \to (T^*Q, L)$ avec une pointe positive, est uniformément borné par une constante κ.*

Ainsi,

$$\partial\Phi(a) = \sum_{l=0}^{\kappa} \partial\phi_l(a) = \sum_{l=0}^{\kappa} \phi_l(\partial^{sy}a) - \sum_{l=0}^{\kappa-1} \delta\phi_l(a)$$

et

$$\Phi(\partial^{sy}a) - \delta\Phi(a) = \sum_{l=0}^{\kappa} \phi_l(\partial^{sy}a) - \sum_{l=0}^{\kappa} \delta\phi_l(a) = \sum_{l=0}^{\kappa} \phi_l(\partial^{sy}a) - \sum_{l=0}^{\kappa-1} \delta\phi_l(a) - \delta\phi_\kappa(a) \ .$$

Reste à prouver que $\delta\phi_\kappa(a) = 0$ pour conclure que $\partial\Phi(a) = \Phi(\partial^{sy}a) - \delta\Phi(a)$. Mais si $\delta\phi_\kappa(a) \neq 0$ il existe un disque de cobordisme $u \in \mathscr{M}(a; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^\kappa)$ qui intersecte K sur sa $(s+1)^{\text{ème}}$ composante de bord. Ce disque correspond à un élément de $u \in \mathscr{M}(a; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^s, 1, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^t)$ où $s+t=\kappa$. Un tel disque a plus de κ pointes d'intersection lagrangienne, c'est absurde.

On peut maintenant étendre Φ à toute d-chaîne de chemins de Reeb. Soit

$$\boldsymbol{a} := \alpha_1 a_1 \dots \alpha_m a_m \alpha_{m+1} : \Delta \to \mathscr{R}^m \ ,$$

on définit

$$\Phi(\boldsymbol{a}) := \alpha_1 \Phi(a_1) \dots \alpha_m \Phi(a_m) \alpha_{m+1} \in C(\Sigma) \ ,$$

où les α_i sont vus comme des N-cordes en raccordant leurs extrémités à x_0 par les chemins de raccordements associés aux a_i. En notant Δ_i les domaines des $\Phi(a_i)$, $\Phi(\boldsymbol{a})$ a alors pour domaine

$$\Delta \times \Delta_1 \times \dots \times \Delta_m \ ,$$

et ce domaine est orienté dans l'ordre de ses facteurs.

Remarque. On définit ici des i-chaînes génériques de cordes brisées pour $i \geq 3$, ce que nous n'avons pas fait dans la partie 6 du chapitre 2. Cependant, on n'utilisera dans la démonstration de l'isomorphisme $\Phi_* : H_0^{contact}(K) \to H_0^{string}(K)$ que des chaînes de chemins de Reeb dont l'image par Φ est une chaîne générique de corde brisée de degré 0, 1 ou 2. On peut toutefois espérer réussir à définir des i-chaînes génériques de cordes brisées pour tout i, et cette application Φ sera alors un bon candidat d'isomorphisme entre l'intégralité de l'homologie de contact et de l'homologie de cordes simple du noeud.

Notons également que $\Phi(\partial^{sy}a)$ a été défini dans la démonstration de la proposition 30 de façon à être compatible avec cette expression de l'extension de Φ.

Proposition 32. *L'application Φ est un morphisme d'algèbres différentielles graduées entre $(C(\mathscr{R}), \partial_\Lambda)$ et $(C(\Sigma), \partial + \delta)$.*

Démonstration. En utilisant les conventions d'orientation du paragraphe précédent ainsi que le fait que cette égalité est vérifiée pour une corde de Reeb a, on obtient cette suite d'égalités qui implique le résultat :

$$\begin{aligned}
\partial\Phi(\boldsymbol{a}) &= \Phi(\partial^{sing}\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{d+|a_1|+\dots+|a_{i-1}|} \alpha_1 \Phi(a_1) \alpha_2 \dots \partial\Phi(a_i) \dots \Phi(a_m) \alpha_{m+1} \\
&= \Phi(\partial^{sing}\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{d+|a_1|+\dots+|a_{i-1}|} \alpha_1 \Phi(a_1) \alpha_2 \dots (\Phi(\partial^{sy}a_i) - \delta\Phi(a_i)) \dots \Phi(a_m) \alpha_{m+1} \\
&= \Phi(\partial^{sing}\boldsymbol{a}) + \Phi(\partial^{sy}\boldsymbol{a}) - \delta\Phi(\boldsymbol{a}) \ .
\end{aligned}$$

□

Il apparaît de plus sur la définition de Φ qu'il induit bien un morphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives entre $H_0^{contact}(K)$ et $H_0^{string}(K)$.

5.3. Le morphisme Φ préserve les filtrations. Nous le verrons dans la section suivante, l'utilisation des filtrations s'avèrera déterminante dans la démonstration de l'isomorphisme

$$\Phi_* : H_0^{string}(K) \to H_0^{contact}(K) \ .$$

Montrons que Φ préserve en fait les filtrations des deux complexes. Pour un disque de cobordisme $u \in \mathscr{M}(a; \boldsymbol{n})$ on note $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ses composantes de bord sur Q, et $L(\sigma_i)$ leur longueur dans Q.

PROPOSITION 33. *Si $u \in \mathscr{M}(a; \boldsymbol{n})$ alors $\sum_{i=1}^{k} L(\sigma_i) \leq L(a)$.*

DÉMONSTRATION. Voir la démonstration de la proposition 8.9 de [**CELN16**]. □

On rappelle que pour la filtration de $C(\Sigma)$ on ne comptait pas les longueurs des Q-piques. Ainsi, l'insertion d'une Q-pique pour les disques du bord type (Lag) n'augmente pas la longueur. Cette remarque ainsi que la proposition précédente implique la proposition suivante.

PROPOSITION 34. *Le morphisme Φ préserve les filtrations des complexes $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$.*

6. Le morphisme Φ induit un isomorphisme sur l'homologie de degré 0

6.1. Idées de la démonstration. On démontre dans cette partie que le morphisme d'algèbres différentielles graduées Φ construit dans la partie précédente induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives en degré 0. On va pour cela avoir recours aux filtrations des complexes $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$ définies dans la section 3.3 de ce chapitre et dans le section 6.2 du chapitre 2. Plus précisément, on va utiliser que Φ définit bien un isomorphisme entre $H_0^{contact}(K)$ et $H_0^{string}(K)$ sur des petites fenêtres définies par la filtration puis un argument de passage à la limite utilisant le lemme des cinq permettra de conclure le théorème suivant.

THÉORÈME 10. *Le morphisme Φ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbres non commutatives entre $H_0^{string}(K)$ et $H_0^{contact}(K)$.*

On introduit pour conclure les notations suivantes. Étant donnée une algèbre différentielle graduée $\mathscr{A}$ munie d'une filtration L, on note

$$\mathscr{F}^{<r}\mathscr{A} := \{a \in \mathscr{A}, L(a) < r\} \qquad \mathscr{A}^{[r,'r)} := \mathscr{F}^{<r'}\mathscr{A}/\mathscr{F}^{<r}\mathscr{A} \ .$$

On suppose de plus que la différentielle D de $\mathscr{A}$ préserve la filtration, c'est-à-dire qu'elle envoie $\mathscr{F}^{<r}\mathscr{A}$ dans $\mathscr{F}^{<r}\mathscr{A}$. Alors, pour tous $r < r'$, D induit une différentielle

$$\mathscr{A}^{[r,'r)} \longrightarrow \mathscr{A}^{[r,'r)} \ ,$$

et on définit $H_i^{[r,r')}(\mathscr{A})$ comme le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homologie du complexe de chaînes $\mathscr{A}^{[r,'r)}$.

6.2. Démonstration du théorème. Soient $a < b < c$. On note $C(\mathscr{R})_i$ le $\mathbb{Z}$-module des éléments de degré i de $C(\mathscr{R})$ et D la différentielle de $C(\mathscr{R})$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & C(\mathscr{R})_1^{[a,b)}/\mathrm{Im}(D) & \longrightarrow & C(\mathscr{R})_1^{[a,c)}/\mathrm{Im}(D) & \longrightarrow & C(\mathscr{R})_1^{[b,c)}/\mathrm{Im}(D) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle D} & & \downarrow{\scriptstyle D} & & \downarrow{\scriptstyle D} & & \\
0 & \longrightarrow & C(\mathscr{R})_0^{[a,b)} & \longrightarrow & C(\mathscr{R})_0^{[a,c)} & \longrightarrow & C(\mathscr{R})_0^{[b,c)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

est commutatif et les lignes (induites par les inclusions) sont exactes. On dispose du même diagramme commutatif pour $C(\Sigma)$. Le morphisme d'algèbres différentielles graduées Φ préserve les

filtrations de $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$. Ainsi, par le lemme du serpent et la naturalité, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} H_1^{[b,c)}(\mathscr{R}) & \longrightarrow & H_0^{[a,b)}(\mathscr{R}) & \longrightarrow & H_0^{[a,c)}(\mathscr{R}) & \longrightarrow & H_0^{[b,c)}(\mathscr{R}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_*} & & \downarrow \\ H_1^{[b,c)}(\Sigma) & \longrightarrow & H_0^{[a,b)}(\Sigma) & \longrightarrow & H_0^{[a,c)}(\Sigma) & \longrightarrow & H_0^{[b,c)}(\Sigma) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont encore exactes.

On dispose alors de la proposition suivante.

PROPOSITION 35. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un $\varepsilon_a > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_a$, le morphisme*

$$\phi_* : H_0^{[a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(\mathscr{R}) \longrightarrow H_0^{[a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(\Sigma)$$

est un isomorphisme et le morphisme

$$\phi_* : H_1^{[a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(\mathscr{R}) \longrightarrow H_1^{[a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(\Sigma)$$

est surjectif.

La démonstration de ce résultat peut être trouvée dans le chapitre 7 de [**CELN16**]. On remarque maintenant en premier lieu que $H_0^{string}(K) = \lim_{R\to\infty} H^{[0,R)}(\Sigma)$ et que $H_0^{contact}(K) = \lim_{R\to\infty} H^{[0,R)}(\mathscr{R})$. Il suffit donc de prouver que

$$\phi_* : H_0^{[0,R)}(\mathscr{R}) \longrightarrow H_0^{[0,R)}(\Sigma)$$

est un isomorphisme pour tout $R > 0$ pour conclure. Soit donc $R > 0$. D'après la proposition 35, il existe une subdivision $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_N = R$ de $[0, R)$ telle que pour tout i, les applications

$$\phi_* : H_0^{[r_{i-1},r_i)}(\mathscr{R}) \longrightarrow H_0^{[r_{i-1},r_i)}(\Sigma)$$

sont des isomorphismes et les morphismes

$$\phi_* : H_1^{[r_{i-1},r_i)}(\mathscr{R}) \longrightarrow H_1^{[r_{i-1},r_i)}(\Sigma)$$

sont surjectifs.

On raisonne alors par récurrence en utilisant le diagramme commutatif introduit en début de section et le lemme des cinq à chaque étape pour conclure le théorème 10.

Chapitre 6

Homologie de contact de noeud améliorée

Tout comme nous avons construit l'homologie de contact de noeud simple pour la relier à l'homologie de cordes simples, nous définissons dans ce dernier chapitre l'homologie de contact legendrienne de la legendrienne $\Lambda_K \cup \Lambda_q$, dite *homologie de contact de noeud améliorée*.

Nous introduisons en premier lieu la $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée calculant l'homologie de contact legendrienne de $\Lambda_K \cup \Lambda_q$, dite *algèbre composable* de $\Lambda_K \cup \Lambda_q$. Après avoir défini le produit ν, analogue du produit P de la topologie des cordes pour l'homologie de contact, nous introduisons le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, \nu)$ défini par des composantes de l'homologie de contact de noeud améliorée. On construit alors un morphisme d'algèbres différentielles graduées $\Phi : C(\mathscr{R}) \to C(\Sigma)$ prolongeant son homonyme du chapitre précédent, et démontrons qu'il induit un isomorphisme entre les quadruplets $(R^{contact}_{KK}, R^{contact}_{Kq}, R^{contact}_{qK}, \nu)$ et $(R^{cordes}_{KK}, R^{cordes}_{Kq}, R^{cordes}_{qK}, P)$. Nous concluons en donnant une nouvelle démonstration du théorème 9, utilisant l'invariant $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$.

Ce chapitre est fondé sur l'article [**ENS16**].

1. L'algèbre composable de la legendrienne $\Lambda_K \cup \Lambda_q$

On oublie dans ce dernier chapitre la notation $C(\mathscr{R})$ pour la $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée définissant l'homologie de contact legendrienne de la legendrienne Λ_K.

De la même manière qu'on a généralisé l'homologie de cordes simple à l'homologie de cordes améliorée en définissant l'algèbre composable du couple (K, q), nous généralisons l'homologie de contact legendrienne de Λ_K à l'homologie de contact legendrienne de $\Lambda_K \cup \Lambda_q$ en définissant $C(\mathscr{R})$, l'algèbre composable de la legendrienne $\Lambda_K \cup \Lambda_q$.

On reprend les notations $Q := \mathbb{R}^3$ et $M := S^*Q$. On munit la variété M de sa structure de contact canonique $\lambda = pdq$. On pose désormais $\Lambda := \Lambda_K \cup \Lambda_q$ l'union disjointe des legendriennes Λ_K et Λ_q. En particulier Λ est une sous-variété legendrienne à deux composantes connexes de Q. On pose $\mathscr{R}^{ij}$ l'ensemble des cordes de Reeb qui ont leur extrémité *finale* sur Λ_i et leur extrémité *initiale* sur Λ_j. Notons qu'il n'existe pas de cordes de Reeb allant de Λ_q vers lui-même. On choisit enfin un point base $x_0 \in \Lambda_K$ et un point base $x_1 \in \Lambda_q$ et pour toute corde de Reeb a de Λ, des chemins de raccordement des extrémités de a à x_0 à valeurs dans Λ.

1.1. Définition de l'algèbre composable. On note à nouveau $P_{x,y}\Lambda$ l'espace des chemins $\gamma : [a, b] \to \Lambda$ tels que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. Notons cette fois que pour que $P_{x,y}\Lambda$ soit non vide, il faut que x et y soient dans la même composante Λ_i de Λ, auquel cas $P_{x,y}\Lambda = P_{x,y}\Lambda_i$. Un *$ij$-chemin de Reeb de Λ à l cordes de Reeb* est alors une expression de la forme $\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_l a_l \alpha_{l+1}$ où les $a_h : [0, T_h] \to M$ sont des cordes de Reeb de Λ et les α_h sont des chemins tels que

$$\alpha_1 \in P_{x_i a_1(T_1)}\Lambda, \qquad \alpha_h \in P_{a_{h-1}(0)a_h(T_h)}\Lambda \text{ pour } 2 \leq h \leq l, \qquad \alpha_{l+1} \in P_{a_l(0)x_j}\Lambda\ .$$

Un exemple de chemin de Reeb de $\Lambda_K \cup \Lambda_q$ est représenté sur la figure 1.

La différence majeure avec les chemins de Reeb définis dans le chapitre 5 est que cette fois, les chemins α_i peuvent évoluer dans deux composantes connexes différentes, et que le mot $\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_l a_l \alpha_{l+1}$ doit vérifier la condition suivante : il existe une suite d'éléments $i_h \in \{K, q\}$ telle que α_h est un chemin à valeurs dans Λ_{i_h} pour tout h, et a_h est une corde de Reeb dont

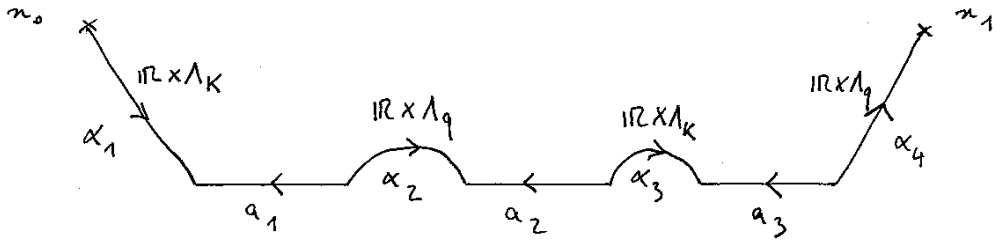


FIGURE 1. Un exemple de chemin de Reeb de $\Lambda_K \cup \Lambda_q$

l'extrémité *finale* est sur Λ_{i_h} et l'extrémité *initiale* sur $\Lambda_{i_{h+1}}$. C'est avec le même type de condition que nous avions défini les mots composables dans la partie 5 du chapitre 3.

En posant $\mathscr{R}$ l'espace des chemins de Reeb de Λ, on note $C(\mathscr{R})$ les chaînes singulières à valeurs dans $\mathscr{R}$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

$$C(\mathscr{R}) := \bigoplus_{d\geq 0} C_d(\mathscr{R}) \ .$$

Étant données une k-chaîne de ij-chemins de Reeb et une k'-chaine de $i'j'$-chemins de Reeb, on définit leur produit comme la $k+k'$-chaîne produit obtenue par concaténation au point x_j lorsque $j = i'$ et comme 0 si $j \neq i'$. Cette multiplication définit sur $C(\mathscr{R})$ une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre.

1.2. Graduation de l'algèbre composable. Il n'existe pas de cordes de Reeb de Λ_q vers Λ_q. De plus, comme dans le chapitre précédent, les cordes de Reeb de la legendrienne Λ sont en correspondance bijective avec les cordes binormales de $K \cup \{q\}$, où la condition de normalité est vide en q.

On déforme K par isotopie de sorte que la fonction distance d sur $K \cup \{q\} \times K \cup \{q\}$ soit de Morse. On note pour toute corde de Reeb c, γ la corde binormale correspondante, et $\mathrm{ind}(\gamma)$ son indice en tant que point critique de d. Alors :

(i) Si c est une corde de Reeb de $\mathscr{R}^{KK}$ on pose $|c| = \mathrm{ind}(\gamma)$.

(ii) Si c est une corde de Reeb de $\mathscr{R}^{Kq}$ on pose $|c| = \mathrm{ind}(\gamma)$.

(iii) Si c est une corde de Reeb de $\mathscr{R}^{qK}$ on pose $|c| = \mathrm{ind}(\gamma) + 1$.

En fait, $\mathrm{ind}(\gamma) \in \{0,1,2\}$ si γ va de K vers K et $\in \{0,1\}$ sinon. Cela implique pour une corde de Reeb $c \in \mathscr{R}^{KK}$ (resp. $\mathscr{R}^{Kq}$, $\mathscr{R}^{qK}$) que $|c| \in \{0,1,2\}$ (resp. $\in \{0,1\}$, $\in \{1,2\}$).

La graduation sur la $\mathbb{Z}$-algèbre $C(\Sigma)$ est définie comme la somme de la *graduation de chaînes* et de la *graduation de cordes*.

1.3. La différentielle sur l'algèbre composable $C(\mathscr{R})$. La différentielle sur $C(\mathscr{R})$ est maintenant définie par

$$\partial_\Lambda := \partial^{sing} + \partial^{sy} : C(\mathscr{R}) \longrightarrow C(\mathscr{R}) \ ,$$

où ∂^{sing} est la différentielle singulière classique, et ∂^{sy} est définie par un compte de disques de symplectisation $u : (D, \partial D) \to (\mathbb{R}\times S^*Q, \mathbb{R}\times\Lambda)$,

$$\partial^{sy}(\boldsymbol{a}) := \sum_{i=1}^{l} \sum_{\substack{|a_i|-|\boldsymbol{b}|=1 \\ u\in\mathscr{M}^{sy}(a_i;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}}} \varepsilon(-1)^{d+|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|}\partial(u)\cdot_i \boldsymbol{a} \ ,$$

où d est le degré de la chaîne $\boldsymbol{a}$ et ε est le signe associé à l'orientation au point u de la variété compacte orientée de dimension 0, $\mathscr{M}^{sy}(a_1,a_2;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}$.

$C(\mathscr{R})$ se décompose en la somme directe des sous-$\mathbb{Z}$-modules associés aux chaînes de ij-chemins de Reeb

$$C(\mathscr{R}) := C^{KK}(\mathscr{R}) \oplus C^{Kq}(\mathscr{R}) \oplus C^{qK}(\mathscr{R}) \oplus C^{qq}(\mathscr{R}) \ .$$

Cette définition assure alors que ∂_Λ est bien de degré -1 et préserve en plus les sous-$\mathbb{Z}$-modules $C^{ij}(\mathscr{R})$.

L'homologie de contact legendrienne de la legendrienne Λ, qu'on appelle *homologie de contact améliorée du noeud* K ou *homologie de contact de noeud améliorée de* K, est définie comme l'homologie de l'algèbre différentielle graduée $C(\mathscr{R})$,

$$H_*(C(\mathscr{R}), \partial_\Lambda) = \bigoplus_{i,j \in \{K,q\}} H_*(C^{ij}(\mathscr{R}), \partial_\Lambda) \ .$$

$(C(\mathscr{R}), \partial_\Lambda)$ contient la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée

$$(C(\Omega_{x_0}\Lambda_K), \partial_\Lambda) = (C(\Omega_{x_0}\Lambda_K), \partial^{sing}) \ ,$$

dont l'homologie est $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$. Cela munit $H_0(C^{KK}(\mathscr{R}))$ d'une structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative associée au couple périphérique de K.

1.4. La filtration sur $C(\mathscr{R})$. On appelle *corde de Reeb mixte* de Λ une corde de Reeb de Λ dont l'extrémité initiale et l'extrémité finale sont sur deux composantes distinctes de Λ, et *corde de Reeb pure* de Λ une corde de Reeb de Λ dont les deux extrémités sont sur la même composante de Λ.

On définit sur $C(\mathscr{R})$ la filtration comptant le nombre de cordes de Reeb mixtes,

$$C(\mathscr{R}) = \mathscr{F}^0 C(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^1 C(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^2 C(\mathscr{R}) \supset \cdots$$

où $\mathscr{F}^k C(\mathscr{R})$ est le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les chaînes de chemins de Reeb contenant au moins k cordes de Reeb mixtes. Cela définit une filtration sur les $C^{ij}(\mathscr{R})$

$$\begin{aligned}
C^{KK}(\mathscr{R}) &= \mathscr{F}^0 C^{KK}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^2 C^{KK}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^4 C^{KK}(\mathscr{R}) \supset \cdots \\
C^{Kq}(\mathscr{R}) &= \mathscr{F}^1 C^{Kq}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^3 C^{Kq}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^5 C^{Kq}(\mathscr{R}) \supset \cdots \\
C^{qK}(\mathscr{R}) &= \mathscr{F}^1 C^{qK}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^3 C^{qK}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^5 C^{qK}(\mathscr{R}) \supset \cdots \\
C^{qq}(\mathscr{R}) &= \mathscr{F}^0 C^{qq}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^2 C^{qq}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{F}^4 C^{qq}(\mathscr{R}) \supset \cdots \ .
\end{aligned}$$

Cette filtration est compatible avec la multiplication, $\mathscr{F}^k C(\mathscr{R}) \cdot \mathscr{F}^h C(\mathscr{R}) \subset \mathscr{F}^{k+h} C(\mathscr{R})$, et avec la différentielle, $\partial_\Lambda(\mathscr{F}^k C(\mathscr{R})) \subset \mathscr{F}^k C(\mathscr{R})$. On note $C^{ij}(\mathscr{R})^{(k)} := \mathscr{F}^k C^{ij}(\mathscr{R}) / \mathscr{F}^{k+2} C^{ij}(\mathscr{R})$ le $\mathbb{Z}$-module gradué engendré par les chaînes de ij-chemins de Reeb de $C^{ij}(\mathscr{R})$ contenant exactement k cordes de Reeb mixtes. ∂_Λ passe alors au quotient en une différentielle

$$\partial_\Lambda : C^{ij}(\mathscr{R})^{(k)} \longrightarrow C^{ij}(\mathscr{R})^{(k)} \ .$$

On sera dans la suite en particulier intéressé par les $C^{ij}(\mathscr{R})^{(k)}$ suivants :

(i) La $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée $C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)}$.

(ii) Le $(C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)}, \mathbb{Z})$-bimodule différentiel gradué $C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)}$ et le $(\mathbb{Z}, C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)})$-bimodule différentiel gradué $C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)}$.

La filtration similaire introduite sur le $C(\Sigma)$ de l'homologie de cordes améliorée nous avait permis de recouvrer le $C(\Sigma)$ de l'homologie de cordes simple. Cela se reproduit ici, $C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)}$ est exactement la $C(\mathscr{R})$ de l'homologie de contact de noeud simple.

2. L'invariant $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ en terme d'homologie de contact améliorée

Nous introduisons dans cette partie l'équivalent du quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ en homologie de contact legendrienne. On adopte momentanément la notation $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, \nu)$ similaire à celle pour l'invariant que nous avions introduit dans le chapitre 3, et nous changerons de notations dans la dernière partie, lorsque nous montrerons que ces deux invariants sont isomorphes.

2.1. Définition du triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}). D'après les degrés possibles pour les cordes de Reeb, décrits dans la section 1.2, les égalités suivantes sont vérifiées

$$H_0(C^{KK}(\mathscr{R})) \cong H_0(C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)}) ,$$
$$H_0(C^{Kq}(\mathscr{R})) \cong H_0(C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)}) ,$$
$$H_1(C^{qK}(\mathscr{R})) \cong H_1(C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)}) .$$

La $\mathbb{Z}$-algèbre $H_0(C^{KK}(\mathscr{R}))$ est munie de sa structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative est donc exactement la $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative $H_0^{contact}(K)$ du chapitre 5. L'action de $C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)}$ sur $C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)}$ (resp. $C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)}$) passe quant-à-elle à l'homologie en une structure de $H_0(C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)})$-module à gauche (resp. à droite) sur $H_0(C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)})$ (resp. $H_1(C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)})$).

Définition 28. On définit le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) comme

$$(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) := (H_0(C^{KK}(\mathscr{R})), H_0(C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)}), H_1(C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)})) ,$$

où chacune des composantes est munie de la structure algébrique définie dans le paragraphe précédent.

2.2. Le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}) est un invariant de noeud orienté. Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés, et deux points $q_1 \in \mathbb{R}^3 \backslash K_1$ et $q_2 \in \mathbb{R}^3 \backslash K_2$. Une isotopie de legendriennes entre Λ_{K_1} et Λ_{K_2} fournit un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées Θ entre leurs algèbres composables $C(\mathscr{R})_{K_1}$ et $C(\mathscr{R})_{K_2}$. Θ préserve de plus la décomposition en somme directe

$$C(\mathscr{R})_{K_i} := C^{K_iK_i}(\mathscr{R}) \oplus C^{K_iq_i}(\mathscr{R}) \oplus C^{q_iK_i}(\mathscr{R}) \oplus C^{q_iq_i}(\mathscr{R}) ,$$

ainsi que les filtrations $\mathscr{F}^k C(\mathscr{R})_{K_i}$.

En particulier, en considérant les $R_{K_iK_i}$ comme des $\mathbb{Z}$-algèbres, on obtient un isomorphisme entre les triplets $(R_{K_1K_1}, R_{K_1q_1}, R_{q_1K_1})$ et $(R_{K_2K_2}, R_{K_2q_2}, R_{q_2K_2})$. L'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres graduées entre $H_*(C(\mathscr{R})_{K_1})$ vers $H_*(C(\mathscr{R})_{K_2})$ induit par l'isotopie est toujours décrit sur les éléments de $H_0(C(\Omega_{x_0}\Lambda_{K_1}), \partial^{sing}) = \mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_{K_1})]$ comme l'isomorphisme induit $\pi_1(\Lambda_{K_1}) \to \pi_1(\Lambda_{K_2})$.

En supposant que cette isotopie de legendriennes est maintenant paramétrisée, en voyant les $R_{K_iK_i}$ munis de leur structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative, l'isotopie de legendriennes induit un isomorphisme entre les triplets $(R_{K_1K_1}, R_{K_1q_1}, R_{q_1K_1})$ et $(R_{K_2K_2}, R_{K_2q_2}, R_{q_2K_2})$. Une isotopie de noeuds orientés entre K_1 et K_2 fournit en particulier une isotopie de legendriennes paramétrisées sur leurs legendriennes, donc le triplet (R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}), et plus généralement l'homologie de contact de noeud améliorée, est bien un invariant de noeud orienté.

Lorsque l'isotopie n'est pas paramétrisée, d'après le deuxième paragraphe, elle envoie tout de même le méridien μ_1 sur $\mu_2^a\lambda_2^b$ et la longitude de Seifert λ_1 sur $\mu_2^c\lambda_2^d$, où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{Z})$.

2.3. Le $\mathbb{Z}$-module R_{qq}. On définit le $\mathbb{Z}$-module

$$R_{qq} := R_{qK} \underset{R_{KK}}{\otimes} R_{Kq} .$$

Il se reformule comme un groupe d'homologie de $H_*(C(\mathscr{R}))$:

Proposition 36. *En tant que $\mathbb{Z}$-modules, $R_{qq} \cong H_1(C^{qq}(\mathscr{R})) \cong H_1(C^{qq}(\mathscr{R})^{(2)})$.*

DÉMONSTRATION. L'isomorphisme de droite est immédiat d'après les degrés possibles pour les cordes de Reeb. Montrons que $R_{qq} \cong H_1(C^{qq}(\mathscr{R})^{(2)})$. La flèche vers la droite est induite par la concaténation des chemins composables de $C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)}$ et $C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)}$. Notons maintenant que tout élément de degré 1 de $C^{qq}(\mathscr{R})^{(2)}$ s'écrit sous la forme

$$\beta_1 b_1 \alpha_1 a_1 \cdots \alpha_{n-1} a_{n-1} \alpha_n b_2 \beta_2$$

où

(i) b_1 est une qK-corde de Reeb de degré 1, b_2 est une Kq-corde de Reeb de degré 0 et les a_i sont des KK-cordes de Reeb de degré 0.

(ii) β_1 et β_2 sont des chemins à valeurs dans Λ_q et les α_i sont des chemins à valeurs Λ_K.

L'inverse se définit alors simplement comme,

$$H_1(C^{qq}(\mathscr{R})^{(2)}) \longrightarrow R_{qq}$$
$$\beta_1 b_1 \alpha_1 a_1 \cdots \alpha_{n-1} a_{n-1} \alpha_n b_2 \beta_2 \longmapsto \beta_1 b_1 \otimes \alpha_1 a_1 \cdots \alpha_{n-1} a_{n-1} \alpha_n b_2 \beta_2 \ .$$

où b_1 et α_1 sont raccordés à x_0 par le chemin de raccordement de b_1 en l'extrémité concernée. □

On achève enfin la définition du quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, \nu)$ en munissant R_{qq} d'une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre. Il n'est pas possible de la définir de manière naïve par concaténation, car $C^{qq}(\mathscr{R})^{(2)}$ n'est pas stable par concaténation. On va définir un morphisme de R_{KK}-bimodules,

$$\nu : R_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qK} \longrightarrow R_{KK}$$

qui induira le produit sur R_{qq}. Ce morphisme ν sera défini par un compte de disques holomorphes à deux pointes positives.

2.4. Le produit ν. Soient a_1 une corde de Reeb $\in \mathscr{R}^{Kq}$ et a_2 une corde de Reeb $\in \mathscr{R}^{qK}$. Soit un mot composable en KK-cordes de Reeb $\boldsymbol{b} = b_1 b_2 \dots b_l$. On note $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})$ l'espace de modules des disques holomorphes de symplectisation $u : (D, \partial D) \to (\mathbb{R} \times S^*Q, \mathbb{R} \times (\Lambda_K \cup \Lambda_q))$ de la forme suivante :

(a) Le disque u a deux pointes positives, l'une en 1 correspondant à a_2 et l'autre en -1 correspondant à a_1.

(b) La portion supérieure de ∂D connectant 1 à -1 dans le sens trigonométrique, est envoyée sur $\mathbb{R} \times \Lambda_q$.

(c) Le disque u a m pointes négatives dans la partie inférieure de ∂D, et le chemin de -1 vers 1 est décrit par le mot $\boldsymbol{b}$.

Un exemple de disque holomorphe de $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})$ est donné sur la figure 2.

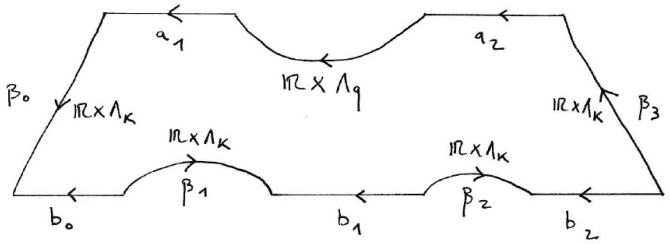


FIGURE 2. Un exemple de disque de symplectisation de $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})$ où $\boldsymbol{b} = b_0 b_1 b_2$

Alors, l'espace de modules $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})$ est une variété de dimension

$$\dim\left(\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})\right) = |a_1| + |a_2| - |\boldsymbol{b}| \ .$$

De plus, le choix d'une structure presque-complexe $\mathbb{R}$-invariante permet de munir $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})/\mathbb{R}$ d'une structure de variété orientée compacte de dimension 0, dans le cas où $|\boldsymbol{b}| = |a_1| + |a_2| - 1$.

Toute chaîne de chemins de Reeb de $C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)}$ est de la forme $\boldsymbol{c}_1 a_1 \alpha_1$ où $\boldsymbol{c}_1$ ne contient que des cordes de Reeb pures de Λ_K et $a_1 \in \mathscr{R}^{Kq}$. De même, toute chaîne de chemins de Reeb de $C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)}$ est de la forme $\alpha_2 a_2 \boldsymbol{c}_2$ où $\boldsymbol{c}_2$ ne contient que des cordes de Reeb pures de Λ_K et $a_2 \in \mathscr{R}^{qK}$.

On définit alors le morphisme de $C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)}$-bimodules

$$\nu : C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)} \longrightarrow C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)} ,$$

par la formule

$$\nu(\boldsymbol{c}_1 a_1 \alpha_1, \alpha_2 a_2 \boldsymbol{c}_2) = \sum_{\substack{|a_1|+|a_2|-|\boldsymbol{b}|=1 \\ u \in \mathscr{M}^{sy}(a_1,a_2;\boldsymbol{b})/\mathbb{R}}} \varepsilon \boldsymbol{c}_1 \cdot \partial u \cdot \boldsymbol{c}_2 ,$$

où l'opération $\boldsymbol{c}_1 \cdot \partial u \cdot \boldsymbol{c}_2$ est décrite sur la figure 3 et ε est le signe associée à l'orientation en u de $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})/\mathbb{R}$.

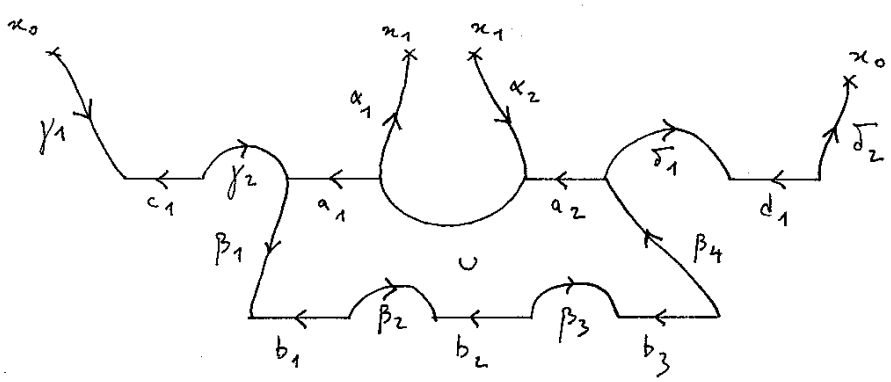


FIGURE 3. Le chemin de Reeb associé à $\gamma_1 c_1 \gamma_2 a_1 \alpha_1$ et $\alpha_2 a_2 \delta_1 d_1 \delta_2$ par ν pour ce disque holomorphe u est $\gamma_1 c_1 (\gamma_2 \beta_1) b_1 \beta_2 b_2 \beta_3 b_3 (\beta_4 \delta_1) d_1 \delta_2$ où γ_2 et β_1 (resp. β_4 et δ_1) sont concaténés en leur extrémité commune

On utilise dans la suite de cette partie les conventions de Koszul pour le produit tensoriel : par exemple $(\partial_\Lambda \otimes 1)(a \otimes b) = (\partial_\Lambda a) \otimes b$ et $(1 \otimes \partial_\Lambda)(a \otimes b) = (-1)^{|a|} a \otimes (\partial_\Lambda b)$.

Le morphisme ν est de degré -1 et on peut démontrer que (voir la proposition 2.11 de [**ENS16**])

$$\nu \circ (\partial_\Lambda \otimes 1 + 1 \otimes \partial_\Lambda) = \partial_\Lambda \circ \nu ,$$

ce qui implique que ν induit un morphisme de R_{KK}-bimodules,

$$\nu : R_{Kq} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_{qK} \longrightarrow R_{KK} .$$

2.5. Le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, \nu)$ est un invariant de noeud orienté. Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés. On a vu que si Λ_{K_1} et Λ_{K_2} sont isotopes en tant que legendriennes, il existe un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\Theta : C(\mathscr{R})_{K_1} \longrightarrow C(\mathscr{R})_{K_2}$$

qui induit un isomorphisme entre les triplets $(R_{K_1K_1}, R_{K_1q_1}, R_{q_1K_1})$ et $(R_{K_2K_2}, R_{K_2q_2}, R_{q_2K_2})$. En fait, on peut en plus construire à partir d'un compte de disques holomorphes, un morphisme

$$\kappa : C^{K_1q_1}(\mathscr{R})^{(1)} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} C^{q_1K_1}(\mathscr{R})^{(1)} \longrightarrow C^{K_2K_2}(\mathscr{R})^{(0)}$$

relié à ν_1, ν_2 et Θ par la formule

$$\Theta \circ \nu_1 - \nu_2 \circ (\Theta \otimes \Theta) - \kappa \circ (\partial_{\Lambda_1} \otimes 1 + 1 \otimes \partial_{\Lambda_1}) + \partial_{\Lambda_2} \circ \kappa = 0 \ .$$

Cette égalité implique que s'il existe une isotopie de legendriennes entre Λ_{K_1} et Λ_{K_2}, les quadruplets $(R_{K_1K_1}, R_{K_1q_1}, R_{q_1K_1}, \nu_1)$ et $(R_{K_2K_2}, R_{K_2q_2}, R_{q_2K_2}, \nu_2)$ sont isomorphes (en conservant ou non la structure de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$-algèbre non commutative sur les $R_{K_iK_i}$ si l'isotopie est paramétrisée ou non). Si deux noeuds K_1 et K_2 sont isotopes, leurs quadruplets sont ainsi isomorphes : on a en particulier défini un invariant de noeud orienté.

3. Les homologies de contact et de cordes définissent des quadruplets isomorphes

3.1. Construction du morphisme Φ entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$. De même qu'on identifie la lagrangienne L_K au voisinage tubulaire N de K, on identifie désormais la lagrangienne L_q au voisinage B de q. Nous donnons les grandes lignes de la construction du morphisme d'algèbres différentielles graduées Φ entre $C(\mathscr{R})$ et $C(\Sigma)$ qui définira un isomorphisme de quadruplets entre le quadruplet $(R_{KK}^{contact}, R_{Kq}^{contact}, R_{qK}^{contact}, \nu)$ associé à $C(\mathscr{R})$ et le quadruplet $(R_{KK}^{cordes}, R_{Kq}^{cordes}, R_{qK}^{cordes}, P)$ associé à $C(\Sigma)$. Le schéma est le même que dans le chapitre précédent. Après avoir introduit les espaces de modules $\mathscr{M}_l(a)$ qui servent à définir Φ, on construit Φ sur les cordes de Reeb, de sorte que

$$\partial\Phi(a) = \Phi(\partial^{sy} a) - (\delta_Q^K + \delta_N^K + \delta_Q^q + \delta_B^q)\Phi(a) \ ,$$

et on conclut en l'étendant à toutes les chaînes de chemins de Reeb.

On considère cette fois des disques de cobordisme $(D, \partial D) \to (T^*Q, L_K \cup Q \cup L_q)$ avec une pointe positive, et un certain nombre de pointes d'intersection lagrangienne sur K ou q. Un exemple d'un tel disque est représenté sur la figure 4.

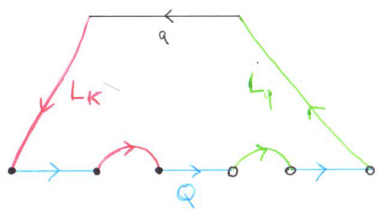


FIGURE 4. Un exemple de disque de cobordisme de $\mathscr{M}_1(a)$

Les espaces de modules associés sont notés $\mathscr{M}_l(a)$, où l représente le nombre de pointes d'intersection lagrangienne en q où le bord ∂D passe de L_q à Q. Ils peuvent être compactifiés en des variétés compactes orientées de dimension

$$\dim(\mathscr{M}_l(a)) = |a| - l \ .$$

Ces variétés peuvent également être triangulées et permettent de définir pour toute ij-corde de Reeb a une combinaison linéaire

$$\Phi(a) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l(a)$$

de chaînes de ij-cordes brisées dans $C^{ij}(\Sigma)$, où les $\Phi_l(a)$ sont les chaînes associées aux espaces de module $\mathscr{M}_l(a)$. Notons que cette somme est bien finie car le nombre de pointes que peut avoir un disque de cobordisme est uniformément borné par une constante κ.

Vérifions que Φ respecte bien le degré. Si $a \in \mathscr{R}^{KK}$, pour tout l,

$$\Phi_l(a) \in C^{KK}_{|a|-l}(\Sigma_{2l}) \subset \tilde{C}^{KK}_{|a|} \ ,$$

si $a \in \mathscr{R}^{Kq}$, pour tout l,

$$\Phi_l(a) \in C^{KK}_{|a|-l}(\Sigma_{2l+1}) \subset \tilde{C}^{Kq}_{|a|} \ ,$$

et enfin, si $a \in \mathscr{R}^{qK}$, pour tout l,

$$\Phi_l(a) \in C^{KK}_{|a|-l}(\Sigma_{2l-1}) \subset \tilde{C}^{qK}_{|a|} \ .$$

Cela explique le choix de graduation qu'on avait fait dans la section 5.3 du chapitre 3 pour $C(\Sigma)$.

Le fait que $\Phi(a)$ satisfasse la formule

$$\partial\Phi(a) = \Phi(\partial^{sy}a) - (\delta^K_Q + \delta^K_N + \delta^q_Q + \delta^q_B)\Phi(a) \ ,$$

découle d'un examen des bords des variétés $\mathscr{M}_l(a)$. Le morphisme Φ est alors étendu à toute d-chaîne de chemins de Reeb

$$\boldsymbol{a} := \alpha_1 a_1 \dots \alpha_m a_m \alpha_{m+1} : \Delta \to \mathscr{R}^m \ ,$$

par la formule

$$\Phi(\boldsymbol{a}) := \alpha_1 \Phi(a_1) \dots \alpha_m \Phi(a_m) \alpha_{m+1} \in C(\Sigma) \ ,$$

où les α_i à valeurs dans Λ_K sont vus comme des N-cordes en raccordant leurs extrémités à x_0 par les chemins de raccordements associés aux a_i, et les α_i à valeurs dans Λ_q sont vus comme des B-cordes en raccordant leurs extrémités à x_1 par les chemins de raccordements des a_i. En notant Δ_i les domaines des $\Phi(a_i)$, $\Phi(\boldsymbol{a})$ a pour domaine

$$\Delta \times \Delta_1 \times \dots \times \Delta_m \ ,$$

et ce domaine est orienté dans l'ordre de ses facteurs. On vérifie de la même manière que pour la proposition 32 que l'application Φ définit ainsi un morphisme d'algèbres différentielles graduées de $(C(\mathscr{R}), \partial_\Lambda)$ vers $(C(\Sigma), \partial + \delta^K_Q + \delta^K_N + \delta^q_Q + \delta^q_B)$.

3.2. Le morphisme Φ définit un isomorphisme de triplets. Notons avant de continuer que le morphisme Φ préserve les décompositions

$$C(\mathscr{R}) := C^{KK}(\mathscr{R}) \oplus C^{Kq}(\mathscr{R}) \oplus C^{qK}(\mathscr{R}) \oplus C^{qq}(\mathscr{R})$$
$$C(\Sigma) := C^{KK}(\Sigma) \oplus C^{Kq}(\Sigma) \oplus C^{qK}(\Sigma) \oplus C^{qq}(\Sigma)$$

c'est-à-dire qu'il envoie une chaîne de ij-chemins de Reeb sur une chaîne de ij-cordes brisées. Φ préserve également les filtrations $\mathscr{F}^k C(\mathscr{R})$ et $\mathscr{F}^k C(\Sigma)$ définies dans la section 5.6 du chapitre 3 et dans la section 1.4 de ce chapitre : Φ envoie toute chaîne de ij-chemins de Reeb ayant au moins k cordes de Reeb mixtes sur une chaîne de ij-cordes brisées ayant au moins k Q-cordes mixtes.

Φ passe donc au quotient en des morphismes

$$\Phi : C^{ij}(\mathscr{R})^{(k)} \longrightarrow C^{ij}(\Sigma)^{(k)} \ .$$

En particulier, le morphisme $\Phi : C^{KK}(\mathscr{R})^{(0)} \longrightarrow C^{KK}(\Sigma)^{(0)}$ est exactement le morphisme Φ que nous avions construit dans le chapitre précédent.

PROPOSITION 37. *Le morphisme Φ induit un isomorphisme de triplets*

$$\Phi : (R^{contact}_{KK}, R^{contact}_{Kq}, R^{contact}_{qK}) \xrightarrow{\sim} (R^{cordes}_{KK}, R^{cordes}_{Kq}, R^{cordes}_{qK}) \ .$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle du théorème 10. On introduit la filtration sur $C(\mathscr{R})$, définie par la somme des actions des cordes de Reeb (qui sont leur longueur dans $\mathbb{R}^3$ en tant que cordes binormales), et la filtration sur $C(\Sigma)$, définie par le maximum de la somme des longueurs des Q-cordes, en ne comptant pas la longueur des Q-piques. Le morphisme Φ préserve alors ces filtrations. On démontre que Φ définit bien un isomorphisme de triplets sur des petites fenêtres de la filtration, et le même argument de passage à la limite utilisant le lemme des cinq permet de conclure. □

Enfin, on remarque que le morphisme Φ définit des i-chaînes génériques de cordes brisées pour $i \geq 3$, que nous n'avons pourtant pas définies. Cependant, ne sont utilisées dans la démonstration du théorème précédent que des chaînes de chemins de Reeb dont l'image par Φ est une chaîne générique de corde brisée de degré 0, 1 ou 2.

Nous montrons dans la section suivante, par une nouvelle analyse d'espaces de modules de disques holomorphes, que Φ induit en fait un morphisme de quadruplets.

3.3. Le morphisme Φ définit un isomorphisme de quadruplets. Le produit ν a été défini par un compte de disques de symplectisation à deux pointes positives dans les espaces de modules $\mathscr{M}^{sy}(a_1, a_2; \boldsymbol{b})$. On définit leurs analogues à valeurs dans T^*Q.

Soient $a_1 \in \mathscr{R}^{Kq}$ et $a_2 \in \mathscr{R}^{qK}$. L'espace de modules $\mathscr{M}_l(a_1, a_2)$ est défini comme l'ensemble des disques de cobordisme $u : (D, \partial D) \to (T^*Q, \mathbb{R} \times (L_K \cup Q \cup L_q))$ de la forme suivante :

(a) Le disque u a deux pointes positives, l'une en 1 correspondant à a_2 et l'autre en -1 correspondant à a_1.

(b) La portion supérieure de ∂D connectant 1 à -1 dans le sens trigonométrique, est envoyée sur L_q.

(c) Le disque u a un certain nombre de pointes d'intersection lagrangienne dans la partie inférieure de ∂D, dont exactement l pointes d'intersection lagrangienne en q où le bord ∂D passe de L_q à Q.

Un exemple de disque de cobordisme de $\mathscr{M}_1(a_1, a_2)$ est représenté sur la figure 5.

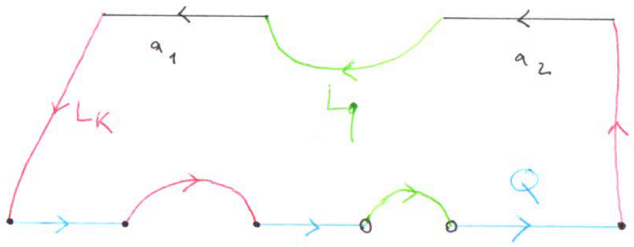


FIGURE 5. Un exemple de disque de cobordisme de $\mathscr{M}_1(a_1, a_2)$

Les espaces de modules $\mathscr{M}_l(a_1, a_2)$ peuvent être compactifiées en des variétés compactes orientées à coins de dimension

$$\dim(\mathscr{M}_l(a_1, a_2)) = |a_1| + |a_2| - l \ .$$

Par un procédé de construction analogue à celui utilisé pour la définition du morphisme Φ, on définit à l'aide de ces espaces de modules un morphisme

$$\Psi : C^{Kq}(\mathscr{R})^{(1)} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} C^{qK}(\mathscr{R})^{(1)} \longrightarrow C_*^{KK} \ .$$

Un examen des bords de codimension 1 des variétés $\mathscr{M}_l(a_1, a_2)$ montre alors l'égalité

$$\partial \circ \Psi = \Phi \circ \nu - P \circ (\Phi \otimes \Phi) + \Psi \circ (1 \otimes \partial + \partial \otimes 1) - (\delta_Q^K + \delta_N^K) \circ \Psi - (\delta_Q^q + \delta_B^q) \circ \Psi \ ,$$

où P est le produit défini dans la section 5.5 du chapitre 3.

En particulier, $\Phi_* \circ \nu = P \circ (\Phi_* \otimes \Phi_*)$ en homologie, ce qui implique le théorème suivant :

THÉORÈME 11. *Les quadruplets* $(R_{KK}^{contact}, R_{Kq}^{contact}, R_{qK}^{contact}, \nu)$ *et* $(R_{KK}^{cordes}, R_{Kq}^{cordes}, R_{qK}^{cordes}, P)$ *sont isomorphes à travers le morphisme* Φ.

La première partie du théorème 9 est une conséquence du théorème 8 : deux noeuds K_1 et K_2, pour lesquels il existe une isotopie de legendriennes paramétrisées entre leurs legendriennes Λ_{K_1} et Λ_{K_2}, sont eux-mêmes isotopes.

3.4. Le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ comme invariant de noeud à miroir et inverse près. On conclut avec une démonstration de la deuxième partie du théorème 9, utilisant le quadruplet $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$.

THÉORÈME 12. *Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés de $\mathbb{R}^3$. S'il existe une isotopie de legendriennes entre leurs legendriennes Λ_{K_1} et Λ_{K_2}, alors les noeuds K_1 et K_2 sont isotopes à image miroir et inverse près.*

DÉMONSTRATION. Soient donc K_1 et K_2 deux noeuds orientés de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe une isotopie de legendriennes entre les legendriennes Λ_{K_1} et Λ_{K_2}. En voyant les $R_{K_iK_i}$ comme des $\mathbb{Z}$-algèbres, l'isotopie de legendriennes induit un isomorphisme de quadruplets entre les quadruplets $(R_{KK}, R_{Kq}, R_{qK}, P)$ de chaque noeud. De plus, comme nous l'avons signalé à la fin de la section 2.2, cet isomorphisme envoie le méridien μ_1 sur $\mu_2^a\lambda_2^b$ et la longitude de Seifert λ_1 sur $\mu_2^c\lambda_2^d$, où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{Z})$.

L'idée de la démonstration est similaire à celle de la démonstration du théorème 8. Il s'agit de recouvrer l'intégralité des systèmes périphériques des noeuds K_1 et K_2 (à inverse et image miroir près), en utilisant les propriétés algébriques du quadruplet ainsi que les résultats des propositions 20 et 21.

En posant $\psi_{Kq}(1) = x$ et $\psi_{qK}(\mu_1 - 1) = x'(\mu_2 - 1)$, on obtient cette fois l'égalité

$$xx'(\mu_2 - 1) = \mu_2^{n_1}\lambda_2^{n_2} - 1 \ .$$

D'après la proposition 21, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_2^{n_1}\lambda_2^{n_2} = \mu_2^n$. Mais comme le noeud K_2 n'est pas trivial, nécessairement $n_2 = 0$. Or $\left(\begin{smallmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, donc $n_1 = \pm 1$ et $n_4 = \pm 1$.

Supposons par exemple que $n_1 = n_4 = 1$. Alors $\psi_{KK}(\mu_1) = \mu_2$, $\psi_{KK}(\lambda_1) = \mu_2^{n_3}\lambda_2$ et $xx'(\mu_2 - 1) = \mu_2 - 1$. Cette dernière égalité implique qu'il existe un $\gamma \in \pi_2$ tel que $x' = \pm\gamma$ et $x = \pm\gamma^{-1}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_{qq}(\lambda_1^\alpha(\mu_1 - 1)) = \psi_{qK}(\mu_1 - 1) \cdot \psi_{KK}(\lambda_1^\alpha) \cdot \psi_{Kq}(1) = \gamma\mu_2^{\alpha n_3}\lambda_2^\alpha(\mu_2 - 1)\gamma^{-1} \ .$$

On conclut ainsi l'égalité suivante

$$\{\Psi(\lambda_1^\alpha\mu_1), \Psi(\lambda_1^\alpha)\} = \left\{\gamma\lambda_2^\alpha\mu_2^{\alpha n_3}\gamma^{-1}, \gamma\lambda_2^\alpha\mu_2^{\alpha n_3+1}\gamma^{-1}\right\} \ .$$

En évaluant en $\alpha = 0, 1$, on trouve $\Psi(\mu_1) = \gamma\mu_2\gamma^{-1}$ et $\Psi(\lambda_1) = \gamma\mu_2^{n_3}\lambda_2\gamma^{-1}$. La conjugaison par γ induit donc un isomorphisme de groupe $\pi_1 \tilde{\to} \pi_2$ qui envoie μ_1 sur μ_2 et λ_1 sur $\lambda_2\mu_2^{n_3}$.

Enfin, sachant que l'abélianisé de π_i est engendré par μ_i et que la projection de λ_i y est nulle, n_3 vaut nécessairement 0. Ainsi Ψ préserve bien le système périphérique : les noeuds K_1 et K_2 sont équivalents en tant que noeuds orientés.

Les autres cas se traitent de manière identique. On obtient finalement selon les valeurs de n_1 et n_4 que le noeud K_1 est équivalent soit au noeud K_2, soit à l'inverse de K_2, soit à l'image miroir de K_2, soit à l'image miroir de l'inverse de K_2. Ce qui conclut la démonstration de ce théorème. □

Bibliographie

[Bur03] Gerhard Burde. *Knots*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 2003.

[CEL09] Kai Cieliebak, Tobias Ekholm, and Janko Latschev. Compactness for holomorphic curves with switching lagrangian boundary conditions, 2009.

[CELN16] Kai Cieliebak, Tobias Ekholm, Janko Latschev, and Lenhard Ng. Knot contact homology, string topology, and the cord algebra, 2016.

[Cor13a] Christopher Cornwell. Kch representations, augmentations, and a-polynomials, 2013.

[Cor13b] Christopher Cornwell. Knot contact homology and representations of knot groups. 2013.

[ENS16] Tobias Ekholm, Lenhard Ng, and Vivek Shende. A complete knot invariant from contact homology, 2016.

[Gei08] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[GL15] Cameron Gordon and Tye Lidman. Knot contact homology detects cabled, composite, and torus knots, 2015.

[McD12] Dusa McDuff. *J-holomorphic curves and symplectic topology*. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2012.

[Ng12] Lenhard Ng. A topological introduction to knot contact homology. 2012.

[She16] Vivek Shende. The conormal torus is a complete knot invariant, 2016.