

Mémoire de maîtrise

Longs chemins auto-évitants

Thomas MAINGUY et Robin STEPHENSON
Sujet proposé par Wendelin WERNER

Résumé

Nous étudions certaines propriétés des longs chemins auto-évitants aléatoires dans \mathbb{Z}^d choisis ‘uniformément’.

Dans un premier temps, on étudie le nombre de chemins auto-évitants à N pas, et on améliore la simple approximation géométrique du nombre de chemins à N pas. On met ensuite en évidence une loi de probabilité et un phénomène de renouvellement pour une certaine catégorie importante de tels chemins.

Enfin, après avoir démontré un théorème de Kesten sur l’apparition de certains motifs dans les longs chemins, et l’avoir appliqué pour améliorer l’estimation de la première section, nous établissons une loi de probabilité sur les chemins auto-évitants de longueur infinie dans un demi-espace de deux manières différentes.

Table des matières

Introduction et considérations générales	2
0.1 Premières définitions	2
0.2 La constante de connectivité	3
0.3 Fonctions génératrices	4
1 Une borne et une de ses conséquences	5
1.1 Une borne pour $c_N \mu^{-N}$	5
1.2 Une conséquence sur les ponts	7
2 Ponts et renouvellement	8
2.1 La masse	8
2.2 Théorie du renouvellement sur les ponts	8
3 Théorème des motifs et une application	14
3.1 Théorème des motifs de Kesten	14
3.2 Théorème ratio-limite	17
4 Lois de probabilités sur les ponts infinis	21
4.1 Une loi naturelle	21
4.2 La loi ‘suite de ponts irréductibles’	22
4.3 Conclusion : vers une courbe continue...	23
A Séparation des masses	24
A.1 Les retours	24
A.2 Preuve du théorème de séparation des masses	25
B Démonstration du théorème du renouvellement	28

Introduction et considérations générales

Dans un graphe infini, on s'intéresse à une classe particulière de marches : celles qui ne se recoupent jamais. On peut vouloir obtenir des informations sur le nombre de tels chemins, et sur leur structure. Une catégorie importante de graphes dans ce domaine est celle des réseaux de \mathbb{R}^d , et nous nous restreindrons dans cette étude au réseau hypercubique \mathbb{Z}^d .

Les résultats que nous établirons seront de deux types : des résultats de nature combinatoire et d'autres de nature probabiliste. Les premiers nous renseigneront sur le cardinal de certains ensembles de chemins auto-évitants. Outre établir la croissance quasi-géométrique du nombre de chemins auto-évitants à N pas, et quelques autres résultats dignes d'intérêt, ils permettront de construire une loi sur les chemins auto-évitants dans le demi-espace droit, et de faire apparaître un phénomène de renouvellement, qui a lieu lorsque le chemin atteint pour la dernière fois une abscisse.

0.1 Premières définitions

Définition 0.1. *Un chemin est une suite finie $\omega = (\omega(0), \dots, \omega(N))$ de plus proches voisins dans \mathbb{Z}^d . On dit qu'il est auto-évitant si la suite est de plus injective. On note \mathcal{C} l'ensemble des chemins auto-évitants, considérés à translations près. Par commodité, on prendra $\omega(0) = 0$.*

Pour $\omega = (\omega(0), \dots, \omega(N))$, on note $|\omega| = N$ sa longueur, ou encore son nombre de pas, et on définit son étendue $A = \max_{i,j} \omega_1(i) - \omega_1(j)$, où on note y_i la i -ième coordonnée de y dans la base canonique de \mathbb{Z}^d .

On note c_N le nombre de chemins auto-évitants de longueur N .

On notera aussi $\omega[i, j]$ le chemin $(\omega(i), \dots, \omega(j))$, pour $i \leq j$.

Plusieurs classes particulières de ces chemins nous intéresseront à l'avenir :

Définition 0.2. *On note \mathcal{H} l'ensemble des chemins auto-évitants qui restent dans le demi-espace $\{x_1 > 0\}$ à partir de leur premier pas, et h_N le cardinal des chemins de \mathcal{H} à N pas.*

On dit qu'un chemin auto-évitant à N pas ω est un pont s'il vérifie

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad 0 < \omega_1(i) \leq \omega_1(N).$$

On notera \mathcal{B} l'ensemble des ponts et b_N le cardinal de l'ensemble des ponts à N pas.

Définition 0.3. *Si ω et ω' sont deux chemins de longueurs respectives N et N' , on peut définir leur concaténation $\omega \circ \omega'$ comme le chemin ρ de longueur $N + N'$ vérifiant*

$$\rho(i) = \begin{cases} \omega(i) & \text{pour } i \in \llbracket 0, N \rrbracket \\ \omega(N) + \omega'(i - N) & \text{pour } i \in \llbracket N + 1, N + N' \rrbracket. \end{cases}$$

On remarque que, si la concaténation de deux chemins auto-évitants n'en donne pas nécessairement un troisième, la concaténation de deux ponts en donne toujours un troisième.

Définition 0.4. *On dit qu'un pont ω est irréductible s'il ne peut pas s'écrire comme concaténation de deux ponts de longueur strictement positive. On notera \mathcal{I} l'ensemble des ponts irréductibles et λ_N le nombre de ponts irréductibles à N pas.*

Par convention, il n'existe pas de ponts irréductibles de longueur nulle.

Définition 0.5. *Soit ω un pont à N pas. On dit que $j \in \llbracket \omega_1(0), \omega_1(N) \rrbracket$ est un point de rupture de ω s'il existe $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket \quad \omega_1(i) \leq j$ et $\forall i \in \llbracket r + 1, N \rrbracket \quad \omega_1(i) > j$.*

On remarque qu'un pont est irréductible si, et seulement si, il n'a pas de point de rupture autre que l'abscisse de son dernier point.

Proposition 0.1. *Un pont s'écrit de manière unique comme concaténation de ponts irréductibles.*

Démonstration. Soit ω un pont non irréductible, soit i le plus grand entier tel que $\omega_1(i)$ soit le plus petit point de rupture de ω . Alors $\eta^{[1]} = (\omega(0), \dots, \omega(i))$ est un pont irréductible, le reste est un pont, de longueur strictement plus petite. C'est le premier terme de la décomposition.

L'unicité de $\eta^{[1]}$ provient de l'observation suivante : Étant donné un pont, il existe un unique pont irréductible le commençant, tel que le reste soit encore un pont (éventuellement un point) : l'abscisse du dernier point du pont irréductible doit être le premier point de rupture, et le pont ne doit plus y retourner, ce qui donne la maximalité de i dans la construction précédente.

On conclut par récurrence. □

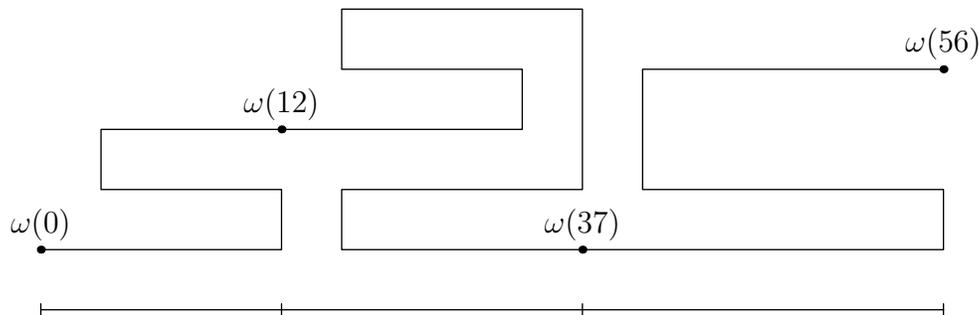


FIG. 1 – Un pont et sa décomposition en ponts irréductibles. Les points indiquent les limites des ponts irréductibles, les traits les points de rupture.

Définition 0.6. *Si \mathcal{A} est un ensemble de chemins, on note pour $N \in \mathbb{N}$, \mathcal{A}_N l'ensemble des chemins dans \mathcal{A} à N pas.*

0.2 La constante de connectivité

On cherche à comprendre l'accroissement du nombre de chemins auto-évitant avec la longueur. Comme on a, pour tout N , l'encadrement $d^N \leq c_N \leq 2d(2d-1)^{N-1}$ (car, pour obtenir un chemin auto-évitant, on peut se limiter à prendre les coordonnées croissantes, mais les retours immédiats sont interdits), on peut penser que le comportement de c_N est grosso modo géométrique. On a en fait le résultat suivant :

Théorème 0.1 (constante de connectivité). *Il existe un réel strictement positif μ , appelé constante de connectivité, tel que*

$$c_N^{1/N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu.$$

De plus, pour tout N , $c_N \geq \mu^N$.

C'est une conséquence directe du lemme suivant

Lemme 0.1 (sous-additivité). *Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle sous-additive, c'est à dire telle que*

$$\forall n, m \geq 1, u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

Alors la suite $(u_n/n)_{n \geq 1}$ converge et

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq 1} \frac{u_k}{k}.$$

Démonstration. On a les inégalités évidentes :

$$\inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}.$$

Il suffit donc de montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n/n) \leq \inf_{n \geq 1} (u_n/n)$. Soient alors n et p deux entiers. Posons

$$M = \max_{r \in [0, p-1]} u_r.$$

Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par p , on a par une récurrence évidente que $u_n \leq qu_p + u_r$. Comme $q \leq n/p$, on a

$$\frac{u_n}{n} \leq q \frac{u_p}{n} + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M}{n}.$$

En prenant la limite supérieure, on obtient :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}.$$

Ceci étant vrai pour tout $p \geq 1$, on a alors l'inégalité voulue. \square

Remarquant de plus que, pour tous N et M , tout chemin de longueur $N + M$ s'écrit comme la concaténation d'un chemin de longueur N et d'un chemin de longueur M , si bien que $c_{N+M} \leq c_N c_M$. En passant au logarithme, on obtient l'existence de la constante de connectivité μ , qui vérifie d'ailleurs $d \leq \mu \leq 2d - 1$ et $c_N \geq \mu^N$, puisque le lemme nous affirme que la limite est en réalité l'infimum.

Remarques : La concaténation de deux ponts étant toujours un pont, la suite $(b_N^{1/N})_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers une 'constante de connectivité des ponts' μ_B , vérifiant par 'sur-multiplicativité' $b_N \leq \mu_B^N$. Cette constante est trivialement inférieure à μ puisqu'un pont est un chemin auto-évitant. On verra qu'il y a en fait égalité.

Ceci ne nous donne cependant pas énormément d'informations sur le comportement asymptotique de c_N . Nous montrerons plus tard que $c_{N+2}/c_N \rightarrow \mu^2$.

Il est également conjecturé que

$$c_N \sim C \mu^N N^{\gamma-1}.$$

Ceci a été démontré en dimension supérieure à 5, avec $\gamma = 1$.

0.3 Fonctions génératrices

Un certain nombre de raisonnements dans la suite s'appuient sur l'utilisation des séries génératrices. Introduisons-en donc certaines particulièrement importantes :

Définition 0.7. On définit la fonction génératrice χ des chemins auto-évitants par

$$\chi(z) = \sum_{N \in \mathbb{N}} c_N z^N = \sum_{\omega} z^{|\omega|}.$$

On définit de même H_z , B_z et Λ_z les fonctions génératrices des chemins dans un demi-espace, ponts, et ponts irréductibles respectivement.

On remarquera que, les coefficients des séries étant toujours positifs, quand z tend vers le rayon de convergence de la série par valeurs inférieures, la valeur de la série en z converge vers sa valeur en son rayon de convergence, éventuellement infini (convergence monotone).

La section précédente, avec $\lim_{N \rightarrow \infty} c_N^{1/N} = \mu$ nous donne le rayon de convergence de χ : c'est $z_c = \mu^{-1}$.

De plus, comme $c_N \geq \mu^N$, on a, pour $z \in [0, z_c)$, $\chi(z) \geq 1/(1 - \mu z)$. En particulier, $\chi(z_c) = +\infty$.

1 Une borne et une de ses conséquences

La sous-additivité nous dit seulement que $c_N = \mu^N \exp(o(N))$. Dans cette section, nous établissons une majoration de $c_N \mu^{-N}$ en $\exp(O(\sqrt{N}))$, ce qui est la meilleure majoration connue en dimension 2. Nous en tirons ensuite des conséquences très importantes sur les ponts.

1.1 Une borne pour $c_N \mu^{-N}$

Théorème 1.1. *Pour tout $B > \pi\sqrt{2/3}$, il existe $N_0 \geq 1$ tel que*

$$\forall N \geq N_0, c_N \leq \mu^{N+1} e^{B\sqrt{N}}.$$

Pour démontrer ce théorème, on a d'abord besoin de quelques résultats préliminaires.

Définition 1.1. *Soit N un entier strictement positif. Une partition de N est la donnée d'une suite finie d'entiers $N_1 > N_2 > \dots > N_k > 0$ telle que $N_1 + \dots + N_k = N$. On note $P(N)$ le cardinal de l'ensemble des partitions de N .*

Remarque : Une telle partition de N est équivalente à la donnée d'une suite strictement croissante $(a_i)_{i \in [1, k]}$ telle que $a_k = N$ et $a_1 > a_2 - a_1 > \dots > a_k - a_{k-1}$ par la bijection $(N_j)_j \mapsto (\sum_{i=1}^j N_i)_j$.

Nous admettrons le résultat suivant de combinatoire.

Théorème 1.2. *On a le comportement asymptotique suivant :*

$$\log P(N) \sim \pi \sqrt{\frac{N}{3}} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Ce résultat est ici admis, une démonstration peut être trouvée dans [HR17].

Proposition 1.1. *Pour tout $N \geq 1$, on a $h_N \leq P(N)b_N$.*

Démonstration. Soient $N \geq 1$ et $\omega \in \mathcal{H}_N$. Nous allons transformer ω en un pont par la méthode suivante, aussi décrite dans la figure 2 : soient

$$L = \max \{ \omega_1(j) : j \in [1, N] \} \quad \text{et} \quad i_0 = \max \{ i \in [1, N] : \omega_1(i) = L \}.$$

Considérons ensuite le chemin $\omega^{(1)}$ qui commence comme ω mais tel que, à partir de i_0 , $\omega^{(1)}$ est la réflexion de ω par rapport à l'hyperplan $x_1 = L$. Autrement dit :

$$\omega^{(1)}(i) = \begin{cases} \omega(i) & \text{si } i \leq i_0, \\ (2L - \omega_1(i), \omega_2(i), \dots, \omega_3(i)) & \text{si } i \geq i_0. \end{cases}$$

Le choix de L fait que $\omega^{(1)}$ est encore auto-évitant et est aussi clairement un élément de \mathcal{H}_N . Si on réitère ce procédé, on obtient un entier i_1 et un chemin $\omega^{(2)}$ qui, à partir de i_1 , est la réflexion de $\omega^{(1)}$ par rapport à l'hyperplan $x_1 = \omega^{(1)}(i_1)$. En continuant, on obtient une suite finie strictement croissante d'entiers $(i_k)_{k \in [0, p]}$ et des chemins $(\omega^{(k)})_{k \in [0, p]}$. Remarquons alors que $i_0 \neq 0$, $i_p = N$ (sinon on pourrait réitérer le procédé), que $\omega^{(p)}$ est un pont (précisément car $i_p = N$) et que $\omega_1(i_1) > |\omega_1(i_2) - \omega_1(i_1)| > \dots > |\omega_1(i_p) - \omega_1(i_{p-1})| > 0$ grâce au choix de L à chaque étape.

La donnée du pont final $\omega^{(p)}$ et des $|\omega_1(i_j) - \omega_1(i_{j-1})|$, qui forment une partition de l'étendue de $\omega^{(p)}$ (qui est inférieure à N), caractérisent injectivement ω . Si on note $b_{N,A}$ le nombre de ponts à N pas d'étendue A , alors

$$h_N \leq \sum_{A=1}^N P(A)b_{N,A} \leq P(N) \sum_{A=1}^N b_{N,A} \leq P(N)b_N. \quad \square$$

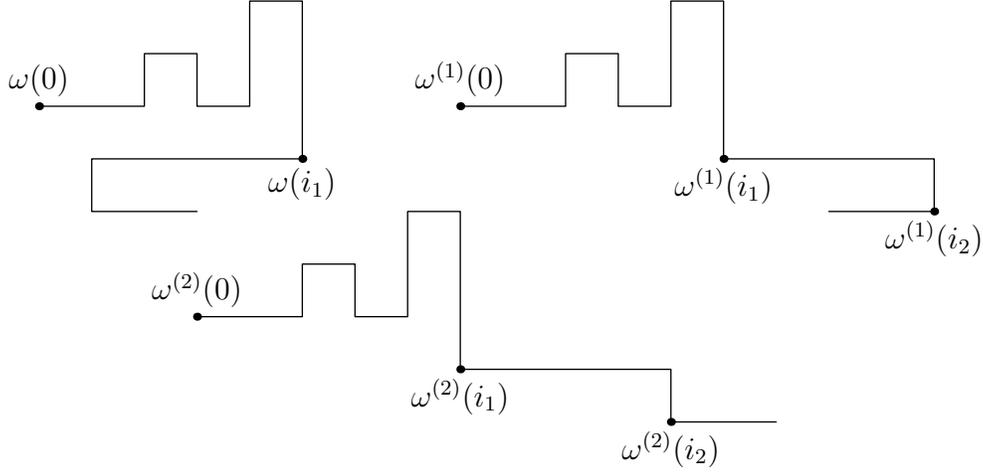


FIG. 2 – Illustration de la preuve de la proposition 1.1

Lemme 1.1. *Pour tout $n \geq 1$, on a $c_n \leq \sum_{m=0}^n h_{n-m}h_{m+1}$.*

Démonstration. soit ω un chemin auto-évitant de longueur $n \geq 1$. Considérons $M = \min_i \omega_1(i)$ et m le plus grand i tel que $\omega_1(i) = M$. Les deux chemins $(\omega(m), \dots, \omega(n))$ et $(\omega(m) - e_1, \omega(m), \omega(m-1), \dots, \omega(0))$ sont clairement dans \mathcal{H}_{n-m} et \mathcal{H}_{m+1} respectivement, et déterminent complètement ω . \square

Preuve du théorème. Soit $B > \pi\sqrt{2/3}$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < B - \pi\sqrt{2/3}$. Prenons un réel K tel que

$$\forall n \geq 1, P(n) \leq K \exp \left[(B - \varepsilon) \sqrt{n/2} \right],$$

qui existe bien par le théorème 1.2.

Ceci, avec le lemme et la proposition précédente, le fait que $\forall i, j, b_i b_j \leq b_{i+j}$ et l'inégalité $\forall x, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2x + 2y}$, donne, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_n &\leq \sum_{m=0}^n h_{n-m} h_{m+1} \\ &\leq \sum_{m=0}^n b_{m+1} b_{n-m} P(m+1) P(n-m) \\ &\leq K^2 b_{n+1} \sum_{m=0}^n \exp \left((B - \varepsilon) \left[\sqrt{\frac{m+1}{2}} + \sqrt{\frac{n-m}{2}} \right] \right) \\ &\leq b_{n+1} (n+1) K^2 \exp[(B - \varepsilon) \sqrt{n+1}]. \end{aligned}$$

Enfin, comme $b_{n+1} \leq \mu^{n+1}$ et en utilisant la marge donnée par le ε , on trouve donc un N_0 tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad c_n \leq \mu^{n+1} \exp B\sqrt{n}.$$

\square

1.2 Une conséquence sur les ponts

Proposition 1.2. *On a :*

$$b_N^{1/N} \rightarrow \mu.$$

Ceci veut dire que la ‘constante de connectivité des ponts’ est en fait égale à μ .

Ce résultat peut être amélioré. En effet, on sait maintenant que le rayon de convergence de la fonction caractéristique des ponts $B_z = \sum_{N=0}^{\infty} b_N z^N$ est $z_c = \mu^{-1}$. En fait, cette série diverge au point critique, c’est-à-dire qu’on a

$$B_{z_c} = \sum_{N=0}^{\infty} b_N \mu^{-N} = +\infty.$$

Démonstration. Le fait que $b_N^{1/N} \rightarrow \mu$ découle du théorème précédent, car, pour N assez grand, on a

$$\mu^{N-1} e^{-B\sqrt{N}} \leq b_N \leq \mu^N.$$

(Voir la dernière ligne des inégalités de la preuve précédente, et $c_N \geq \mu^N$)

Pour montrer la divergence de la série, rappelons-nous la démonstration de la proposition 1.1 grâce à laquelle on peut voir qu’un chemin dans un demi-espace est caractérisé par la donnée d’une suite finie de ponts, dont l’étendue est strictement décroissante. Plus précisément, si on note $b_{m,A}$ le nombre de ponts de longueur m et d’étendue A , on a, pour $N \geq 1$:

$$h_N \leq \sum_k \left(\prod_{i=1}^k b_{m_i, A_i} \right),$$

où la somme se fait sur tous les entiers $k \geq 1$, les suites $(A_i)_{i \in [1, k]}$ strictement positives et strictement décroissantes et les suites $(m_i)_{i \in [1, k]}$ strictement positives dont la somme vaut N . Alors, pour $z > 0$, on a :

$$\sum_{N=0}^{\infty} h_N z^N \leq \prod_{A=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,A} z^m \right).$$

Cela se voit en comparant les termes de même degré de chaque côté. En combinant ceci et l’inégalité classique $1 + x \leq e^x$ pour $x \geq 0$, on obtient :

$$\sum_{N=0}^{\infty} h_N z^N \leq \exp \left(\sum_{A=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,A} z^m \right) = \exp(B_z - 1).$$

Combiner ceci avec le lemme 1.1 permet d’obtenir, par produit de Cauchy :

$$\sum_{N=0}^{\infty} c_N z^N \leq z^{-1} \left(\sum_{N=0}^{\infty} h_N z^N \right)^2 \leq z^{-1} e^{2(B_z - 1)}.$$

On sait que le terme de gauche diverge quand $z = z_c$, donc celui de droite aussi, ce qui conclut la preuve. \square

2 Ponts et renouvellement

Dans cette section, on va essayer de construire un loi de probabilité sur les ponts irréductibles, et ce faisant, faire apparaître un phénomène de renouvellement dans la construction des ponts, vus comme concaténation de ponts irréductibles.

Pour ce faire, on a besoin de définir une fonction particulière, la *masse*.

2.1 La masse

Définition 2.1. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et N entier, on note $c_N(x)$ le nombre de chemins auto-évitant à N pas commençant en 0 et se terminant en x , et $G_z(x)$ la série génératrice de la suite ainsi définie.

Proposition 2.1 (décroissance exponentielle de G_z). Pour tout $z \in (0, z_c)$, il existe des constantes positives D_z et θ_z telles que, pour tout x dans \mathbb{Z}^d

$$G_z(x) \leq D_z e^{-|\log \theta_z| \|x\|_\infty}.$$

Démonstration. On a

$$G_z(x) \leq \sum_{N \geq \|x\|_\infty} c_N z^N.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_ε tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $c_N \leq K_\varepsilon (\mu + \varepsilon)^N$. En sommant, on a

$$G_z(x) \leq \sum_{N \geq \|x\|_\infty} K_\varepsilon ((\mu + \varepsilon)z)^N$$

En choisissant ε tel que $(\mu + \varepsilon)z = \theta_z < 1$, on obtient

$$G_z(x) \leq K_\varepsilon \frac{\theta_z^{\|x\|_\infty}}{1 - \theta_z} \leq D_z e^{-|\log \theta_z| \|x\|_\infty},$$

où on a posé $D_z = K_\varepsilon / (1 - \theta_z)$. □

On est ainsi amené à poser la définition suivante :

Définition 2.2. Pour $z > 0$, on note

$$m(z) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log G_z(n, 0, \dots, 0)}{n}$$

la ‘masse’, que l’on peut voir comme le taux de décroissance exponentielle de G_z .

Remarquons que, comme $G_z(n, 0, \dots, 0) \geq z^n$ (le chemin direct de $(0, \dots, 0)$ à $(n, 0, \dots, 0)$ est un pont, donc $b_n(n, 0, \dots, 0) \geq 1$), on a $m(z) \leq -\log z$.

2.2 Théorie du renouvellement sur les ponts

Ici, nous allons construire une loi de probabilité sur les ponts irréductibles, en faisant apparaître une équation de renouvellement sur les ponts, renouvellement qui a lieu lors d’un ‘changement de pont irréductible’. Cette loi nous permettra, dans le dernier chapitre, de construire aléatoirement des ponts infinis.

Pour commencer l’étude, on va tout d’abord se placer au point critique, c’est-à-dire en z_c . On va voir qu’alors, on peut définir une loi de probabilité sur les ponts irréductibles ω en leur donnant un poids de $z_c^{|\omega|}$.

Ensuite, on se placera en-dessous du point critique pour étudier plus en détails les points de chute des ponts irréductibles. Le ‘poids’ des ponts est alors un peu plus complexe, puisqu’un facteur faisant intervenir la masse et l’étendue apparaît.

2.2.1 Au point critique

Un pont auto-évitant est en fait une succession de ponts irréductibles. Les extrémités de ces ponts irréductibles peuvent donc être vues comme des ‘points de renouvellement’ du pont, en ce sens qu’il ne repasse jamais derrière ce point. La suite consiste à essayer de faire apparaître une équation de renouvellement et à en tirer des conséquences.

On a tout d’abord, l’identité suivante :

$$b_N = \sum_{s=1}^N \lambda_s b_{N-s} + \delta_{N,0},$$

puisque un pont se décompose de manière unique en un pont irréductible, suivi d’un pont. On en déduit que, pour $z \in (0, z_c)$,

$$\begin{aligned} B_z &= \sum_{N \geq 0} b_N z^N \\ &= \sum_{N \geq 0} \left(\sum_{s=1}^N \lambda_s b_{N-s} + \delta_{N,0} \right) z^N \\ &= 1 + \sum_{N \geq 0} \sum_{s=1}^N \lambda_s b_{N-s} z^N \\ &= 1 + \left(\sum_{k \geq 0} b_k z^k \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s z^s \right) \end{aligned}$$

et donc

$$B_z = \frac{1}{1 - \Lambda_z}.$$

Comme alors B_z est fini, on en déduit que $\Lambda_z < 1$. D’après la proposition 1.2, $\lim_{z \rightarrow z_c} B_z = +\infty$, et donc $\Lambda_{z_c} = 1$, c’est à dire, comme $z_c = 1/\mu$,

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_k}{\mu^k} = 1.$$

On a ainsi une loi de probabilité sur les ponts irréductibles, avec la probabilité $\mathbb{P}(\omega) = \mu^{-|\omega|}$. Cette loi sera étudiée plus en détail dans la dernière section.

Intuitivement, on donne un ‘poids’ exponentiel en sa longueur à chaque pont irréductible. Ceci permet de ‘pénaliser’ les ponts irréductibles de grande longueur.

Si l’on pose ainsi $p_k = \lambda_k \mu^{-k}$ et $a_N = b_N \mu^{-N}$, on obtient l’équation :

$$a_N = \sum_{k \geq 0} p_k a_{N-k}.$$

Ceci illustre le lien entre la loi sur les ponts irréductibles et la construction de ponts, donnant une loi qui sera étudiée en dernière section. Cette équation s’interprète comme une équation de renouvellement discret au sens suivant :

Si on se donne une famille de variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{N} , de loi $\mathbb{P}(X_1 = k) = p_k$ (typiquement des longueurs de ponts irréductibles), alors

$$a_N = \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} : X_1 + \dots + X_k = N).$$

Le nombre a_N s’interprète ainsi comme la probabilité qu’un renouvellement ait lieu au temps N , c’est-à-dire que l’on ‘change’ de pont irréductible au N -ième pas avec une probabilité a_N .

On utilise ensuite le

Théorème 2.1 (du renouvellement). Soient $(f_i)_{i \geq 1}$ et $(g_i)_{i \geq 0}$ deux suites positives, telles que l'on ait $0 < g = \sum_{n \geq 0} g_n < \infty$ et $f_1 > 0$. On pose $f = \sum_{n \geq 1} f_n$, et on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} v_0 = g_0 \\ \forall n > 0, v_n = \sum_{i=1}^n f_i v_{n-i} + g_n. \end{cases}$$

Alors :

- (i) si $f < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, et $\sum v_n = g/(1-f)$;
- (ii) si $f = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = g/(\sum k f_k)$, et donc $\sum v_n$ diverge ;
- (iii) si $f > 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n^{1/n} > 1$.

La preuve est détaillée en annexe B.

Ici, on a $f_n = p_n$, et $f = 1$, $g_n = \delta_{n,0}$ et $v_n = b_n \mu^{-n} = a_n$, et donc

$$\frac{b_n}{\mu^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum k p_k}.$$

Ceci permet d'affiner un résultat vu précédemment, à savoir que la 'constante de connectivité des ponts' est μ :

- Si $\sum k p_k$ (i.e. le temps moyen entre deux renouvellements) est fini, alors $b_N \sim C \mu^N$.
- Dans le cas où ce temps est infini, $b_N = o(\mu^N)$.

2.2.2 Points de chute des ponts irréductibles

On s'intéresse maintenant aux 'points de chute' des ponts irréductibles. Pour cela, on se place en-dessous du point critique, en $z \in (0, z_c)$.

Définition 2.3. On note, pour N et L entiers, $b_{N,L}$ le nombre de ponts à N pas commençant en 0 et se terminant dans l'hyperplan $\{x_1 = L\}$, et, pour $y \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $b_{N,L}(y)$ le nombre de ponts à N pas commençant en 0 et se terminant en (L, y) .

Si \mathcal{A} est un ensemble de chemins, on note, pour L entier et $y \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $\mathcal{A}(L)$ et $\mathcal{A}(L, y)$ l'ensemble des chemins dans \mathcal{A} se terminant dans l'hyperplan $\{x_1 = L\}$, respectivement au point (L, y) , et $A_z(L)$ et $A_z(L, y)$ leur fonction caractéristique.

Pour commencer, on a les égalités suivantes :

$$b_{N,L} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^L \lambda_{k,j} b_{N-k,L-j} + \delta_{N,0} \delta_{L,0}$$

et

$$b_{N,L}(y) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^L \sum_{v \in \mathbb{Z}^{d-1}} \lambda_{k,j}(v) b_{N-k,L-j}(y-v) + \delta_{N,0} \delta_{L,0} \delta_{y,0}.$$

De ceci, on déduit l'égalité sur les fonctions caractéristiques :

$$B_z(L) = \sum_{j=0}^L \Lambda_z(j) B_z(L-j) + \delta_{L,0}.$$

Pour le reste de cette section, fixons donc $z \in (0, z_c)$. On définit ensuite :

$$\begin{cases} p_L = p_L(z) = \Lambda_z(L) e^{Lm(z)} = \sum_{\omega \in \mathcal{I}(L)} z^{|\omega|} e^{Lm(z)} \\ a_L = a_L(z) = B_z(L) e^{Lm(z)} = \sum_{\omega \in \mathcal{B}(L)} z^{|\omega|} e^{Lm(z)}, \end{cases}$$

et $P(s)$ et $A(s)$ leurs fonctions génératrices respectives.

On obtient toujours une équation du type renouvellement : $a_N = \sum_{k \geq 0} p_k a_{N-k}$.

On a de plus le lemme suivant, qui nous affirme que l'on a bien une loi de probabilité :

Lemme 2.1. $\sum_{k \geq 0} p_k = 1$.

Démonstration. On a toujours l'égalité $A(s) = 1/(1 - P(s))$. Par définition de $m(z)$, on obtient que le rayon de convergence de $A(s)$ est 1. De plus, on peut montrer par un raisonnement très long et fastidieux que nous ne détaillerons pas ici (le lecteur pourra trouver tous les détails dans [MS93]), que la suite (a_L) est minorée par $\chi(z)^{-2}$, et donc $A(s)$ diverge en 1.

On a donc bien $P(1) = \sum_{k \geq 0} p_k = 1$. □

Intuitivement, on a ici affaire à la même loi qu'au paragraphe précédent, mais on n'est plus au point critique. On doit alors donner un poids en $z^{|\omega|}$ à un pont irréductible, pondéré par l'exponentielle de son étendue, fois la masse. On peut montrer que $m(z)$ tend vers 0 quand $z \rightarrow z_c$, et quand $z = z_c$ on retrouve ainsi la loi précédente. Cependant les raisonnements suivants ne s'appliquent pas au cas $z = z_c$.

L'avantage de s'être placé en-dessous de z_c réside dans le fait que l'on peut utiliser cette loi pour choisir, non plus la longueur des ponts irréductibles, mais leur étendue (et donc les points de rupture du pont construit par concaténation), voire leur point de chute. En effet, rien ne nous dit que $a_L(z)$ converge quand z tend vers z_c .

On obtient aussi, par le théorème 2.1, $\lim_{L \rightarrow \infty} a_L = 1/(\sum_{k \geq 0} k p_k) > 0$, donc $\sum_{k \geq 0} k p_k < \infty$.

D'un point de vue probabiliste, ceci signifie que l'espérance de l'étendue d'un pont irréductible choisi aléatoirement selon cette loi est finie.

En fait, on a beaucoup mieux : les moments de la suite $(p_k)_k$ sont tous finis, ceci découlant du théorème suivant :

Théorème 2.2 (séparation des masses). *On définit la 'masse pour les ponts irréductibles'*

$$m_\Lambda(z) = \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{-\log \Lambda_z(L)}{L}.$$

Alors

$$m_\Lambda(z) > m(z) \text{ pour tout } z < z_c,$$

ce qui est équivalent à

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} p_k^{1/k} < 1.$$

La preuve de ce théorème est renvoyée en annexe A.

L'équivalence des deux assertions s'obtient par un calcul rapide avec les définitions de p_k et m_Λ , qui donne $\limsup_{k \rightarrow \infty} p_k^{1/k} = m/m_\Lambda$.

On remarque aussi que

$$\Lambda_z(L) = \sum_{N \geq 3L} \lambda_{N,L} z^N \leq \sum_{N \geq 3L} \mu^N z^N = \frac{(\mu z)^{3L}}{1 - \mu z}$$

et donc

$$m_\Lambda(z) \geq -3 \log(\mu z).$$

De plus, comme $\lambda_{3L,L} \geq 1$ (voir le chemin $E^L N O^{L-1} N E^{L-1}$),

$$m_\Lambda(z) \leq -3 \log z.$$

Le théorème du renouvellement nous donnait que la probabilité d'avoir un renouvellement en L (a_L) converge. Le théorème suivant nous montre que cette probabilité converge exponentiellement vite.

Théorème 2.3 (convergence exponentielle de $(a_L)_{L \in \mathbb{N}}$). *Pour tout $z \in (0, z_c)$, il existe $\varepsilon(z) > 0$ tel que, si l'on note $C_z = 1 / \sum_{k \geq 0} k p_k$,*

$$|a_L - C_z| \leq e^{-L\varepsilon(z)}.$$

Démonstration. On considère la fonction de variable complexe $s \mapsto P(s)$. On a vu que $P(1) = \sum p_k = 1$. Les coefficients de P étant réels, positifs, on en déduit que pour tout $s \neq 1$ et $|s| < 1$, on a $|P(s)| < 1$. Le théorème de séparation des masses nous dit qu'il existe $R = (\limsup p_k^{1/k})^{-1} > 1$ tel que P soit analytique sur $D(0, R)$. On a donc $r \in (1, R)$ tel que 1 soit le seul zéro de $P - 1$ sur $D(0, r)$. On remarque aussi que $P'(1) = C_z^{-1} \neq 0$.

Le théorème des résidus appliqué à la fonction analytique $s \mapsto \frac{s^{-L-1}}{1-P(s)}$ donne ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{s^{-L-1}}{1-P(s)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{s^{-L-1}}{1-P(s)}, 1\right) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{|s|=r} \frac{s^{-L-1}}{1-P(s)} ds \\ a_L - C_z &= O(r^{-L}). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat avec $r = e^{\varepsilon(z)}$. \square

On a à présent un théorème nous donnant la répartition asymptotique des points de chute sur l'hyperplan de chute d'un pont, quand l'étendue du pont tend vers l'infini.

Théorème 2.4 (Distribution gaussienne du point de chute). *Pour tout $z \in (0, z_c)$, il existe $\delta_z > 0$ tel que*

$$\left| B_z(L, y) e^{Lm(z)} L^{(d-1)/2} - C_z \frac{1}{(\pi\delta_z)^{(d-1)/2}} e^{-\frac{|y|^2}{\delta_z L}} \right| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément en } y.$$

Intuitivement, cela signifie que, asymptotiquement, les points de renouvellement (i.e. les points de chute) de ponts infinis construits avec cette loi suivent, conditionnellement à la première coordonnée, une loi gaussienne.

Démonstration. On considère le problème d'un point de vue probabiliste : On se donne ainsi (X_n, Y_n) des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1}$, de loi donnée par $\mathbb{P}((X_n, Y_n) = (L, y)) = p_{L,y} = \Lambda_z(L, y) e^{Lm(z)}$ (le point d'arrivée d'un pont irréductible tiré d'après la loi de probabilité précédente). On construit ainsi un chemin auto-évitant dans un demi-espace en concaténant les ponts irréductibles obtenus : $S_n = \sum_{i=0}^n (X_i, Y_i)$. On a alors le résultat suivant :

$$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} | S_n = (L, y)) = B_z(L, y) e^{Lm(z)} = a_{L,y}.$$

En effet, supposons L et y non nuls (sinon la formule donne $1 = 1 \dots$). On a alors

$$\begin{aligned} B_z(L, y) e^{Lm(z)} &= \sum_{j=1}^L \sum_{v \in \mathbb{Z}^{d-1}} \Lambda_z(j, v) B_z(L-j, y-v) e^{Lm(z)} \\ &= \sum_{j=1}^L \sum_{v \in \mathbb{Z}^{d-1}} \mathbb{P}((X, Y) = (j, v)) B_z(L-j, y-v) e^{(L-j)m(z)} \\ &= \sum_{k=1}^L \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = L \\ v_1 + \dots + v_k = y}} \prod_{i=1}^k \mathbb{P}((X, Y) = (n_i, v_i)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = L \text{ et } Y_1 + \dots + Y_k = y \text{ pour un } k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Le théorème à démontrer dit juste que cette probabilité se factorise en probabilités gaussiennes de variance proportionnelle à L/\mathbb{P} (l'hyperplan (L, \cdot) est touché). C'est intuitivement vrai, à condition d'avoir Y de variance finie.

Or Y a un moment exponentiel : Si $z \in (0, z_c)$, il existe $s > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{s|Y|}) < \infty$.

En effet, m_Λ est une fonction finie ($-3 \log(\mu z) \leq m_\Lambda \leq -3 \log z$), concave, donc continue car décroissante, en $\log z$ (la concavité provient d'une application de l'inégalité de Hölder, qui dit que si $(a_n) \geq 0$, $\beta \mapsto -\log \sum a_n e^{n\beta}$ est concave, ici $\beta = \log z$ et $a_n = \lambda_{n,L}$, et du fait que la limite inférieure conserve la concavité). En se souvenant de la séparation des masses $m_\Lambda > m$, on a donc $s > 0$ tel que $m_\Lambda(e^s z) > m(z)$ pour $e^s z < z_c$, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{s|Y|}) &= \sum_{L,y} e^{s|y|} \Lambda_z(L,y) e^{Lm(z)} \\ &\leq \sum_{L,N} e^{sN} \lambda_{N,L}(L) z^N e^{Lm(z)} \\ &= \sum_L \Lambda_{ze^s}(L) e^{Lm(z)} < \infty. \end{aligned}$$

Reste à utiliser le

Théorème 2.5 (Stam). *Si :*

- (i) $0 < \mathbb{E}(X_1) = \theta < \infty$;
 - (ii) le $\frac{d-1}{2}$ -ième moment de X_1 est fini ;
 - (iii) $\text{cov}(Y_{1,i}, Y_{1,j}) = 0$ dès que $i \neq j$ et $v = \text{var}(Y_{1,i}) < \infty$;
 - (iv) la distribution de (X_n, Y_n) n'a pas de périodicité ;
- et si l'on note

$$\varphi(L, y) = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\theta}{2\pi v} \right)^{(d-1)/2} e^{-\theta|y|^2/2vL},$$

$$U(L, y) = \mathbb{E} \left(\sum \mathbb{1}_{(X_1+\dots+X_n, Y_1+\dots+Y_n)=(L,y)} \right),$$

alors $|L^{(d-1)/2} U(L, y) - \varphi(L, y)| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$ uniformément en y .

Ce théorème est ici admis, la preuve complète (dans un cadre beaucoup plus général) est détaillée dans [Sta69, Sta71].

Dans notre cas, les hypothèses sont vérifiées :

- (i) $X_1 > 0$ p.s., $\theta = C_z^{-1} < \infty$;
- (ii) X_1 a un moment exponentiel car $\limsup p_k^{1/k} < 1$;
- (iii) $(Y_{1,i}, Y_{1,j})$ suit la même loi que $(Y_{1,i}, -Y_{1,j})$ par symétrie, on a de plus une variance des Y_i indépendante de i . La variance v est fini par le lemme précédent ;
- (iv) Il suffit de remarquer que $\forall(l, y) \mathbb{P}((X_1, Y_1) = (L, y)) > 0$, ce qui est évident.

Comme $U(L, y) = B_z(L, y) e^{Lm(z)}$, avec $\delta_z = \frac{2v}{\theta}$, on a bien

$$\left| L^{(d-1)/2} B_z(L, y) e^{Lm(z)} - (C_z^{-1})^{-1} \left(\frac{1}{\pi \delta_z} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{\delta_z L}} \right| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément en } y. \quad \square$$

3 Théorème des motifs et une application

3.1 Théorème des motifs de Kesten

Définition 3.1. On appelle motif un chemin auto-évitant (que l'on ne verra que comme partie d'un chemin plus grand).

On dit qu'un motif $M = (m(0), \dots, m(n))$ apparaît au j -ième pas du chemin ω s'il existe $v \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\omega(j+k) = m(k) + v$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On note $c_N[k, M]$ le nombre de chemins auto-évitants à N pas où M apparaît au plus k fois.

On dit que M est un motif propre si pour tout entier k il existe un chemin auto-évitant dans lequel M apparaît au moins k fois.

Un motif propre est en fait un motif que l'on peut retrouver souvent dans les chemins auto-évitants, et la propriété suivante en fournit une caractérisation sympathique.

Proposition 3.1. Un M motif est propre si et seulement s'il existe un cube Q et un chemin auto-évitant φ contenu dans Q et dont les extrémités sont des coins de Q , tels qu'il y ait une occurrence de M dans φ .

Le sens indirect est clair, le lecteur trouvera une démonstration du sens direct dans [HW85].

Définition 3.2. Soit $Q = \{x : \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket a_i \leq x_i \leq a_i + b\}$ un cube. On définit alors son 'adhérence' $\overline{Q} = \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket a_i - 2 \leq x_i \leq a_i + b + 2\}$ et sa 'frontière' $\delta Q = \overline{Q} \setminus Q$.

Soient M un motif à n pas et Q un cube tels que M est contenu dans Q , et ses extrémités sont des coins de Q . On dit que (M, Q) apparaît au j -ième pas de ω s'il existe $v \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\omega(j+k) = m(k) + v$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et $\omega(i) \notin Q + v$ pour tout $i < j$ ou $i > j + n$.

On note $c_N[k, (M, Q)]$ le nombre de chemins auto-évitants à N pas où (M, Q) apparaît au plus k fois.

Le prochain résultat, dû à Kesten, est très intéressant : il dit qu'un motif propre donné apparaît souvent dans presque tous les chemins.

Théorème 3.1 (Théorème des motifs de Kesten).

(i) Soit Q un cube et M un motif comme dans la définition précédente. Il existe alors un $a > 0$ tel que :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} (c_N[aN, (M, Q)])^{1/N} < \mu.$$

(ii) Pour tout motif propre M , il existe un $a > 0$ tel que :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} (c_N[aN, M])^{1/N} < \mu.$$

Remarquons que la propriété (i) implique la propriété (ii). En effet, si M est un motif propre, il suffit de voir que $c_N[aN, M] \leq c_N[aN, (\varphi, Q)]$ où φ et Q sont donnés par la proposition précédente.

Définition 3.3. Soient ω un chemin auto-évitant à N pas et r un entier. On définit, pour $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$Q(j) = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x_i - \omega_i(j)| \leq r \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}.$$

On dit que E^* a lieu au j -ième pas de ω si $Q(j)$ est entièrement recouvert par ω . Pour tout $k \geq 1$, on dit que E_k a lieu au j -ième pas de ω si au moins k points de $\overline{Q}(j)$ sont visités par ω et on dit que \tilde{E}_k a lieu au j -ième pas de ω si E_k ou E^* a lieu.

Dans la suite, on utilisera le symbole E pour E^* , E_k , ou \tilde{E}_k . Si m est un entier, on dira que $E(m)$ a lieu au j -ième pas de ω si E a lieu au m -ième pas du chemin $(\omega(j-m), \dots, \omega(j+m))$. On définit $c_N[k, E]$ et $c_N[k, E(m)]$ comme étant respectivement le nombre de chemins auto-évitants à N pas où E a lieu au plus k fois et le nombre de chemins auto-évitants à N pas où $E(m)$ a lieu au plus k fois.

Or, si ρ est assez petit, on a

$$\sum_{j=0}^{\rho M} \binom{M}{j} (1+\varepsilon)^{jm} (1-\varepsilon)^{Mm-jm} \leq (\rho M + 1) \binom{M}{\lfloor \rho M \rfloor} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{\rho M m} (1-\varepsilon)^{Mm}.$$

Quand M tend vers l'infini, la racine M -ième du membre de droite tend, par un calcul long mais facile utilisant la formule de Stirling, vers

$$\frac{1}{\rho^\rho (1-\rho)^{(1-\rho)}} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{\rho m} (1-\varepsilon)^m$$

qui est inférieur à 1 pour $0 < \rho < \rho_0$ avec ρ_0 assez petit. On conclut facilement. \square

On a encore besoin d'un lemme, qui nous dit que presque tous les chemins 'remplissent' au moins un cube.

Lemme 3.2. $\liminf_{N \rightarrow \infty} c_N[0, E^*]^{1/N} < \mu.$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\lim_{N \rightarrow \infty} c_N[0, E^*]^{1/N} = \mu.$

On va montrer qu'il existe alors un k tel que presque tous les chemins visitent k points de $\overline{Q}(j)$, pour beaucoup de j , et jamais plus.

On remarque que $c_N[0, \tilde{E}_k]$ est croissant en k . De plus, si E^* n'a pas lieu, alors $E_{(2r+5)^d}$ non plus, si bien que $c_N[0, E^*] \leq c_N[0, \tilde{E}_{(2r+5)^d}] \leq c_N$, et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (c_N[0, \tilde{E}_{(2r+5)^d}])^{1/N} = \mu.$$

Ensuite, on a $c_N[0, \tilde{E}_{r+3}] = 0$ pour $N \geq r+2$. On en déduit qu'il existe $k \in [r+3, (2r+5)^d - 1]$ tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_N[0, \tilde{E}_k]^{1/N} < \mu$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_N[0, \tilde{E}_{k+1}]^{1/N} = \mu.$$

D'après le lemme précédent, il existe donc $a > 0$ et un entier m tels que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} c_N[aN, \tilde{E}_k(m)]^{1/N} < \mu.$$

On définit l'ensemble \mathcal{T}_N des chemins auto-évitants de longueur N tels que \tilde{E}_{k+1} n'a jamais lieu, et $\tilde{E}_k(m)$ au moins aN fois. On a

$$|\mathcal{T}_N| \geq c_N[0, \tilde{E}_{k+1}] - c_N[aN, \tilde{E}_k(m)]$$

et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathcal{T}_N|^{1/N} = \mu.$$

La suite de la démonstration repose sur le fait suivant :

Étant donné un chemin auto-évitant ω dans \mathcal{T}_N , on considère les $\overline{Q}(j)$ dont exactement k points sont visités par ω . On peut alors remplacer, dans certains de ces cubes, ω par un chemin auto-évitant qui les remplit complètement. Ceci fournit un grand nombre de chemins auto-évitants visitant plus de k points dans assez de cubes pour contredire le résultat précédent. Les cubes choisis doivent en particulier être d'intersection vide.

Nous ne rédigerons pas ici les détails, que le lecteur intéressé trouvera dans [MS93]. \square

Preuve du théorème de Kesten. Soient M et Q comme dans l'énoncé du théorème. Quitte à translater et allonger M , on peut supposer que $Q = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x_i| \leq r \ \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}$. Le raisonnement est en tout point similaire à celui de la démonstration précédente : on suppose par l'absurde que pour tout $a > 0$, $\limsup_{N \rightarrow \infty} (c_N[aN, (M, Q)])^{1/N} = \mu$.

On dit que \bar{E}^* a lieu au j -ième pas de ω si $\bar{Q}(j)$ est complètement recouvert par ω . Les deux lemmes précédents nous disent qu'il existe un $b > 0$ et un entier m tels que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} (c_N[bN, \bar{E}^*(m)])^{1/N} < \mu.$$

Soit $c > 0$, on définit \mathcal{G}_N comme étant l'ensemble des chemins auto-évitant tels que (P, Q) a lieu au plus cN fois et $\bar{E}^*(m)$ au moins bN fois. Comme précédemment, on a que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathcal{G}_N|^{1/N} = \mu.$$

Le même argument que pour le lemme précédent fournit encore une contradiction : quand un cube est complètement rempli, on peut remplacer la portion de ω qui est dedans par un chemin contenant le motif M . \square

3.2 Théorème ratio-limite

Cette partie vise à montrer un résultat énoncé dans la première section : $c_{N+2}/c_N \rightarrow \mu^2$, ainsi qu'un analogue pour les ponts.

Lemme 3.3. *Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs et posons, pour $n \geq 1$, $\varphi_n = a_{n+2}/a_n$. Supposons que :*

- (i) $(a_n^{1/n})_{n \geq 1}$ converge vers un réel strictement positif α ;
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_n > 0$;
- (iii) il existe un réel $D > 0$ tel que, pour n assez grand,

$$\varphi_n \varphi_{n+2} \geq \varphi_n^2 - \frac{D}{n}.$$

Alors la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge et

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha^2.$$

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ définie par $\sigma_n = \varphi_n - \alpha^2$ n'admet pas de valeur d'adhérence non nulle dans \mathbb{R} . Déjà, (ii) et (iii) permettent de voir qu'il existe $B > 0$ tel que, pour n assez grand,

$$\varphi_{n+2} \geq \varphi_n - \frac{B}{n}.$$

Supposons que $(\sigma_{n(j)})_{j \geq 1}$ converge vers $\varepsilon \in [0, \infty]$ où $(n(j))_{j \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers. Posons, pour tout $j \geq 1$,

$$M(j) = \left\lfloor \frac{n(j)\sigma_{n(j)}}{2B} \right\rfloor.$$

Pour j assez grand et $0 \leq k \leq M(j)$, une récurrence évidente permet de voir que

$$\begin{aligned} \varphi_{n(j)+2k} &\geq \varphi_{n(j)} - \frac{kB}{n(j)} \\ &\geq \alpha^2 + \sigma_{n(j)} - \frac{M(j)B}{n(j)} \\ &\geq \alpha^2 + \frac{\sigma_{n(j)}}{2} \end{aligned}$$

On déduit de ceci que

$$\frac{a_{n(j)+2M(j)}}{a_{n(j)}} = \prod_{k=0}^{M(j)-1} \varphi_{n(j)+2k} \geq \left(\alpha^2 + \frac{\sigma_{n(j)}}{2} \right)^{M(j)}.$$

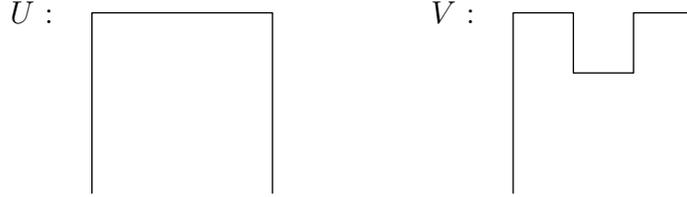
En prenant la racine $M(j)$ -ième et en faisant tendre j vers l'infini, on trouve $\alpha^2 \geq \alpha^2 + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui implique $\varepsilon = 0$.

On procède de la même manière pour montrer que la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ n'a pas de valeur d'adhérence strictement négative. On en déduit donc qu'elle tend vers 0. \square

Proposition 3.2. *Les suites $(c_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ vérifient les hypothèses du lemme précédent.*

Démonstration. La condition (i) a déjà été prouvée dans les deux cas, avec $\alpha = \mu$. La condition (ii) n'est pas très difficile à voir : on sait que $b_{n+2} \geq b_n b_2$ donc $b_{n+2} \geq b_n$. Pour voir que $c_{n+2} \geq c_n$, considérons un chemin auto-évitant ω et M le maximum de la première coordonnée des points de ω . Si l'hyperplan d'équation $x_1 = M$ contient deux points consécutifs de ω , mettons $\omega(i)$ et $\omega(i+1)$, alors on remplace la liaison entre ces deux points par $(\omega(i), \omega(i) + e_1, \omega(i+1) + e_1, \omega(i+1))$. Si ce n'est pas le cas, alors le seul point dans cet hyperplan est le premier ou le dernier point de ω . Dans ce cas, on rajoute e_1 puis $2e_1$ à ce point. Cette construction donne une injection des chemins auto-évitants de longueur n dans ceux de longueur $n+2$.

Nous allons maintenant montrer la propriété (iii), ce qui va nécessiter l'utilisation du théorème des motifs. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ ou c_n , selon la suite pour laquelle nous voulons montrer (iii), et, similairement, soit \mathcal{A}_n l'ensemble des ponts ou des chemins auto-évitants à n pas. Introduisons les motifs U et V , qui sont dans le plan engendré par e_1 et e_2 : ils commencent à l'origine, le motif U prend le chemin $N^3 E^3 S^3$ et V suit $N^3 E S E N E S^3$.



Soit Q le cube défini par :

$$Q = \{x \in \mathbb{Z}^d, \forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket, 0 \leq x_i \leq 3\}.$$

U et V sont contenus dans Q et leurs extrémités sont des coins de Q . Pour i et j deux entiers positifs, posons $\mathcal{A}_n(i, j)$ l'ensemble des éléments de \mathcal{A}_n pour lesquels (U, Q) et (V, Q) ont lieu exactement i et j fois respectivement, et $a_n(i, j)$ son cardinal. Définissons aussi

$$a_n(\geq i, \geq j) = \sum_{k \geq i, l \geq j} a_n(k, l).$$

Donnons-nous un $n \geq 1$, un $i \in \mathbb{N}$ et un $j \in \mathbb{N}$, et considérons l'ensemble des paires (ω, ω') avec $\omega \in \mathcal{A}_n(i, j)$, $\omega' \in \mathcal{A}_{n+2}(i-1, j+1)$ telles que ω' peut être obtenu à partir de ω en remplaçant une occurrence de (U, Q) par (V, Q) . En comptant le nombre de ω' qui conviennent pour un ω et inversement, on voit que

$$\text{nombre de paires} = ia_n(i, j) = (j+1)a_{n+2}(i-1, j+1).$$

Faisons maintenant un peu de calcul ; soit $n \geq 1$, on a

$$a_{n+2}(\geq 0, \geq 1) = \sum_{i \geq 1, j \geq 0} a_{n+2}(i-1, j+1) = \sum_{i \geq 1, j \geq 0} \frac{ia_n(i, j)}{j+1}$$

ainsi que

$$a_{n+4}(\geq 0, \geq 2) = \sum_{i \geq 2, j \geq 0} \frac{i(i-1)a_n(i, j)}{(j+1)(j+2)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que

$$\left(\sum_{i \geq 1, j \geq 0} \frac{i^2 a_n(i, j)}{j+1} \right)^2 \leq \left(\sum_{i \geq 1, j \geq 0} a_n(i, j) \right) \left(\sum_{i \geq 1, j \geq 0} \frac{i^2 a_n(i, j)}{(j+1)^2} \right)$$

et donc que

$$[a_{n+2}(\geq 0, \geq 1)]^2 \leq a_n \sum_{i \geq 1, j \geq 0} \frac{i a_n(i, j)}{(j+1)^2}.$$

Pour $n \geq 1$, posons

$$\Xi_n = \frac{a_{n+4}(\geq 0, \geq 2)}{a_n} - \left(\frac{a_{n+2}(\geq 0, \geq 1)}{a_n} \right)^2$$

ainsi que ($\varphi_n = \frac{a_{n+2}}{a_n}$)

$$\hat{\Xi}_n = \varphi_n \varphi_{n+2} - \varphi_n^2 - \Xi_n.$$

Pour obtenir ce que l'on veut, nous allons montrer que $\hat{\Xi}_n$ tend vers 0 exponentiellement vite, et ensuite minorer par quelque chose de la forme $-D/n$ ou D est strictement positif .

$$\begin{aligned} |\hat{\Xi}_n| &\leq \left| \frac{a_{n+4} - a_{n+4}(\geq 0, \geq 2)}{a_n} \right| + \left| \frac{a_{n+2}^2 - [a_{n+2}(\geq 0, \geq 1)]^2}{a_n^2} \right| \\ &\leq \frac{c_{n+4}[1, (V, Q)]}{a_n} + \frac{2a_{n+2}c_{n+2}[0, (V, Q)]}{a_n^2} \end{aligned}$$

Le théorème des motifs et le fait que $a_n^{1/n} \rightarrow \mu$ nous disent que $\hat{\Xi}_n$ décroît vers 0 exponentiellement vite. Regardons maintenant Ξ_n . Le théorème des motifs nous donne un $\lambda > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_n(\geq 0, \geq \lambda n)}{a_n} \right)^{1/n} < 1.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \Xi_n &\geq \left(\sum_{i \geq 0, j \geq 0} \frac{i(i-1)a_n(i, j)}{(j+1)(j+2)} - \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \frac{i a_n(i, j)}{(j+1)^2} \right) \frac{1}{a_n} \\ &\geq \left(\sum_{i \geq 0, j \geq 0} \frac{-(i^2 + ij + i)a_n(i, j)}{(j+1)^2(j+2)} \right) \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Si i ou j est strictement plus grand que n , le terme correspondant dans la somme est nul. On peut donc minorer $-(i^2 + ij + i)$ par $-3n^2$. On découpe ensuite la somme entre $j < \lambda n$ et $\lambda n \leq j \leq n$ pour obtenir :

$$\Xi_n \geq \frac{-3n^2 a_n(\geq 0, \geq \lambda n)}{(\lambda n)^3 a_n} + (-3n^2) \left(1 - \frac{w_n(\geq 0, \geq \lambda n)}{a_n} \right).$$

Le terme de gauche est équivalent à $-\frac{3}{\lambda^3 n}$ alors que l'autre décroît exponentiellement vers 0. Le résultat est alors prouvé. \square

Théorème 3.2. *On a les limites suivantes :*

$$(a) \frac{c_{n+2}}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu^2,$$

$$(b) \frac{b_{n+1}}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu.$$

Démonstration. Les résultats précédents nous donnent facilement (a) ainsi que le fait que $b_{n+2}/b_n \rightarrow \mu^2$. Montrons donc (b). Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $L_j = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_{n-j}/b_n$. Nous voulons montrer que $L_1 = \mu^{-1}$ et que la limite inférieure est en fait une limite.

Le résultat précédent nous dit que, pour tout j , $L_{j+2} = \mu^{-2}L_j$. On en déduit que $L_j = \mu^{-j}$ si j est pair, et $L_j = \mu^{1-j}L_1$ si j est impair.

Le fait que $b_n = \sum_{s=1}^n \lambda_s b_{n-s} + \delta_{n,0}$ (où λ_s est le nombre de ponts irréductibles à s pas) nous permet d'obtenir pour $j < n$

$$\frac{b_{n-j}}{b_n} = \sum_{s=1}^{n-j} \lambda_s \frac{b_{n-j-s}}{b_n}.$$

Le lemme de Fatou donne alors

$$L_j \geq \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s L_{j+s}.$$

Posons

$$\Sigma_{pair} = \sum_{s \geq 1, s \text{ pair}} \lambda_s \mu^{-s} \text{ et } \Sigma_{impair} = \sum_{s \geq 1, s \text{ impair}} \lambda_s \mu^{-s}$$

On a $\Sigma_{pair} + \Sigma_{impair} = 1$ (voir section 3.2.1). L'inéquation précédente appliquée avec $j = 0$ donne

$$1 \geq L_1 \lambda \Sigma_{impair} + \Sigma_{pair}.$$

On en déduit $L_1 \leq \mu^{-1}$. En appliquant l'inéquation avec $j = 1$, on trouve

$$L_1 \geq \mu^{-1} \Sigma_{impair} + L_1 \Sigma_{pair}$$

et on en déduit $L_1 \geq \mu^{-1}$, on a donc montré que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \mu^{-1}.$$

En réutilisant ceci, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n + 1} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \mu^{-2} L_1^{-1} = \mu^{-1},$$

ce qui conclut la preuve de (b). □

4 Lois de probabilités sur les ponts infinis

Dans cette section, nous allons étudier deux manières de définir une loi de probabilité sur l'ensemble des 'ponts infinis', c'est-à-dire les chemins auto-évitant infinis ω , tels que pour tout $i > 0$, $\omega_1(i) > 0$.

La première est instinctive, définie grâce aux événements cylindriques, et utilise les résultats de la section 4.2, la seconde s'appuie sur le travail de la section 3, en construisant un pont infini comme concaténation de ponts irréductibles.

Il s'avère que ce sont en réalité deux visions de la même loi.

4.1 Une loi naturelle

On va ici montrer que la proportion de ponts de longueur N commençant par un chemin auto-évitant ω donné (parmi les ponts de longueur N) converge quand $N \rightarrow \infty$.

Définition 4.1. On définit $\mathcal{B}_n(\omega)$ l'ensemble des ponts de longueur n prolongeant un chemin auto-évitant dans le demi-espace droit ω donné, puis on définit :

$$P_n^B(\omega) = \frac{|\mathcal{B}_n(\omega)|}{b_n} \quad \text{et}$$

$$P^B(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^B(\omega)$$

(la limite existe effectivement, voir ci-dessous).

Théorème 4.1. Soit ω un chemin auto-évitant dans le demi-espace droit, alors la limite $P^B(\omega)$ existe.

Démonstration. On a d'abord besoin d'un peu de notations.

On pose d'abord $m = |\omega|$. Si β est un pont à n pas qui prolonge ω , on note $M(\beta, \omega)$ le plus petit entier $i \geq m$ tel que $\beta_1(i)$ soit un point de rupture de β .

Pour $k \geq m$, on note $\mathcal{E}_k(\omega)$ l'ensemble des ponts à k pas, tels que $M(\beta, \omega) = k$.

Si β prolonge ω , $M(\beta, \omega)$ est l'unique entier k tel que $(\beta(0), \dots, \beta(k)) \in \mathcal{E}_k(\omega)$ et $(\beta(k), \dots, \beta(n))$ soit un pont.

D'où l'égalité :

$$|\mathcal{B}_n(\omega)| = \sum_{k=m}^n |\mathcal{E}_k(\omega)| b_{n-k}.$$

On va à présent prouver que

$$P_n^B(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq m} |\mathcal{E}_k(\omega)| \mu^{-k}.$$

Si l'on divise l'égalité précédente par b_n , prendre la limite inférieure nous donne (en se souvenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \mu$) :

$$\liminf P_n^B(\omega) \geq \sum_{k \geq m} |\mathcal{E}_k(\omega)| \mu^{-k}$$

par le lemme de Fatou.

Il reste donc à majorer la limite supérieure :

Soient $k \geq m$ et $\beta \in \mathcal{E}_k(\omega)$. Si β est un pont irréductible, on pose $I = 0$. Sinon, on définit I comme le plus grand entier i tel que $\beta_1(i)$ soit un point de rupture de β .

Par définition de $\mathcal{E}_k(\omega)$, $I \leq m$. Alors $(\beta(0), \dots, \beta(I)) = (\omega(0), \dots, \omega(I))$ et $(\beta(I), \dots, \beta(k))$ est un pont irréductible. On obtient ainsi

$$|\mathcal{E}_k(\omega)| \leq \sum_{i=0}^m \lambda_{k-i} \quad \forall k \geq m.$$

À présent, soit $J \geq m$. Pour tout $n > J$, en se souvenant que $b_n = \sum_{s=0}^n \lambda_s b_{n-s}$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_n(\omega)| - \sum_{k=m}^J |\mathcal{E}_k(\omega)| b_{n-k} &\leq \sum_{k=J+1}^n \left(\sum_{i=0}^m \lambda_{k-i} \right) b_{n-k} \\ &\leq \sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=J+1-m+i}^n \lambda_{k-i} b_{n-k} \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^m \left(b_{n-i} - \sum_{r=0}^{J-m} \lambda_r b_{n-i-r} \right). \end{aligned}$$

On divise par b_n , et on obtient

$$\limsup P_n^B(\omega) - \sum_{k=m}^J |\mathcal{E}_k(\omega)| \mu^{-k} \leq \sum_{i=0}^m \left(\mu^{-i} - \sum_{r=0}^{J-m} \lambda_r \mu^{-i-r} \right).$$

Le terme de droite tend vers 0 quand $J \rightarrow \infty$, ce qui prouve le résultat. \square

La ‘loi’ P^B est compatible au sens suivant : si $|\omega| \leq n$, alors

$$P^B(\omega) = \sum_{\substack{\rho > \omega \\ |\rho| = n}} P^B(\rho).$$

Le théorème d’extension de Kolmogorov nous dit alors que l’on peut définir une loi de probabilité P_∞^B sur les ponts infinis, donnée par ses valeurs sur les événements cylindriques $\{\zeta[0, m] = \omega\}$:

$$P_\infty^B(\{\zeta[0, m] = \omega\}) = P^B(\omega).$$

4.2 La loi ‘suite de ponts irréductibles’

On va maintenant s’intéresser à une autre façon de construire des chemins infinis auto-évitants dans un demi-plan, à partir de concaténation de ponts irréductibles, sur lesquels on a déjà une loi de probabilité vue dans la section 3.2.1.

Définition 4.2. *On se donne une famille dénombrable de ponts irréductibles aléatoires indépendants $(\eta^{[i]})_{i>0}$, tirés selon la loi vue dans la section 3.2. On note $X_i = |\eta^{[i]}|$. On a ainsi $\mathbb{P}(X_i = k) = \lambda_k \mu^{-k}$. On obtient ainsi un chemin infini auto-évitant aléatoire $\rho = \eta^{[1]} \circ \eta^{[2]} \circ \dots$, dont on notera la loi Q^B .*

Théorème 4.2. *Les deux lois de probabilité sur les chemins infinis auto-évitants dans un demi-plan sont identiques, i.e., pour tout $m \geq 1$, pour tout ω chemin auto-évitant dans le demi-espace droit à n pas,*

$$Q^B\{\rho[0, m] = \omega\} = P_\infty^B\{\zeta[0, m] = \omega\}.$$

Démonstration. Pour $k \geq 1$, on pose A_k l’événement ‘ $\rho_1(k)$ est un point de rupture pour ρ ’, c’est-à-dire

$$\begin{aligned} A_k &= \{\forall r \leq k \rho_1(r) \leq \rho_1(k) \text{ et } \forall r > k \rho_1(r) > \rho_1(k)\} \\ &= \{\exists i \geq 1 X_1 + \dots + X_i = k\}. \end{aligned}$$

Alors pour tout pont à k pas β , $Q^B(\{\rho[0, k] = \beta\} \cap A_k) = \mu^{-k}$.

En effet, soit β un pont à k pas. On peut écrire de manière unique $\beta = \varphi^{[1]} \circ \dots \circ \varphi^{[j]}$, où les $\varphi^{[i]}$ sont des ponts irréductibles. Alors

$$\begin{aligned} Q^B(\{\rho[0, k] = \beta\} \cap A_k) &= Q^B(\{\eta^{[1]} = \varphi^{[1]}, \dots, \eta^{[j]} = \varphi^{[j]}\}) \\ &= \mu^{-|\varphi^{[1]}|} \dots \mu^{-|\varphi^{[j]}|} \\ &= \mu^{-(|\varphi^{[1]}| + \dots + |\varphi^{[j]}|)} = \mu^{-|\beta|} = \mu^{-k}. \end{aligned}$$

À présent, fixons $m \geq 1$, ω un chemin auto-évitant dans le demi-espace droit à m pas. On pose $T = \min\{i \mid X_1 + \dots + X_i \geq m\}$. On a ensemble les deux événements $\{\rho[0, k] \in \mathcal{E}_k(\omega)\}$ et A_k si et seulement si on a les deux événements $\{\rho[0, m] = \omega\}$ et $\{X_1 + \dots + X_T = k\}$. D'où

$$\begin{aligned} Q^B(\{\rho[0, m] = \omega\}) &= \sum_{k \geq m} Q^B(\{\rho[0, m] = \omega\} \cap \{X_1 + \dots + X_T = k\}) \\ &= \sum_{k \geq m} Q^B(\{\rho[0, k] \in \mathcal{E}_k(\omega)\} \cap A_k) \\ &= \sum_{k \geq m} |\mathcal{E}_k(\omega)| \mu^{-k} \\ &= P_\infty^B(\zeta[0, m] = \omega), \end{aligned}$$

ce que l'on voulait. □

4.3 Conclusion : vers une courbe continue...

Nous avons ainsi créé une courbe aléatoire auto-évitante discrète de longueur infinie. Les deux constructions précédentes montrent que cette mesure sur les chemins infinis combine en quelque sorte deux propriétés :

- Elle est d'une certaine façon une loi uniforme sur les chemins auto-évitants de longueur infinie.
- On peut la découvrir au fur et à mesure comme un processus $(\gamma_n)_{n \geq 0}$, et donc la voir comme un 'processus de croissance'.

On peut alors s'interroger sur l'existence d'un analogue continu. En se souvenant que les marches aléatoires simples convergent vers le mouvement brownien lorsque l'on fait tendre la maille δ du réseau vers 0, on peut se demander s'il n'y a pas de résultat similaire pour les chemins auto-évitants. Cette analogie suggère la conjecture suivante, lorsque γ est la marche infinie aléatoire dans le demi-espace que nous venons de construire :

Conjecture : *La loi de la courbe $\delta\gamma$ converge (en un sens à préciser) lorsque la maille du réseau δ tend vers 0 vers la loi d'une courbe continue auto-évitante.*

En dimension 2, on connaît en fait un candidat naturel pour cette courbe auto-évitante aléatoire limite. Il est en effet conjecturé que, tout comme le mouvement brownien, cet objet limite est en un certain sens invariant par 'transformations conformes' ce qui permet de caractériser ce candidat naturel. Ceci fait intervenir des processus de croissance dits SLE (Evolution de Schramm-Loewner) obtenus par itérations de transformations conformes aléatoires, mais ceci dépasse le cadre de ce mémoire. Une propriété remarquable de cette loi limite conjecturée, est que les courbes obtenues sont presque sûrement de dimension fractale $4/3$.

ANNEXES

A Séparation des masses

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème A.1. $m_\Lambda(z) > m(z)$ pour tout $z < z_c$.

Pour cela, on va s'intéresser aux *retours* d'un pont.

A.1 Les retours

Définition A.1. Si ω est un pont à N pas, un retour de ω est un sous-chemin $\omega[s, t]$ ($0 \leq s < t \leq N$) tel que :

- (i) $\forall i \in \llbracket s+1, t-1 \rrbracket \omega_1(t) \leq \omega_1(i) < \omega_1(s)$,
 - (ii) $\forall i \in \llbracket 0, s-1 \rrbracket \omega_1(i) \leq \omega_1(s)$,
 - (iii) $\forall i \in \llbracket t+1, N \rrbracket \omega_1(t) < \omega_1(i)$.
- Son étendue est $\omega_1(s) - \omega_1(t)$.

Lemme A.1. Soit ω un pont à N pas. Si $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, il existe au plus un retour $\omega[s, t]$ contenant $\omega(k)$.

Démonstration. Soit $\omega[s, t]$ un tel retour. On va montrer que s et t sont uniquement déterminés.

Les points (i) et (ii) impliquent que, si $M = \max_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \omega_1(j)$, $s = \max\{i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \omega_1(i) = M\}$.

Les points (i) et (iii) impliquent que, si $m = \min_{j \in \llbracket k+1, N \rrbracket} \omega_1(j)$, $t = \max\{i \in \llbracket k+1, N \rrbracket, \omega_1(i) = m\}$. \square

Corollaire A.1. Deux retours d'un même pont sont égaux ou disjoints.

Définition A.2. Soit ω un pont à N pas. On dit qu'un retour $\omega[s, t]$ couvre l'entier j si $\omega_1(0) \leq j < \omega_1(N)$.

Lemme A.2. Pour tout τ ($\omega_1(0) \leq \tau < \omega_1(N$)), τ est soit un point de rupture, soit est couvert par un retour.

Démonstration. Soit τ comme précédemment, qui n'est pas un point de rupture. On pose alors $T = \{j \in \llbracket 0, N \rrbracket : \omega_1(j) = \tau\}$, $\tau_m = \min(T) < \tau_M = \max(T)$ (car $|T| \geq 3$). Soit $M = \max\{\omega_1(i) : i \in \llbracket \tau_m, \tau_M \rrbracket\} \geq \tau$.

Si $M > \tau$, on pose :

$$\begin{cases} s = \max\{i \in \llbracket \tau_m, \tau_M \rrbracket : \omega_1(i) = M\}, \\ m = \min\{\omega_1(i) : i \in \llbracket s, \tau_M \rrbracket\}, \\ t = \max\{i \in \llbracket s, \tau_M \rrbracket : \omega_1(i) = m\}. \end{cases}$$

Alors $\omega[s, t]$ est un retour couvrant τ .

Si $M = \tau$, on pose :

$$\begin{cases} m = \min\{\omega_1(i) : i \in \llbracket \tau_m, \tau_M \rrbracket\}, \\ t = \max\{i \in \llbracket \tau_m, \tau_M \rrbracket : \omega_1(i) = m\}, \\ M' = \max\{\omega_1(i) : i \in \llbracket \tau_m, t \rrbracket\}, \\ s = \max\{i \in \llbracket s, \tau_M \rrbracket : \omega_1(i) = M'\}. \end{cases}$$

Alors $\omega[s, t]$ est un retour couvrant τ . \square

A.2 Preuve du théorème de séparation des masses

Dans tout ce qui suit, on fixe $z \in (0, z_c)$ (on oubliera ainsi les indices z dans les fonctions génératrices, par exemple), et on utilise la notation suivante : si S est un ensemble de chemins auto-évitants, on note $FG(S) = \sum_{\omega \in S} z^{|\omega|}$ sa fonction génératrice.

On va commencer par montrer que les points de rupture sont ‘communs’, au sens où un long intervalle sur l’axe des abscisses a peu de chances de ne pas comporter de points de rupture.

Définition A.3. Soient $c \geq 0$, $T \geq 1$, $L \geq c + T$. On définit $B^*(L; c, T)$ la fonction génératrice des ponts d’étendue L , commençant en 0, qui n’ont pas de points de rupture dans $\llbracket c + 1, c + T - 1 \rrbracket$.

Lemme A.3. Il existe une fonction décroissante $\varepsilon(T)$, qui tend vers 0 quand $T \rightarrow \infty$, vérifiant pour tous $L \geq 0$, $T \in \llbracket 0, L \rrbracket$, $c \in \llbracket 0, L + T \rrbracket$:

$$B^*(L; c, T) \leq e^{-mL} \varepsilon(T).$$

Démonstration. En considérant le dernier point de rupture avant c et le premier après $c + T$, on voit que

$$B^*(L; c, T) = \sum_{i=0}^c \sum_{j=c+T}^L B(i) \Lambda(j-i) B(L-j)$$

et donc

$$\begin{aligned} B^*(L; c, T) e^{mL} &= \sum_{i=0}^c \sum_{j=c+T}^L a_i p_{j-i} a_{L-j} \\ &\leq \sum_{i=T}^L i p_i, \end{aligned}$$

où l’on a réutilisé les notations de la section 3.2 et l’on s’est souvenu que $a_n \leq 1$.

Si l’on pose $\varepsilon(T) = \sum_{i \geq T} i p_i$, on a ce que l’on voulait. \square

À présent, on cherche à majorer la fonction génératrice des ponts irréductibles Λ . Pour cela, on fixe un entier Q , et pour $L \gg Q$, on divise $\llbracket 0; L \rrbracket$ en blocs de taille Q . On regarde ensuite les retours qui couvrent les extrémités des blocs. On va ainsi montrer que les ponts irréductibles ont soit une majorité de petits retours, ce qui permet d’avoir des ponts irréductibles au ‘centre’ de chaque bloc, et d’utiliser le lemme précédent pour majorer, soit une grande quantité de grands retours, que l’on majore via $B(k) \leq e^{-mk}$.

Soient T et δ des entiers positifs, et on pose $Q = 2\delta + T$: δ sera l’étendue maximale d’un ‘petit’ retour, et T la longueur des ‘sous-ponts irréductibles’ dans les blocs. Pour L grand, on pose $k = \lfloor L/Q - 1 \rfloor$, et on divise $\llbracket 0; L \rrbracket$ en $k + 1$ sous-intervalles. On pose $A = \{Q; 2Q; \dots; kQ\}$ les extrémités des blocs (autres que 0 et L). On prend un sous-ensemble $S = \{n_1; \dots; n_\tau\}$ de A , non vide, avec $n_1 < \dots < n_\tau$. On pose $n_0 = 0$ et $n_{\tau+1} = L$.

Rappelons que $\mathcal{I}(L)$ désigne l’ensemble des ponts irréductibles d’étendue L .

On définit aussi :

$\mathcal{I}_L(\leq \delta, S)$ l’ensemble des ponts irréductibles d’étendue L , tels qu’aucun points de S ne soit couvert par un retour d’étendue supérieure à δ ,

$\mathcal{J}_L(S; \sigma_1, \dots, \sigma_\tau)$ l’ensemble des ponts irréductibles d’étendue L tels que pour tout i entre 1 et τ , il y ait un retour d’étendue σ_i , couvrant n_i et aucun autre n_j , $j \neq i$.

On a à présent trois lemmes : le premier affirme que tout pont irréductible comporte soit beaucoup de petits retours, soit un nombre conséquent de grands retours. Les suivants majorent les fonctions génératrices de ces deux types de ponts.

En coupant ω aux points $q_1, r_1, \dots, q_\tau, r_\tau$, on a $2\tau + 1$ sous-chemins, et

$$\begin{aligned}
FG(\mathcal{I}_L(\leq \delta, S)) &\leq \chi^\tau \prod_{i=1}^{\tau+1} B^*(n_i - n_{i-1}; \delta, n_i - n_{i-1} - 2\delta) \\
&\leq \chi^\tau \prod_{i=1}^{\tau+1} e^{-m(n_i - n_{i-1})\varepsilon} \varepsilon(n_i - n_{i-1} - 2\delta) \\
&\leq \chi^{\tau+1} \prod_{i=1}^{\tau+1} e^{-m(n_i - n_{i-1})\varepsilon} \varepsilon(T) \quad (\text{car } \varepsilon \text{ décroît}) \\
&\leq e^{-mL} (\chi\varepsilon(T))^{\tau+1}.
\end{aligned}$$

□

Lemme A.6. $FG(\mathcal{J}_L(S; \sigma_1, \dots, \sigma_\tau)) \leq e^{-mL} \chi^{2\tau} e^{-m(\sigma_1 + \dots + \sigma_\tau)}$.

Démonstration. Pour tout i entre 1 et τ , on a un retour $\omega[s_i, t_i]$ d'étendue σ_i tel que :

$$n_{i-1} < \omega_1(t_i) \leq n_i < \omega_1(s_i) \leq n_{i+1}.$$

Ceci implique que $t_i < s_{i+1}$ par la disjonction des retours.

On pose $l_0 = 0$ et :

$$\begin{aligned}
f_i &= \min\{r > l_{i-1}, \omega_1(r+1) = n_i + 1\}, \\
l_i &= \max\{r, \omega_1(r) = n_i\}.
\end{aligned}$$

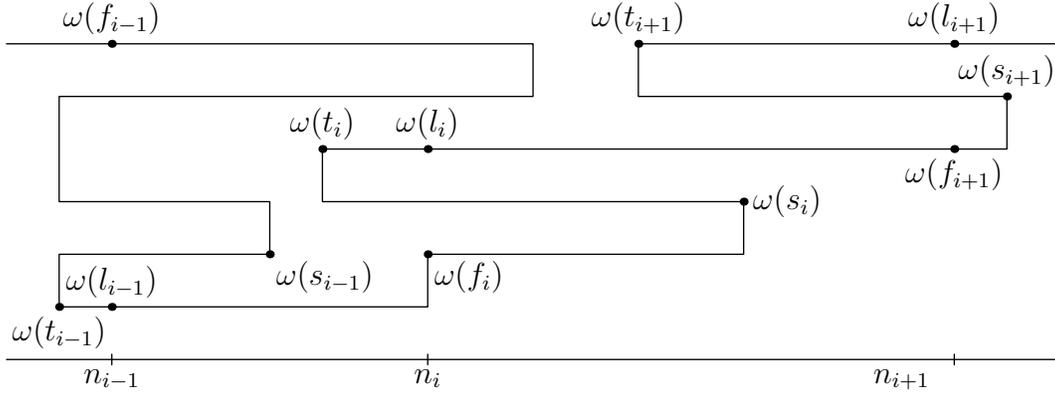


FIG. 5 – Illustration de la preuve du lemme A.6

Alors, on a $l_{i-1} < f_i < s_i < t_i \leq l_i$, et $\omega[l_{i-1}, f_i]$ est un pont d'étendue $n_i - n_{i-1}$. Si l'on découpe ω en chaque f_i, s_i, t_i et l_i , on obtient (on rappelle que $B(L)$ est la fonction génératrice des ponts d'étendue L , elle est de plus inférieure à e^{-mL}) :

$$\begin{aligned}
FG(\mathcal{J}_L(S; \sigma_1, \dots, \sigma_\tau)) &\leq \left(\prod_{i=1}^{\tau+1} B(n_i - n_{i-1}) \right) \left(\prod_{i=1}^{\tau} \chi B(\sigma_i) \chi \right) \\
&\leq e^{-mL} \chi^{2\tau} e^{-m(\sigma_1 + \dots + \sigma_\tau)}.
\end{aligned}$$

□

On peut à présent démontrer le théorème selon lequel $m_\Lambda > m$.

Démonstration. On fixe T et δ tels que :

$$2(\chi\varepsilon(T))^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2},$$

$$\left(1 + \frac{\chi^2}{1 - e^{-m/2}}\right) e^{-m\delta/4} < \frac{1}{2},$$

et on pose $Q = T + 2\delta$, et $k = \lfloor L/Q - 1 \rfloor$.

On obtient donc :

$$\Lambda_z(L) = FG(\mathcal{I}_L) \leq 2^k e^{-mL} (\chi\varepsilon(T))^{1+k/2} + e^{-mL} \sum_{\tau=1}^k \binom{k}{\tau} \chi^{2\tau} \sum_{\substack{\sigma_1 > \delta; \dots; \sigma_\tau > \delta \\ \sigma_1 + \dots + \sigma_\tau > k\delta/2}} e^{-m(\sigma_1 + \dots + \sigma_\tau)}.$$

Pour tout D et $r < m$,

$$\sum_{\substack{\sigma_1 > \delta; \dots; \sigma_\tau > \delta \\ \sigma_1 + \dots + \sigma_\tau > D}} e^{-m(\sigma_1 + \dots + \sigma_\tau)} \leq \sum_{\sigma_1 > \delta; \dots; \sigma_\tau > \delta} e^{-m(\sigma_1 + \dots + \sigma_\tau)} e^{r(\sigma_1 + \dots + \sigma_\tau - D)}$$

$$\leq \left(\frac{e^{(r-m)\delta}}{1 - e^{(r-m)\delta}} \right)^\tau e^{-rD}.$$

Si l'on pose $r = m/2$ et $D = k\delta/2$, on a finalement :

$$\begin{aligned} \Lambda_z(L) &= FG(\mathcal{I}_L) \\ &\leq e^{-mL} \left(\left[2(\chi\varepsilon(T))^{1/2} \right]^k + \left[1 + \frac{\chi^2 e^{-m\delta/2}}{1 - e^{-m/2}} \right]^k e^{-m\delta k/4} \right) \\ &\leq e^{-mL} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^k + \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) \\ &\leq 2e^{-mL} 2^{2-L/Q}, \end{aligned}$$

et donc :

$$m_\Lambda = \liminf \frac{-\log \Lambda_z(L)}{L} \geq m + \frac{\log 2}{Q} > m. \quad \square$$

B Démonstration du théorème du renouvellement

On montre ici le théorème du renouvellement :

Théorème B.1 (du renouvellement). *Soient $(f_i)_{i \geq 1}$ et $(g_i)_{i \geq 0}$ deux suites positives, telles que l'on ait $0 < g = \sum_{n \geq 0} g_n < \infty$ et $f_1 > 0$. On pose $f = \sum_{n \geq 1} f_n$, et on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :*

$$\begin{cases} v_0 = g_0 \\ \forall n > 0, v_n = \sum_{i=1}^n f_i v_{n-i} + g_n. \end{cases}$$

Alors :

- (i) si $f < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, et $\sum v_n = g/(1-f)$;
- (ii) si $f = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = g/(\sum k f_k)$, et donc $\sum v_n$ diverge;
- (iii) si $f > 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n^{1/n} > 1$.

Démonstration. On aura d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme B.1. Si $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ et $(\beta_{n,k})_{m,k \geq 0}$ deux suites positives, telles que $\sum \alpha_n < \infty$ et qu'il existe B tel que pour tous m, k , $\beta_{m,k} < B$, alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0} \alpha_n \beta_{n,k} \leq \sum_{n \geq 0} \alpha_n \limsup_{k \rightarrow \infty} \beta_{n,k}.$$

Ce résultat provient du lemme de Fatou, en remarquant que $B - \beta_{n,k} \geq 0$. □

Ce lemme établi, on pose :

$$F(s) = \sum_{n \geq 0} f_n s^n, \quad G(s) = \sum_{n \geq 0} g_n s^n, \quad V(s) = \sum_{n \geq 0} v_n s^n,$$

avec la convention évidente $f_0 = 0$. La définition de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ nous dit que (on peut effectivement permuter les sommes puisque les termes sont tous positifs)

$$V(s) = G(s) + F(s)V(s).$$

Voyons d'abord le point (iii).

Supposons donc $f > 1$ et $\limsup v_n^{1/n} \leq 1$. On a alors $V(s) < \infty$ dès que $|s| < 1$.

Or $V(s) \geq F(s)V(s)$ et donc $F(s) \leq 1$ pour $|s| < 1$. Par convergence monotone, on en déduit que $f = F(1) \leq 1$ ce qui est absurde.

Voyons maintenant les points restants.

Si $f \leq 1$, on a pour tout $n \geq 0$, $0 \leq v_n \leq \sum g_i$ par une récurrence immédiate, et donc $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite positive bornée. Ainsi, pour $|s| < 1$,

$$V(s) = \frac{G(s)}{1 - F(s)}.$$

En faisant tendre s vers 1, on obtient que, si $f < 1$, $V(1) = g/(1 - f) < \infty$, ce qui est (i).

Reste à présent à voir le point (ii).

Supposons donc $f = 1$. En sommant les relations définissant v_n , on obtient

$$\sum_{n=0}^N v_n = \sum_{n=0}^N g_n + \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^n f_i v_{N-i}.$$

Si l'on pose à présent

$$r_n = 1 - \sum_{i=0}^n f_i = \sum_{i \geq n+1} f_i,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^N r_n v_{N-n} = \sum_{n=0}^N g_n.$$

On pose ensuite

$$r = \sum_{n \geq 0} r_n = \sum_{k \geq 0} k f_k.$$

Formellement, on obtient le résultat $\lim_{N \rightarrow \infty} v_N = g/r$ en faisant tendre N vers l'infini dans la formule précédente. La suite consiste à justifier le passage à la limite.

Posons $u = \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n$, qui est fini puisque v_n est bornée. On prend $(v_{\varphi(n)})$ une sous-suite qui converge vers u . On va montrer que pour tout entier k , $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{\varphi(n)-k} = u$.

En effet, le lemme donne l'inégalité $\limsup_k \sum_n f_n v_{\varphi(n)-k} \leq \sum_n f_n \limsup_k v_{\varphi(n)-k} = \sum f_n u$ (appliqué à $\alpha_n = f_n$ et $\beta_{n,k} = v_{\varphi(n)-k}$). Si l'on pose $u_* = \liminf v_{\varphi(n)-1}$, cette inégalité, utilisée dans la formule

$$v_{\varphi(n)} - f_1 v_{\varphi(n)-1} = g_{\varphi(n)} + \sum_{i=2}^{\varphi(n)} f_i v_{\varphi(n)-i}$$

donne, en passant à la limsup,

$$u - f_1 u_* \leq 0 + \sum_{i \geq 2} f_i u.$$

Puisque $f_1 > 0$ et $f = 1$, on obtient $u \leq u_*$, et donc $u = u_*$. Le résultat est donc vrai pour $k = 1$, et donc pour tout k par une récurrence immédiate.

Si on remplace N par $\varphi(n)$ dans $\sum_{n=0}^N r_n v_{N-n} = \sum_{n=0}^N g_n$, le lemme de Fatou donne que

$$\sum_{n \geq 0} r_n u \leq g.$$

Si $r = \infty$, on a bien le résultat : $u = 0$.

Si $r < \infty$, on note $u' = \liminf v_n$, et on se donne $(v_{\psi(n)})$ qui tend vers u' . Si on remplace N par $\psi(n)$ dans la même équation que précédemment, et que l'on applique le lemme, en se souvenant que $u \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} v_{\psi(n)-k}$, on obtient

$$r_0 u' + \sum_{n \geq 1} r_n u \geq g,$$

ce qui donne que $u' \geq u$ et donc $u' = u$.

Ainsi, v_n tend bien vers u et le théorème de convergence dominée appliqué à $\sum_{n=0}^N r_n v_{N-n} = \sum_{n=0}^N g_n$ donne bien $ru = g$. □

Références

- [HR17] G.H. Hardy and S. Ramanujan. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 16 :112–132, 1917.
- [HW85] J.M. Hammersley and S.G. Whittington. Self-avoiding walks in wedges. *J. Phys. A : Math. Gen. (2)*, 18 :101–111, 1985.
- [MS93] N. Madras and G. Slades. *The self-avoiding walk*. Birkhäuser, 1993.
- [Sta69] A. J. Stam. Renewal theory in r dimensions. *Compositio Mathematica*, 21 :383–399, 1969.
- [Sta71] A. J. Stam. Renewal theory in r dimensions II. *Compositio Mathematica*, 23 :1–13, 1971.