Équirépartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques

François Maillot

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Introduction

L'objet de ce travail est l'étude de la répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques. On prouve deux résultats d'équirépartition, en suivant une méthode de Soundararajan.

1.2 Conventions d'écriture

Sauf mention du contraire :
- p désigne un nombre premier
- s est une variable complexe, $s = \sigma + \imath\tau$
- ρ désigne un zéro d'une fonction L, $\rho = \beta + \imath\gamma$
- χ est un caractère primitif modulo q
- χ_0 est le caractère principal modulo q
- $\mathfrak{q}$ désigne la quantité $q(\tau + 2)$

On utilise les notations de Landau et Vinogradov pour la comparaison de fonctions : pour $x \in D$, f à valeurs complexes et g à valeurs réelles positives ou nulles, $f(x) = O(g(x))$ signifie qu'il existe une constante C telle que $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ pour tout x dans D. On notera de manière équivalente $f(x) \ll g(x)$. Si la constante en question dépend d'un paramètre A, on le fera apparaître en indice : $f(x) \ll_A g(x)$. On notera aussi $f \asymp g$ quand on a simultanément $f \ll g$ et $g \ll f$.

2 Répartition des zéros des fonctions L

L'étude de la répartition des entiers friables fait intervenir naturellement des facteurs initiaux de produits eulériens de fonctions L. La littérature concernant ces fonctions est assez abondante, en particulier on dispose de résultats de localisation de leurs zéros. On aura besoin en particulier d'une borne fine sur le nombre de caractères dont la fonction L associée s'annule en des points d'abscisse «proche de 1» : c'est la «log-free zero density estimate». Ce chapitre est consacré à la démonstration de ce résultat, en suivant dans les grandes lignes la démarche d'Iwaniec et Kowalski.

2.1 Caractères, fonctions L, majorations classiques

On définit dans cette section les caractères de Dirichlet, les fonctions L qui leur sont associées, et on énonce quelques majorations classiques sur les fonctions L, nécessaires pour déterminer des régions sans zéros. Dans les deux premières sous-sections, les résultats sont donnés sans démonstration.

2.1.1 Caractères de Dirichlet

Les caractères des groupes multiplicatifs, introduits par Dirichlet pour démontrer le théorème de la progression arithmétique (qui est un résultat d'équirépartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques), permettent de détecter analytiquement si un entier est, ou non, dans une progression arithmétique donnée.

Définition 2.1. *Soit q un entier naturel non nul. Un caractère de Dirichlet modulo q est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$.*

On notera habituellement χ un caractère, χ_0 le caractère trivial, ou *principal* (qui à tout élément de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ associe 1), l'entier q étant en général fixé auparavant. Un caractère peut être prolongé en une fonction arithmétique q-périodique de la manière suivante, en notant $\bar{n}$ la classe de n dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$

– si n est premier à q, alors $\chi(n) = \chi(\bar{n})$
– sinon, $\chi(n) = 0$

On notera χ indifféremment le caractère ou son prolongement à $\mathbb{N}$. Les caractères possèdent une structure de groupe pour la multiplication

– $\chi_1.\chi_2(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$
– $\chi^{-1}(n) = \overline{\chi(n)}$

Le cardinal de ce groupe est $\varphi(q)$[1].

Les deux formules d'orthogonalité des caractères sont leur raison d'être

Théorème 2.1 (Formules d'orthogonalité des caractères)**.**
Soit χ un caractère modulo q. On a

$$\sum_a \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la sommation porte sur les éléments de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.
Soit $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. On a

$$\sum_\chi \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la sommation porte sur les caractères de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

La notion de caractère primitif est importante : ainsi l'équation fonctionnelle ne sera-t-elle valable que pour les fonctions L associées à de tels caractères.

[1] Ce résultat est un cas particulier de la dualité de Pontryagin

Définition 2.2. *Soit q un entier, $q_1|q$. On dit qu'un caractère χ_1 modulo q_1 induit un caractère χ modulo q si $\chi = \chi_1\pi$ où π est la projection canonique de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ sur $(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z})^\times$.*

Définition 2.3. *Un caractère modulo q est dit primitif s'il n'est induit par aucun caractère modulo q_1 pour $q_1 < q$.*

2.1.2 Fonctions L de Dirichlet

On définit ici les fonctions L de Dirichlet, puis on rappelle leurs principales propriétés.

Définition 2.4. *Soit χ un caractère de Dirichlet, la fonction L qui y est associée est définie par la série de Dirichlet*

$$L(s,\chi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Proposition 2.2 (Convergence des fonctions L)**.**

- *Soit χ un caractère non principal modulo q. La série $L(s,\chi)$ est convergente sur le demi-plan ouvert $\Re(s) > 0$, absolument convergente sur tout compact du demi-plan ouvert $\Re(s) > 1$.*
- *La série $L(s,\chi_0)$ associée au caractère principal modulo q est absolument convergente sur tout compact du demi-plan ouvert $\Re(s) > 1$. Elle est divergente en 1.*

Ainsi, les séries de Dirichlet considérées définissent des fonctions analytiques sur un demi-plan ouvert. $L(s,\chi)$ admet de plus le développement en produit eulérien, valable sur le demi-plan de convergence absolue

$$L(s,\chi) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{1}$$

Exemple 2.1. *Pour le caractère principal modulo q on a*

$$L(s,\chi_0) = \prod_{(p,q)=1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Une conséquence en est le

Théorème 2.3. *Une fonction L de Dirichlet n'admet aucun zéro dans le demi-plan ouvert $Re(s) > 1$*

La fonction $L(s,\chi_0)$ peut être prolongée en une fonction méromorphe sur le demi-plan ouvert $\Re(s) > 0$ admettant un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu $\prod_{p|q}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Une équation fonctionnelle permet d'obtenir un prolongement au plan complexe entier en une fonction méromorphe. Elle fait apparaître une symétrie autour de l'axe $\frac{1}{2} + \imath\mathbb{R}$.

Théorème 2.4 (Équation fonctionnelle pour les fonctions L)**.** *Soit χ un caractère primitif et $\mathfrak{a} = \frac{1-\chi(-1)}{2}$. Posons*

$$\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) L(s,\chi)$$

Cette fonction est entière et vérifie l'équation fonctionnelle (sous forme symétrique)

$$\Lambda(s,\chi) = \epsilon(\chi)\Lambda(1-s,\bar{\chi}) \tag{2}$$

où $\epsilon(\chi) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{n=1}^{q} \chi(n) e^{-\imath 2\pi \frac{n}{q}}$ est de module 1.

La fonction $\Lambda(s,\chi)$ admet le développement en produit de Hadamard (cf [9], chapitre 15) :

$$\Lambda(s,\chi) = e^{a(\chi)+b(\chi)s} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \tag{3}$$

où ρ parcourt les zéros de $\Lambda(s,\chi)$, soit les zéros non triviaux de $L(s,\chi)$ (c'est-à-dire ceux de partie réelle comprise entre 0 et 1). De plus, pour tout $\epsilon > 0$, $\sum \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}}$ converge.

2.1.3 La fonction Γ

La fonction Γ joue un rôle crucial dans l'équation fonctionnelle (2). Il est donc nécessaire de connaître son comportement de manière assez précise. Elle est définie pour $\Re(s) > 0$ par l'intégrale à paramètre

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t} \tag{4}$$

et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{5}$$

Comme $\Gamma(1) = 1$ on en déduit que $n! = \Gamma(n+1)$ pour tout entier positif n et que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, avec pour seuls pôles (simples) les entiers négatifs. Son inverse a donc pour seuls zéros les entiers négatifs, ce dont on déduit l'existence d'un développement en produit infini

Théorème 2.5. *La fonction Γ admet le développement en produit infini*

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} \tag{6}$$

Le comportement de $\log\Gamma$ et de sa dérivée $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ sont donnés par les formules de Stirling (complexes)

Théorème 2.6. *On a uniformément sur le domaine défini par*

$$\begin{cases} |s| > c > 0 \\ -\pi + \epsilon < \arg s < \pi - \epsilon \end{cases}$$

les deux relations

$$\log\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + \frac{\log 2\pi}{2} + O_{\epsilon,c}\left(\frac{1}{s}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log s + O_{\epsilon,c}\left(\frac{1}{s}\right) \tag{8}$$

Mentionnons enfin les deux formules suivantes pour la fonction Γ, déduites de son développement en produit infini

Proposition 2.7 (Formule des compléments)**.** *Soit* $s \neq 0, 1$. *On a*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi s}{\sin \pi s} \tag{9}$$

Proposition 2.8 (Formule de duplication)**.** *Soit* $s \in \mathbb{C}^\times$. *On a*

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s) \tag{10}$$

2.1.4 Majoration de $\frac{L'}{L}(s,\chi)$

On peut réécrire l'équation fonctionnelle (2) sous une forme asymétrique en utilisant les formules des compléments (9) et de duplication (10) pour la fonction Γ

$$L(1-s,\chi) = \epsilon(\chi)2^{1-s}\pi^{-s}q^{s-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}(s-\mathfrak{a})\right)\Gamma(s)L(s,\bar{\chi}) \tag{11}$$

L'intérêt essentiel de cette forme de l'équation fonctionnelle est que $L(s,\chi)$ a un comportement agréable sur le demi-plan $\Re(s) > 1$ – à toutes fins utiles, elle peut être assimilée à une constante sur le demi-plan $\Re(s) > \sigma$ pour tout $\sigma > 1$. Ainsi, en disposant de bonnes dominations de la fonction Γ (respectivement de son logarithme, sa dérivée logarithmique), obtiendra-t-on de bonnes dominations de la fonction $L(s,\chi)$ (respectivement de son logarithme, sa dérivée logarithmique) sur le demi-plan $\Re(s) < 1 - \sigma$.

Considérons la dérivée logarithmique de (11)

$$-\frac{L'}{L}(1-s,\chi) = \log\frac{q}{2\pi} - \tan\left(\frac{\pi}{2}(s-\mathfrak{a})\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{L'}{L}(s,\chi) \tag{12}$$

On considère maintenant s dans le domaine $\Re(s) > 1+\epsilon$, privé des cercles de centre $1+\mathfrak{a}+2n, n \in \mathbb{N}$ et de rayon $1/2$. En exprimant la tangente comme une fraction rationnelle en des exponentielles, on constate qu'elle y est uniformément bornée par une constante absolue. La dérivée logarithmique $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ y est bornée par une constante ne dépendant que d'ϵ. La dérivée logarithmique $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$ ne diffère de $\log s$ que d'une constante absolue. Ainsi

$$\left|\frac{L'}{L}(1-s,\chi)\right| \leqslant \log\frac{q}{2\pi} + \log|s| + c_\epsilon$$

soit

$$\left|\frac{L'}{L}(1-s,\chi)\right| \ll_\epsilon \log q|s| \tag{13}$$

2.1.5 Densité des zéros

On est en mesure de prouver un premier théorème, qui borne le nombre de zéros dans des bandes horizontales (donc dans des rectangles de largeur 1 de la bande critique).

Théorème 2.9. *Le nombre de zéros $\rho = \beta + \imath\gamma$ tels que $|\gamma - \tau| \leqslant 1$, noté $m(\tau)$, vérifie*

$$m(\tau) \ll \log(q\tau) \tag{14}$$

La démonstration de (14) se fait en exploitant l'équation fonctionnelle (2) pour majorer une somme faisant intervenir la distance des zéros à $\imath\tau$. On aura besoin pour ce faire de plusieurs lemmes. Dans toute la suite de cette partie, on fixe τ. Dérivons logarithmiquement le développement en produit de Hadamard de $\Lambda(s,\chi)$ (3)

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,\chi) = b(\chi) + \sum_\rho \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{s-\rho}\right) \tag{15}$$

Lemme 2.10. *La constante $b(\chi)$ vérifie*

$$\Re(b(\chi)) = -\sum_\rho \Re\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{16}$$

Démonstration. Considérons la dérivée logarithmique de l'équation fonctionnelle (2)

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,\chi) = -\frac{\Lambda'}{\Lambda}(1-s,\bar{\chi})$$

Les zéros de $L(s,\chi)$ sont les conjugués complexes de ceux de $L(s,\bar{\chi})$ donc le produit de Hadamard pour cette deuxième fonction porte sur les mêmes points, et c'est ainsi que l'on peut écrire sans équivoque à partir de la précédente équation

$$b(\chi) + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) = -b(\bar{\chi}) - \sum_\rho \left(\frac{1}{1-s-\bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}}\right)$$

Or $\overline{\Lambda(s,\chi)} = \Lambda(\bar{s},\bar{\chi})$, comme le montre un calcul sans difficulté, d'où l'on déduit $b(\bar{\chi}) = \overline{b(\chi)}$ puis finalement, en reportant dans la précédente égalité

$$2\Re(b(\chi)) = -\sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}}\right) \tag{17}$$

On a $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{2\Re(\rho)}{|\rho|^2} \ll \frac{1}{|\rho|^2}$, et de même $\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}} \ll \frac{1}{|\rho|^2}$, donc on peut séparer la somme qui intervient dans l'égalité précédente en deux séries absolument convergentes. Or si ρ est un zéro de $L(s,\chi)$ il en est de même de $1-\bar{\rho}$, donc

$$\sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{1-s-\bar{\rho}}\right) = 0 \tag{18}$$

et l'on déduit de (17) et (18) que

$$\Re(b(\chi)) = \sum_\rho \Re\left(\frac{-1}{\rho}\right)$$

ce qui est bien le résultat recherché. □

En considérant la partie réelle de l'égalité (15) on obtient alors

$$\sum_\rho \Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \Re\frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{q}{\pi}\right) + \Re\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) \tag{19}$$

Pour donner au membre de gauche de cette dernière égalité une forme plus sympathique, démontrons le lemme suivant

Lemme 2.11. *En fixant $s = 2 + \imath\tau$ on a uniformément pour tout zéro $\rho = \beta + \imath\gamma$ de $L(s,\chi)$*

$$\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) \asymp \frac{1}{1+(\tau-\gamma)^2} \tag{20}$$

Démonstration. Comme $\frac{1}{s-\rho} = \frac{\overline{s-\rho}}{|s-\rho|^2}$ il suffit d'encadrer uniformément le numérateur et le dénominateur

$$1 \leqslant \Re(\overline{s-\rho}) = 2-\beta \leqslant 2 \tag{21}$$
$$1+(\tau-\gamma)^2 \leqslant |s-\rho|^2 = (2-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2 \leqslant 4+(\tau-\gamma)^2 \tag{22}$$

En remarquant que $1+(\tau-\gamma)^2 \asymp 4+(\tau-\gamma)^2$ on en déduit le lemme. □

Il s'agit maintenant pour prouver le théorème de majorer $\frac{L'}{L}$ et $\log\left(\frac{q}{\pi}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)$.

La première majoration ne pose pas de problème

$$\left|\frac{L'}{L}(2+\imath\tau)\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{2+\imath\tau}}\right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log n}{n^2} = \zeta'(2) \tag{23}$$

Pour avoir la deuxième inégalité, on utilise la formule de Stirling complexe (8) pour obtenir la majoration

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \ll \log|s| \tag{24}$$

En introduisant les majorations (23) et (24) dans l'égalité , et à l'aide du lemme précédent, on en déduit

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1+(\tau-\gamma)^2} \ll \log(q\tau) \tag{25}$$

Or cette somme est supérieure à la moitié du nombre de zéros ρ tels que $|\Im(\rho)-\tau| \leqslant 1$ d'où le théorème. On en déduit immédiatement le

Corollaire 2.11.1. *Pour $-a \leqslant \sigma \leqslant b$ on a uniformément*

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|\gamma-\tau|\leqslant 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log\mathfrak{q})$$

où $\mathfrak{q} = q(|\tau|+2)$

Démonstration. On utilise (15) appliquée en s et en $\tilde{s} = 3 + \imath\tau$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{L'}{L}(s,\chi) &= \frac{L'}{L}(\tilde{s},\chi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\tilde{s}+\mathfrak{a}}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\tilde{s}-\rho}\right) \\
&= \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\tilde{s}-\rho}\right) + O(\log(\tau+2))
\end{aligned}$$

(l'utilisation de la formule de Stirling complexe est transparente)

Évaluons maintenant la somme portant sur les zéros de $L(s,\chi)$. Séparons-la en deux, en posant

$$S_1 = \sum_{|s-\rho|<1}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+\imath\tau-\rho}\right) \tag{26}$$

$$S_2 = \sum_{|s-\rho|\geqslant 1}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+\imath\tau-\rho}\right) \tag{27}$$

Par un calcul similaire à celui du lemme 2.11 on obtient que

$$S_2 \leqslant \sum_{|s-\rho|\geqslant 1} \frac{3}{1+(\tau-\gamma)^2} \ll \log q\tau$$

en utilisant (25) pour la deuxième majoration. On en déduit le corollaire. □

2.2 Régions sans zéros

L'objectif de cette section est d'établir une région (dépendant de q) dans laquelle les caractères modulo q ne s'annulent pas. En fait, comme on le verra, on ne peut exclure l'existence d'un unique zéro dit «exceptionnel» ou «de Selberg». Le point de départ est l'inégalité trigonométrique classique

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geqslant 0 \tag{28}$$

Pour n un entier premier à q, $\frac{\chi(n)}{n^{\imath\tau}}$ est de module 1 donc peut s'écrire $e^{\imath\theta}$, et en en appelant à l'inégalité (28) on a

$$3\chi_0(n) + 4\Re\left(\frac{\chi(n)}{n^{\imath\tau}}\right) + \Re\left(\frac{\chi^2(n)}{n^{\imath 2\tau}}\right) \geqslant 0$$

Cette inégalité reste valide pour $(n,q) \neq 1$ (elle est alors une égalité triviale), donc en la multipliant par $\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ puis en sommant sur $n \geqslant 1$ on en déduit le

Théorème 2.12. *Soit χ un caractère modulo q, $\sigma > 1$ et $\tau \in \mathbb{R}$. On a*

$$-3\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) - 4\Re\frac{L'}{L}(\sigma + \imath\tau, \chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma + \imath 2\tau, \chi^2) \geqslant 0$$

Le premier terme s'évalue facilement

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi_0(n)}{n^\sigma} \leqslant -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqslant \frac{1}{\sigma - 1} + c_1 \tag{29}$$

Dans la suite, on devra distinguer deux cas si le caractère χ est réel[2], le problème est que χ^2 sera le caractère principal : $\chi^2 = \chi_0$. Il faut donc étudier les cas χ réel et χ complexe séparément. Commençons par le plus simple

2.2.1 Région sans zéros pour les caractères complexes

Supposons pour commencer que le caractère complexe χ est primitif, ainsi que son carré χ^2. On évalue les quantités

$$-\frac{L'}{L}(\sigma + \imath\tau, \chi) \text{ et } -\frac{L'}{L}(\sigma + \imath 2\tau, \chi)$$

à l'aide de l'égalité (2.1.5)

$$\begin{aligned} -\Re\frac{L'}{L}(s, \chi) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{q}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s + \mathfrak{a}}{2}\right) - \sum_\rho \Re\left(\frac{1}{s - \rho}\right) &(30) \\ &= -\sum_\rho \Re\left(\frac{1}{s - \rho}\right) + O(\log q(\tau + 2)) &(31) \end{aligned}$$

uniformément dans la bande $1 < \sigma \leqslant 2$ (on a majoré la dérivée logarithmique de Γ à l'aide de la formule de Stirling complexe.).

Par commodité d'écriture, écrivons $\mathfrak{q} = q(\tau + 2)$. On dispose de la majoration

$$-\Re\frac{L'}{L}(s, \chi) \leqslant -\sum_\rho \Re\left(\frac{1}{s - \rho}\right) + c_2 \log \mathfrak{q} \tag{32}$$

En la réinjectant dans le théorème 2.12, et en exploitant la majoration (29) on obtient

$$\frac{3}{\sigma - 1} + c_3 \log \mathfrak{q} \geqslant \sum_\rho 4\Re\left(\frac{1}{\sigma + \imath\tau - \rho}\right) + \sum_\rho \Re\left(\frac{1}{\sigma + \imath 2\tau - \rho}\right)$$

[2] *i.e.* à valeurs réelles

Laissons σ libre pour le moment, et choisissons pour τ l'ordonnée d'un zéro $\rho = \beta + \imath\gamma$ de $L(s, \chi)$. Comme on a $\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2} > 0$, on peut se permettre de ne garder dans le membre de droite de l'inégalité précédente que le terme $\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{1}{\sigma-\beta}$ et on obtient

$$\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{3}{\sigma - 1} + c_3 \log \mathfrak{q}$$

En écrivant σ sous la forme $1 + \frac{\delta}{\log \mathfrak{q}}$ il vient

$$\beta < 1 + \frac{\delta}{\log \mathfrak{q}} \left(\frac{\delta c_3 - 1}{\delta c_3 + 3}\right)$$

La fraction rationnelle en δ est strictement négative pour $0 < \delta < c_3$, donc on obtient en optimisant δ une constante absolue c telle que $\beta < 1 - \frac{c}{\log \mathfrak{q}}$.

Ce résultat reste vrai pour les caractères non primitifs, vu que d'une part les zéros de χ et du caractère primitif χ_1 qui l'induit sont les mêmes dans le demi-plan $\Re(s) > 0$ (χ admet des zéros supplémentaires sur l'axe imaginaire), d'autre part la majoration de la dérivée logarithmique de $L(s, \chi)$ reste valable car

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$

d'où après dérivation logarithmique une erreur majorée par $\log q$ donc absorbée par le terme d'erreur utilisé[3]. Il en va de même avec χ^2. On en déduit le

Théorème 2.13. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que pour tout entier positif q et pour tout caractère complexe modulo q la fonction $L(s, \chi)$ n'admette pas de zéro dans le domaine défini par $\sigma > 1 - \frac{c}{\log \mathfrak{q}}$.*

2.2.2 Région sans zéros pour les caractères réels

Il reste à traiter le cas des caractères réels. Le problème ici est que le carré d'un tel caractère est le caractère principal, donc que la fonction L associée est — à un produit fini de facteurs eulériens près — la fonction ζ. La majoration effectuée auparavant n'est alors pas valide.

Comme on a

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

on en déduit pour $\sigma > 1$

[3] il se peut que cela impose de modifier c, mais la conclusion reste vraie.

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi_0)-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| = \left|\sum_{p|q}\log p\frac{p^s}{1-p^s}\right| \leqslant \sum_{p|q}\log p \leqslant \log q$$

En exploitant l'équation fonctionnelle pour la fonction ζ, on obtient de même qu'on l'avait fait pour les fonctions L une majoration

$$-\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) < -\Re\left(\frac{1}{s-1}\right)+c_4\log(\tau+2)$$

d'où en combinant ces deux derniers résultats

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(s,\chi_0)\right) < -\Re\left(\frac{1}{s-1}\right)+c_5\log\mathfrak{q}$$

En procédant de même qu'auparavant, on obtient l'inégalité

$$\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1}+\Re\left(\frac{1}{\sigma-1+2\imath\gamma}\right)+c_6\log\mathfrak{q} \tag{33}$$

$$\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1}+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2}+c_6\log\mathfrak{q} \tag{34}$$

On choisit σ sous la forme $1+\frac{\delta}{\log\mathfrak{q}}$, et *on suppose que* $\gamma \geqslant \frac{\delta}{\log\mathfrak{q}}$. On en déduit

$$\beta < 1-\left(\frac{4-5\delta c_6}{16+5\delta c_6}\right)\frac{\delta}{\log\mathfrak{q}}$$

On en déduit le

Théorème 2.14. *Il existe une constante absolue c telle que pour tout δ vérifiant $0<\delta<c$, pour tout caractère réel modulo q, $L(s,\chi)$ n'admette pas de zéro dans la région définie par*

$$\begin{cases} \beta & \geqslant & 1-\frac{\delta}{5\log\mathfrak{q}} \\ |\gamma| & \geqslant & \frac{\delta}{\log\mathfrak{q}} \end{cases}$$

La région en question est similaire à celle obtenue pour un caractère complexe, à part pour une petite bande centrée sur l'axe des abscisses où l'on ne contrôle rien *a priori*. Nous allons voir qu'en fait il n'y a de place dans cette bande (quitte à affaiblir un peu les constantes du théorème précédent) que pour un unique zéro, et que dans ce cas il est réel. Commençons par appliquer (32) en σ :

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) \leqslant -\sum_{\rho}\left(\frac{1}{\sigma-\rho}\right)+c_2\log q$$

On s'est en effet permis d'enlever les parties réelles car χ est réel et les zéros interviennent par paires de complexes conjugués. S'il existe un zéro complexe, ou réel double, $\rho = \beta + \imath\gamma$, alors on déduit de cette majoration

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi) < c_2 \log \mathfrak{q} - 2\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2}$$

Le terme de gauche est minoré par $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \geqslant \frac{-1}{\sigma - 1} - c_7$. Ainsi on obtient

$$-\frac{1}{\sigma - 1} < c_8 \log \mathfrak{q} - 2\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2}$$

En choisissant $\sigma = 1 + 2\frac{\delta}{\log \mathfrak{q}}$ on a $|\gamma| < \frac{1}{2}(\sigma - \beta)$ donc

$$-\frac{1}{\sigma - 1} < c_8 \log \mathfrak{q} - \frac{8}{5(\sigma - \beta)}$$

d'où finalement

$$\beta < 1 - \left(\frac{20\delta c_8 - 6}{10\delta c_8 + 5}\right)\frac{\delta}{\log \mathfrak{q}}$$

En choisissant δ assez petit dans le théorème précédent, on aboutit donc à la conclusion suivante

Théorème 2.15. *Il existe une constante absolue c telle que pour tout caractère χ, la fonction $L(s, \chi)$ admette au plus un zéro dans la région définie par*

$$\beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log \mathfrak{q}}$$

Ce zéro ne peut exister que si le caractère χ est réel, et c'est alors un zéro réel simple.

2.3 Région sans trop de zéros : la «log-free zero-density estimate»

Le but est maintenant de borner le nombre de zéros de $L(s, \chi)$ dans des rectangles de hauteur $2q$ du plan complexe, dans le cas où χ est un caractère non principal. On suit la démarche du chapitre 18 de [3].

On définit $\mathcal{R}_j(q)$ comme étant la zone suivante du plan complexe

$$\begin{cases} \Re(s) & > & 1 - \frac{j}{\log q} \\ |\Im(s)| & \leqslant & q \end{cases}$$

Pour un caractère de Dirichlet χ fixé, on définit $N_j(\chi)$ comme le nombre de zéros de $L(s, \chi)$ dans $\mathcal{R}_j(q)$.

Le principal théorème que l'on va prouver est qu'il existe deux constantes absolues C_1 et C_2 telles que, pour $j \leqslant \frac{\log q}{2}$, $\sum_\chi N_j(\chi) \leqslant C_1 e^{C_2 j}$. Pour démontrer un tel résultat, on va lisser la série de Dirichlet de $L(s,\chi)$ en une série qui s'annulera toujours aux zéros de $L(s,\chi)$, la tronquer, majorer l'erreur faite en tronquant, et on partira de la compensation du premier terme de la série (égal à 1) par les suivants en un zéro.

2.3.1 Troncature lisse de $L(s,\chi)$

On suppose ici fixés trois paramètres, w, y et z.
Posons

$$f(n) = \left(\sum_{d|n} \mu(d)h(d)\right)\left(\sum_{b|n} \theta_b\right)$$

où $h(d)$ est un majorant continu décroissant à support compact de $\mathbf{1}_{[0,z]}$. Dans la suite, on fait le choix

$$h(d) = \min\left(1, \frac{\log \frac{z}{d}}{\log \frac{z}{w}}\right)^+$$

La quantité θ_b, quant à elle, est définie comme suit

$$\theta_b = \frac{\mu(b)b}{G\varphi(b)} \sum_{\substack{ab\leqslant y\\(a,bq)=1}} \frac{\mu^2(a)}{\varphi(a)} \tag{35}$$

G étant choisi pour normaliser à $\theta_1 = 1$
Donnons quelques résultats classiques des méthodes de crible sur θ_b, que l'on exploitera par la suite (cf [3], section 6.5)

Théorème 2.16. *On a*

$$|\theta_b| \leqslant 1 \tag{36}$$

$$\sum_{b_1\geqslant 1}\sum_{b_2\geqslant 1} \frac{\theta_{b_1}\theta_{b_2}}{[b_1,b_2]} = \frac{1}{G} \tag{37}$$

$$G \geqslant \frac{\varphi(q)}{q}\log y \tag{38}$$

Remarquons enfin que $f(n)$ est nulle pour $2 \leqslant n \leqslant w$ (car alors $h(d)$ vaut 1 pour $d|n$, le résultat suit par inversion de Möbius.). On obtient ainsi la série de Dirichlet

$$K(s,\chi) = \sum_{n\geqslant 1} f(n)\frac{\chi(n)}{n^s}$$

2.3.2 Le détecteur de zéros

On introduit ici un nouveau paramètre, x.

La fonction L tronquée $K(s,\chi)$ admet la factorisation

$$K(s,\chi) = L(s,\chi)M(s,\chi) \tag{39}$$

où

$$M(s,\chi) = \sum_{m\geqslant 1}\left(\sum_{b\leqslant m}\sum_{\substack{d\leqslant m\\ [b,d]=m}}\mu(d)h(d)\theta_b\right)\frac{1}{m^s}$$

On coupe maintenant la série $K(s,\chi)$ après x.

$$K_x(s,\chi) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} f(n)\frac{\chi(n)}{n^s}$$

Cette série approche assez bien $K(s,\chi)$. En effet, en exploitant le produit (39) on obtient

$$\begin{aligned}
|K(s,\chi)-K_x(s,\chi)| &= \left|\sum_{n>x}\left\{\sum_{m|n}\sum_{[b,d]=\frac{n}{m}}\mu(d)h(d)\theta_b\right\}\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \\
&= \sum_{\substack{n=mr\\ n>x}}\sum_{\substack{b,d\geqslant 1\\ [b,d]=r}}\mu(d)h(d)\theta_b\frac{\chi(r)}{r^s}\frac{\chi(m)}{m^s} \\
&= \sum_{r\geqslant 1}\left(\sum_{[b,d]=r}\mu(d)h(d)\theta_b\right)\frac{\chi(r)}{r^s}\sum_{m>\frac{x}{r}}\frac{\chi(m)}{m^s}
\end{aligned}$$

Par sommation par parties

$$\left|\sum_{m>\frac{x}{r}}\frac{\chi(m)}{m^s}\right| \leqslant 2q|s|\left(\frac{r}{x}\right)^{\sigma}$$

On en déduit la majoration

$$|K(s,\chi)-K_x(s,\chi)| \leqslant \frac{2q|s|}{x^{\sigma}}\sum_{r\geqslant 1}\sum_{[b,d]=r}|\mu(d)h(d)\theta_b|$$

qui a un sens car il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls, grâce à nos choix pour h et θ. En minorant σ par $\frac{1}{2}$ (sur $\mathcal{R}_j(q)$ c'est toujours vérifié), en majorant $|s|$ par $2q$ (même remarque), en se restreignant aux termes non nuls ci-dessus (*i.e.* $d \leqslant z$ et $b \leqslant y$) et en majorant trivialement par 1 ces derniers, on obtient la majoration

$$|K(s,\chi) - K_x(s,\chi)| \leqslant \frac{4q^2yz}{\sqrt{x}}$$

Sous la condition, qu'à partir de maintenant on supposera réalisée

$$\frac{yz}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{8q^2}$$

la majoration devient

$$|K(s,\chi) - K_x(s,\chi)| \leqslant \frac{1}{2}$$

En un zéro ρ de $L(s,\chi)$, le produit (39) implique que $K(\rho,\chi) = 0$ donc que $|K_x(s,\chi)| \leqslant \frac{1}{2}$. En séparant le premier terme de la série, égal à 1, du reste, et en utilisant une inégalité triangulaire renversée, on obtient le *détecteur de zéros*

$$\left| \sum_{w<n\leqslant x} f(n) \frac{\chi(n)}{n^\rho} \right| \geqslant \frac{1}{2} \tag{40}$$

2.3.3 Utilisation du détecteur de zéros

Soit $S_j(\chi)$ l'ensemble des zéros de $L(s,\chi)$ dans $\mathcal{R}_j(q)$ comptés avec multiplicité. Alors le détecteur de zéros (40) donne

$$R = \sum_{\chi\neq\chi_0} N_j(\chi) \leqslant 2\sum_{\chi}\sum_{\rho\in S_j(\chi)} \left| \sum_{w<n\leqslant x} f(n)\frac{\chi(n)}{n^\rho} \right| \tag{41}$$

$$\leqslant 2\sum_{w<n\leqslant x} |f(n)| \left| \sum_{\chi}\sum_{\rho\in S_j(\chi)} c_\chi(\rho)\frac{\chi(n)}{n^\rho} \right| \tag{42}$$

où les $c_\chi(\rho)$ sont des nombres complexes de module 1.

Par Cauchy-Schwarz, en posant

$$U = \sum_{w<n\leqslant x} \left(\sum_{d|n} \mu(d)h(d) \right)^2 n^{2j/\log q - 1} \tag{43}$$

$$V = \sum_{n\geqslant 1} g(n) \left(\sum_{b|n} \theta_b \right)^2 n^{1-2j/\log q} \left| \sum_{\chi}\sum_{\rho\in S_j(\chi)} c_\chi(\rho)\frac{\chi(n)}{n^\rho} \right|^2 \tag{44}$$

où g est un majorant continu de $\mathbf{1}_{[w,x]}$, on obtient

$$R^2 \leqslant 4UV \tag{45}$$

2.3.4 Majoration de U

Le but de cette partie est de majorer le facteur U dans la majoration (45). Pour ce faire, on part de la majoration suivante, démontrée dans [6]

Théorème 2.17.

$$\sum_{w<n\leqslant x}\left(\sum_{d|n}\mu(d)h(d)\right)^2 \leqslant \frac{x}{\log z/w}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z/w}\right)\right) \tag{46}$$

En notant

$$\kappa = 2\frac{j}{\log q}-1 \tag{47}$$

$$\delta(n) = \left(\sum_{d|n}\mu(d)h(d)\right)^2 \tag{48}$$

$$\Delta(t) = \sum_{w<n\leqslant t}\delta(n) \tag{49}$$

le facteur U s'écrit

$$U=\sum_{w<n\leqslant x}\delta(n)n^\kappa$$

et (46) s'écrit

$$\Delta(x)\leqslant \frac{x}{\log z/w}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z/w}\right)\right) \tag{50}$$

Effectuons une sommation par parties

$$U = \sum_{w<n\leqslant x}\left(\Delta(n)-\Delta(n-1)\right)n^\kappa \tag{51}$$

$$= \Delta\left(\lfloor x\rfloor\right)\left(\lfloor x\rfloor+1\right)^\kappa+\sum_{w<n\leqslant x}\Delta(n)\left(n^\kappa-(n+1)^\kappa\right) \tag{52}$$

L'exposant κ étant négatif, on peut à l'aide de (50) majorer le premier terme par $\frac{x^{1+\kappa}}{\log z/w}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z/w}\right)\right)$. Le second terme se majore par le même moyen

$$\begin{aligned}\sum_{w<n\leqslant x}\Delta(n)\left[-t^\kappa\right]_n^{n+1} &\leqslant \left(1+O\left(\frac{1}{\log z/w}\right)\right)\sum_{w<n\leqslant x}\frac{n}{\log z/w}\left[-t^\kappa\right]_n^{n+1}\\ &\leqslant \frac{x}{\log z/w}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z/w}\right)\right)\left[-t^\kappa\right]_w^{\lfloor x\rfloor+1}\\ &\ll x^{\kappa+1}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la majoration

$$aU\ll x^{\kappa+1} \tag{53}$$

2.3.5 Majoration de V

Majorons maintenant le facteur V dans (45). Rappelons que

$$V = \sum_{n \geqslant 1} g(n) \left(\sum_{b|n} \theta_b \right)^2 n^{-\kappa} \left| \sum_{\chi} \sum_{\rho \in S_j(\chi)} c_\chi(\rho) \frac{\chi(n)}{n^\rho} \right|^2$$

En développant le carré et en changeant l'ordre de sommation

$$V = \sum_{\chi_1} \sum_{\chi_2} \sum_{\rho_1} \sum_{\rho_2} |B(\chi_1 \bar{\chi}_2, \rho_1 + \bar{\rho}_2 - \kappa)| \tag{54}$$

où

$$B(\chi, s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g(n) \left(\sum_{b|n} \theta_b \right)^2 \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Avec les choix faits jusqu'à présent, $\rho_1 + \bar{\rho}_2 - \kappa$ est de partie réelle plus grande que 1. Précisons la fonction g. On la suppose continue continûment dérivable par morceaux, de variation totale $\mathbf{V}(g) \leqslant 2$, à support compact $[w/v, wz]$ pour un paramètre $v < w$.

Alors on a le

Lemme 2.18. *Sous ces conditions sur g, en définissant*

$$G(s) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{g(\xi)}{\xi^s} d\xi$$

On a

$$\sum_{n \equiv a[q]} \frac{g(dn)}{(dn)^s} = \frac{G(s)}{dq} + O\left(|s| \frac{v}{w} \right)$$

et la constante implicite est absolue.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{G(s)}{dq} - \sum_{k \in N} \frac{g(d(a+kq))}{(d(a+kq))^s} \right| &= \left| \int_0^\infty \frac{g(\xi)}{\xi^s} d \left\{ \frac{\xi - ad}{qd} \right\} \right| \\
&= \left| \int_{\frac{w}{v}}^{zw} \left\{ \frac{\xi - ad}{qd} \right\} d \left(\frac{g(\xi)}{\xi^s} \right) \right| \\
&\leqslant \int_{\frac{w}{v}}^{zw} \left| \left\{ \frac{\xi - ad}{qd} \right\} \left(\frac{g(\xi)}{\xi^s} \right)' \right| d\xi \\
&\leqslant \int_{\frac{w}{v}}^{zw} \left| \frac{g'(\xi)}{\xi^s} \right| d\xi + \int_{\frac{w}{v}}^{zw} \left| \frac{sg(\xi)}{\xi^{s+1}} \right| d\xi \\
&\leqslant \frac{\mathbf{V}(g)}{(w/v)^\sigma} + |s| \frac{\mathbf{V}(g)}{(w/v)^{\sigma+1}} \\
&\ll |s| \frac{v}{w}
\end{aligned}$$

$\square$

En utilisant ce lemme, on en déduit que pour d premier à q,

$$\begin{aligned}
(55) \qquad \sum_{n\geqslant 1} g(dn)\frac{\chi(dn)}{(dn)^s} &= \sum_{(a,q)=1}\sum_{n\equiv a[q]} g(dn)\frac{\chi(dn)}{(dn)^s} \\
(56) \qquad &= \chi(d)\sum_{(a,q)=1}\left(\chi(a)\frac{G(s)}{dq} + O\left(|s|\frac{v}{w}\right)\right) \\
(57) \qquad &= \delta_\chi \frac{\varphi(q)G(s)}{dq} + O\left(\varphi(q)|s|\frac{v}{w}\right)
\end{aligned}$$

où δ_χ vaut 1 si $\chi = \chi_0$, 0 sinon, ce qui est bien entendu une conséquence de l'orthogonalité des caractères.

Voyons comment ceci nous donne une majoration de $B(\chi, s)$

$$\begin{aligned}
(58) \qquad B(\chi, s) &= \sum_{n\geqslant 1} g(n)\left(\sum_{b|n}\theta_b\right)^2 \frac{\chi(n)}{n^s} \\
(59) \qquad &= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{b_1,b_2|n}\theta_{b_1}\theta_{b_2} g(n)\frac{\chi(n)}{n^s} \\
(60) \qquad &= \sum_{b_1\in\mathbb{N}}\sum_{b_2\in\mathbb{N}}\theta_{b_1}\theta_{b_2}\sum_{k\geqslant 1} g(k[b_1,b_2])\frac{\chi(k[b_1,b_2])}{(k[b_1,b_2])^s}
\end{aligned}$$

On utilise (57) pour évaluer ces sommes. Les termes d'erreur s'additionnent bien par définition (35) θ_b est nul pour $b > y$, par (36) il est plus petit que 1. On somme donc y^2 fois un terme d'erreur $\ll \varphi(q)|s|\frac{v}{w}$

$$B(\chi, s) = \left(\sum_{(b_1,q)=(b_2,q)=1}\frac{\theta_{b_1}\theta_{b_2}}{[b_1, b_2]}\right)\delta_\chi\frac{\varphi(q)G(s)}{q} + O\left(\varphi(q)|s|\frac{y^2 v}{w}\right)$$

On majore la somme sur b_1, b_2 en utilisant la positivité de θ_b et l'égalité (37), et ainsi

$$(61) \qquad |B(\chi, s)| \leqslant \delta_\chi \frac{\varphi(q)|G(s)|}{Gq} + O\left(\varphi(q)|s|\frac{y^2 v}{w}\right)$$

Par la minoration (38) on obtient

$$(62) \qquad |B(\chi, s)| \leqslant \delta_\chi \frac{|G(s)|}{\log y} + O\left(\varphi(q)|s|\frac{y^2 v}{w}\right)$$

d'où finalement en introduisant cette dernière majoration dans (54) et en sommant d'abord par rapport au caractère χ_2

$$\begin{aligned} V &= \sum_{\chi_1}\sum_{\chi_2}\sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}|B(\chi_1\bar{\chi}_2,\rho_1+\bar{\rho}_2-\kappa)| \\ &\leqslant \sum_{\chi}\sum_{\rho_1,\rho_2\in S_j(\chi)}\left(\frac{|G(\rho_1+\bar{\rho}_2-\kappa)|}{\log y}+qO\left(\varphi(q)|\rho_1+\bar{\rho}_2|\frac{y^2v}{w}\right)\right) \end{aligned}$$

On a, par définition de la quantité R, $\ll R^2/\varphi(q)$ termes dans la sommation, d'où un terme d'erreur après sommation, vu que les zéros considérés sont de module $\ll q$

$$V \leqslant \left(\sum_{\chi}\sum_{\rho_1,\rho_2\in S_j(\chi)}\frac{|G(\rho_1+\bar{\rho}_2-\kappa)|}{\log y}\right)+O\left(R^2q^2\frac{y^2v}{w}\right) \tag{63}$$

On voudrait maintenant choisir g telle que $G(s)$ «décroisse en $1/(1+|s|)^2$», ce qui permettrait de «compter les zéros» de même que dans la section 2.1.5.

Lemme 2.19. *Pour g définie par*

$$g(t)=\min\left\{1-\frac{\log w/t}{\log v},1,1-\frac{\log t/x}{\log v}\right\}^+$$

on a

$$G(s)\ll\frac{\log x}{(1+|s-1|\log v)^2}$$

uniformément quand $\log x\asymp\log v$.

Démonstration. g peut s'écrire sous la forme

$$g(t)\log v=\log^+\left(\frac{xv}{t}\right)-\log^+\left(\frac{x}{t}\right)-\log^+\left(\frac{w}{t}\right)+\log^+\left(\frac{w}{vt}\right)$$

La formule $\int_0^\infty t^s\log^+ t\frac{dt}{t}=\int_1^\infty t^s\log t\frac{dt}{t}=\frac{1}{s^2}$ permet moyennant quelques changements de variables de calculer $G(1-s)$

$$\begin{aligned} G(1-s) &= \frac{(xv)^s-x^s-w^s+(w/v)^s}{s^2\log v} \\ &= \frac{(v^s-1)(x^s-(w/v)^s)}{s^2\log v} \end{aligned}$$

Quand $|s|\leqslant\frac{1}{\log v}$, on obtient

$$G(1-s)\ll\frac{(|s|\log v)(|s|\log x+|s|\log w/v)}{|s|^2\log v}$$

Donc comme $x > w > w/v$ on obtient $G(1-s) \ll \log x$.

De manière générale, on s'intéresse à ce qui se passe quand $\Re(1-s) \geqslant 1$ donc $\Re(s) \leqslant 0$, et le numérateur est borné par une constante absolue sur ce domaine. Ainsi on en déduit

$$G(1-s) \ll \min\left(\log x, \frac{1}{|s|^2 \log v}\right)$$

d'où l'on déduit

$$G(s) \ll \frac{\log x}{1+|1-s|^2 \log v \log x} \ll \frac{\log x}{1+(|1-s|\log v)^2} \ll \frac{\log x}{(1+|1-s|\log v)^2}$$

(On a utilisé l'hypothèse $\log x \asymp \log v$.) □

Ainsi, de ce lemme et de la majoration (63) on déduit (en majorant le module des différences de zéros par la partie imaginaire) que

$$V \ll \frac{\log x}{\log y} \sum_{\chi} \sum_{\rho_1,\rho_2 \in S(\chi)} \frac{1}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|\log v)^2} + R^2 q^2 \frac{y^2 v}{w} \tag{64}$$

2.3.6 Utilisation de l'équation fonctionnelle

Nous pouvons maintenant retrouver nos chères fonctions L et autres équations fonctionnelles. Par (2.1.5) et la formule de Stirling complexe (8) on a pour χ primitif

Proposition 2.20. *Uniformément pour* $1 < \sigma \leqslant 2$*,*

$$\sum_{\rho} \Re \frac{1}{s-\rho} = \frac{1}{2}\log q|s| + \Re\frac{L'}{L}(s,\chi) + O(1) \tag{65}$$

Minorons $\Re\frac{1}{s-\rho}$

$$\Re\frac{1}{s-\rho} = \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(\gamma-\tau)^2} \geqslant \frac{1}{\sigma-\beta}\left(1+\frac{|\gamma-\tau|}{\sigma-1}\right)^{-2}$$

On rappelle aussi que $\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \leqslant \frac{1}{\sigma-1} + O(1)$

En introduisant la majoration et la minoration précédente, et en exploitant la positivité de $\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right)$ pour «oublier» les zéros de partie réelle strictement inférieure à $\frac{1-\kappa}{2} = \lambda$

$$\sum_{\beta \geqslant \lambda} \left(1+\frac{|\gamma-\tau|}{\sigma-1}\right)^{-2} \leqslant (\sigma-\lambda)\left(\frac{\log q^2}{2} + \frac{1}{\sigma-1} + O(1)\right)$$

Appliquons ceci en $\sigma = 1 + \frac{1}{\log v}$

$$\sum_{\beta \geqslant \lambda} (1 + |\gamma - \tau| \log v)^{-2} \leqslant \left(1 - \lambda + \frac{1}{\log v}\right) \log Cvq \tag{66}$$

où C est une constante absolue. Si χ n'a pas le bon goût d'être primitif, cette dernière inégalité reste valable : les zéros qui diffèrent entre χ est le caractère primitif qui l'induit n'interviennent pas dans la somme de gauche, et le conducteur du caractère primitif associé est plus petit que q.

En combinant (64) et (66) on trouve

$$V \ll Rv^{1-\lambda} \frac{\log x \log(Cvq)}{\log y \log v} + R^2 q^2 \frac{y^2 v}{w}$$

En multipliant cette majoration par (53) on en déduit

$$R \ll (x^2 v)^{1-\lambda} \frac{\log x \log(Cvq)}{\log y \log v} + Rq^2 x^{2-2\lambda} \frac{y^2 v}{w}$$

En sommant de $-q$ à q la majoration absolue du théorème 2.9 on a la borne triviale $R \ll q^2 \log q^2 \ll q^2 \log q$, et ainsi

$$R \ll (x^2 v)^{1-\lambda} \frac{\log x \log(Cvq)}{\log y \log v} + q^4 x^{2-2\lambda} \frac{y^2 v}{w} \log q \tag{67}$$

2.3.7 Choix des paramètres

On veut simplifier la majoration (67) sous les contraintes

$$\begin{cases} w & < & z \\ w & < & x \\ 8q^2 yz & \leqslant & \sqrt{x} \\ \log x & \asymp & \log v \end{cases} \tag{68}$$

sur les paramètres v, w, x, y, z.

Avec le choix de paramètres

$$\begin{cases} v = q^2 \\ w = q^{14} \\ x = q^{46} \\ y = q^4 \\ z = q^{16} \end{cases}$$

(67) devient

$$R \ll q^{94(1-\lambda)} + q^{92(1-\lambda)} \log q \ll q^{94(1-\lambda)}$$

Ainsi, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $R \leqslant C_1 q^{C_2(1-\lambda)}$. Rappelons que $\lambda = \frac{1-\kappa}{2} = 1 - \frac{j}{\log q}$, donc on a montré que $R \leqslant C_1 e^{C_2 j}$.

On en déduit trivialement le théorème suivant

Théorème 2.21. *Il existe deux constantes absolues C_1 et C_2 telles que, en notant $\Xi(j)$ le nombre de caractères ayant un zéro dans $\mathcal{R}_{j+1}(q)$ et pas de zéro dans $\mathcal{R}_j(q)$*

$$\Xi(j) \leqslant C_1 e^{C_2 j}$$

3 Répartition des entiers friables et fonctions L

3.1 Définitions et heuristique

On cherche à prouver l'équirépartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques, en un sens à préciser. Rappelons d'abord la notion d'entier friable

Définition 3.1. *Un entier n est dit y-friable si tous ses facteurs premiers sont plus petits que y. On note $\mathcal{S}(x,y)$ l'ensemble des entiers y-friables plus petits que x.*

L'objet de notre étude est la fonction de répartition de ces entiers friables

Définition 3.2 (Fonction de répartition des entiers friables)**.** *On note $\Psi(x,y)$ le nombre d'entiers y-friables plus petits que x.*

La question que l'on se pose est celle de la répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques. Une première réduction du problème apparaît. En effet, notons $\Psi_{a,q}(x,y)$ le nombre d'entiers y-friables plus petits que x et congrus à $a \mod q$, un peu de réflexion permet de voir que, en notant d le plus grand commun diviseur de a et q, on a

$$\Psi_{a,q}(x,y) = \Psi_{\frac{a}{d},\frac{q}{d}}\left(\frac{x}{d},y\right)$$

On peut ainsi se restreindre aux progressions arithmétiques $a + q\mathbb{N}$ avec a et q premiers entre eux.

En notant $\Psi_q(x,y)$ le nombre d'entiers y-friables plus petits que x et premiers à q, et en considérant qu'il n'y a *a priori* pas de raison structurelle que l'on trouve plus d'entiers friables dans une classe de congruence $\mod q$ que dans une autre, il n'est pas déraisonnable de rechercher des résultats d'équirépartition du type $\Psi_{a,q}(x,y) \sim \frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x,y)$.

Une obstruction naturelle apparaît cependant, par exemple pour q premier et y petit alors, si tous les entiers inférieurs à y sont des résidus quadratiques modulo q, tout entier y-friable sera aussi un résidu quadratique modulo q, et on ne pourra avoir équirépartition (la moitié des classes de congruence seront constituées de non-résidus quadratiques). La difficulté de résolution de la conjecture de Vinogradov selon laquelle le plus petit non-résidu quadratique modulo p est asymptotiquement plus petit que toute puissance strictement positive de p donne donc une idée du domaine sur lequel on peut espérer établir des résultats d'équirépartition : il sera sage de limiter q à être plus petit que y^A pour un certain A si l'on veut obtenir des résultats valables sur un domaine en x et y assez large.

Granville a montré dans [7] le résultat suivant

Théorème 3.1. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\Psi(x, y; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x, y)\left(1 + O\left(\frac{1}{u^c}\frac{\log q}{\log y} + \frac{1}{\log y}\right)\right)$$

soit valable uniformément sur le domaine défini par $x \geqslant y \geqslant q^{1+\epsilon}$.

3.2 Comportement de $\Psi(x, y)$, $\Psi_q(x, y)$

On rappelle ici les résultats maintenant classiques sur les estimations asymptotiques de $\Psi(x, y)$, obtenus par Hildebrand et Tenenbaum *via* la méthode du col. On note dans la suite $u = \frac{\log x}{\log y}$ et $\bar{u} = \frac{\min(y, \log x)}{\log y}$.
Soit $\zeta(s, y) = \prod_{p \leqslant y}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ le facteur initial du produit eulérien pour la fonction ζ. C'est une fonction méromorphe sur le plan complexe, qui ne s'annule jamais et dont les pôles sont tous situés sur l'axe des ordonnées. On pose $\varphi(s, y) = \log\zeta(s, y)$ (pour la détermination principale du logarithme complexe), et on note $\varphi_k(x, y)$ sa dérivée k-ième. Hildebrand et Tenenbaum obtiennent de la sorte (théorème 1.6 de [4])

Théorème 3.2. *Uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$ on a*

$$\Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha, y)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}}\right)\right)$$

où α est la solution réelle (unique) à l'équation $\varphi_1(\alpha, y) = \log x$. Ce type de résultat repose sur l'expression de $\Psi(x, y)$ comme transformée de Mellin, puis sur le choix fin de l'abscisse d'intégration. L'abscisse α choisie ici correspond à un point-selle, ou col, d'où le nom de la méthode. En adaptant cette méthode, la Bretèche et Tenenbaum ont donné une estimation similaire pour $\Psi_q(x, y)$ (théorème 2.1 de [2])

Théorème 3.3. *Uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$ on a*

$$\Psi_q(x, y) = g_q(\alpha)\Psi(x, y)\left(1 + O\left(E_q^*\right)\right)$$

où $g_q(\alpha) = \prod_{p|q, p \leqslant y}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)$ et E_q^* se comporte de la manière suivante

$$E_q^* \ll \begin{cases} \frac{1}{\bar{u}} \ \textit{si}\ \omega(q) \ll y^{1/\log(u+2)} \\ \frac{\log^2 p_{\omega(q)}}{\log^2(y)\log(u+2)} \ \textit{si}\ y^{1/\log(u+2)} \ll \omega(q) \ll \frac{\sqrt{y}}{\log y} \end{cases}$$

Dans le problème qui nous intéresse, on se place sous la condition $q \leqslant y^A$, ce qui implique que $\log q \ll \log y$, donc on aura un «bon» terme d'erreur dans l'estimation asymptotique de Ψ_q ci-dessus. Comme $\omega(t) \ll \frac{\log t}{\log\log t}$ et $p_k \ll k \log k$ on peut réécrire la majoration dans le deuxième cas ci-dessus plus simplement

$$E_q^* \ll \frac{(\log\log y)^2}{\log^2 y \log u} \ll \frac{1}{\log u}$$

En «recollant» les résultats ci-dessus on obtient l'évaluation asymptotique suivante

$$\Psi_q(x,y) = \prod_{p|q, p\leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha, y)}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}} + \frac{1}{\log u}\right)\right\} \tag{69}$$

3.3 Le paramètre α

Il est important de connaître finement le comportement du paramètre α dans les domaines où on est amené à travailler. En effet, des sommes où α apparaît comme exposant interviennent par la suite. On donne ici des estimations d'α.

3.3.1 La fonction ξ

Les estimations d'α s'écrivent assez aisément en faisant intervenir une fonction auxiliaire, la fonction ξ.

Définition 3.3. *La fonction $\xi(t)$ est définie comme l'unique solution de l'équation*

$$e^{\xi(t)} = 1 + t\xi(t) \tag{70}$$

pour $t > 0$, $t \neq 1$ et par $\xi(1) = 0$.

Dans le lemme 3.1 de [2], la Bretèche et Tenenbaum fournissent l'estimation suivante

Proposition 3.4. *Pour tout $\epsilon > 0$ et $(\log x)^{1+\epsilon} \leqslant y \leqslant x$ on a*

$$\alpha(x,y) = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O_\epsilon\left(\frac{1}{\exp((\log y)^{3/5-\epsilon})} + \frac{1}{\log x \log y}\right) \tag{71}$$

La première de ces deux estimations faisant intervenir ξ explicitement, il est intéressant de connaître précisément le comportement asymptotique de $\xi(u)$. Fort heureusement, on dispose en utilisant l'équation (70) définissant ξ d'un bon développement asymptotique de ξ

$$\xi(u) = \log(u \log u) + O\left(\frac{\log\log u}{\log u}\right) \tag{72}$$

uniformément pour $u \geqslant 3$.

Ceci implique l'approximation

$$\alpha(x,y) = \frac{\log(1+y\log x)}{\log y}\left\{1+O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\} \tag{73}$$

3.3.2 Une somme sur les nombres premiers

On veut évaluer ici la somme

$$S_{\alpha,r} = \sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p^\alpha} \tag{74}$$

pour $x \geqslant y \geqslant \log^{2+\epsilon} x$. Remarquons que sur ce domaine, on a l'encadrement $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ en-dehors d'un compact.Cette somme peut s'exprimer comme l'intégrale de Stieltjes

$$S_{\alpha,r} = \int_2^r \frac{1}{t^\alpha}d\pi(t)$$

En intégrant par parties

$$S_{\alpha,r} = \frac{\pi(r)}{r^\alpha} - 2^{-\alpha} + \alpha\int_2^r \frac{\pi(t)}{t^{\alpha+1}}dt$$

En utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1+o(1))$

$$S_{\alpha,r} = \frac{r^{1-\alpha}}{\log r} + \alpha\int_2^r \frac{dt}{t^\alpha \log t} + O(1)$$

Pour évaluer cette intégrale, on va traiter séparément les intervalles $2 \leqslant t \leqslant \sqrt{r}$ et $\sqrt{r} \leqslant t \leqslant r$

$$\begin{aligned}
\int_2^r \frac{dt}{t^\alpha\log t} &= \int_2^{\sqrt{r}} \frac{dt}{t^\alpha\log t} + \int_{\sqrt{r}}^r \frac{dt}{t^\alpha\log t} \\
&\asymp \frac{1}{\log r}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\sqrt{r}}^r + O\left(\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^{\sqrt{r}}\right) \\
&\asymp \frac{r^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\log r}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$S_{\alpha,r} \asymp \frac{r^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\log r}$$

En particulier, pour $r = y^j$, pour u assez grand on aura, en s'aidant de l'estimation (71) et de la propriété $e^\xi = 1 + u\xi$

$$S_{\alpha,y^j} \asymp ju^j \tag{75}$$

3.4 Schéma de la preuve

De manière assez classique (par analogie avec le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet) on évalue $\Psi_{a,q}(x,y)$ non directement mais comme une somme de termes faisant intervenir des caractères modulo q, l'avantage étant que les fonctions L impliquées par la suite admettent un produit eulérien. Posons

$$\Psi(x,y;\chi) = \sum_{n\leqslant x, P(n)\leqslant y} \chi(n)$$

Par orthogonalité des caractères on obtient

$$\Psi(x,y;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \overline{\chi(a)}\Psi(x,y;\chi)$$

3.4.1 Fonctions lissées

Un caractère non principal étant une fonction oscillante, on s'attend à ce que le terme dominant d'une telle somme provienne du caractère principal, donnant bien un résultat du type recherché. Aussi cherche-t-on à majorer aussi finement que possible $\Psi_\chi(x,y)$ pour $\chi \neq \chi_0$. Des méthodes d'analyse harmonique étant utilisées, il est plus pratique de ne pas travailler directement avec ces sommes, mais avec des sommes les approchant, où la sommation est lissée.

Soit $\Phi \ : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ une fonction décroissante de classe C^∞ nulle pour $t \geqslant 2$. En pratique, Φ sera une approximation lisse de la fonction caractéristique de $[0,1]$. On pose

$$\Psi(x,y;q,a,\Phi) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(y)\\ n\equiv a[q]}} \Phi\left(\frac{n}{x}\right)$$

On décompose cette fonction à l'aide des caractères modulo q

$$\Psi(x,y;q,a,\Phi) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \overline{\chi(a)}\Psi(x,y;\chi,\Phi) \tag{76}$$

où

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi) = \sum_{n\in\mathcal{S}(y)} \chi(n)\Phi\left(\frac{n}{x}\right)$$

L'égalité (76) donne une expression comme transformée de Mellin. Pour $c > 0$

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi) = \frac{1}{2\imath\pi}\int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty} L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds \tag{77}$$

où
$$\hat{\Phi}(s)=\int_0^\infty \Phi(t)t^s\frac{dt}{t}$$
et $L(s,\chi;y)$ désigne le facteur initial du produit eulérien pour la fonction L associée à χ
$$L(s,\chi;y)=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Pour évaluer (77) on est amené à intégrer sur un compact, majorer le reste et évaluer le terme principal. Tout d'abord, intéressons-nous à la décroissance de $\hat{\Phi}$

Théorème 3.5 (Décroissance rapide de $\hat{\Phi}$).
Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $\epsilon>0$ on a uniformément pour $Re(s)>\epsilon$
$$\hat{\Phi}(s)\ll_{k,\epsilon,\Phi} s^{-k}$$

Démonstration. En intégrant par parties $k+1$ fois
$$\hat{\Phi}(s)=(-1)^{k+1}\int_0^\infty \frac{t^{s+k}}{s(s+1)\dots(s+k)}\Phi^{(k+1)}(t)dt\ll_{k,\epsilon,\Phi}\frac{1}{|s|(|s|+1)\dots(|s|+k)}$$
□

Cette décroissance rapide permet d'approcher l'intégrale (77) par la même intégrale prise sur un intervalle borné. En effet
$$\left|\int_{\alpha+\imath\sqrt{q}}^{\alpha+\imath\infty} L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds\right|\ll_{\alpha,k} L(\alpha,\chi_0;y)x^\alpha\sqrt{q}^{1-2k}ds\ll_{\alpha,k} L(\alpha,\chi_0)x^\alpha q^{-k}$$

la majoration de $|L(s,\chi;y)|$ par $L(\alpha,\chi_0;y)$ étant immédiate à partir du produit eulérien. Ainsi

(78)
$$\Psi(x,y;\chi,\Phi)=\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\alpha-\imath\sqrt{q}}^{\alpha+\imath\sqrt{q}} L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds+O_{k,\alpha}(L(\alpha,\chi_0;y)x^\alpha q^{-2k})$$

Le terme d'erreur ci-dessus est peu parlant, et il serait agréable de le comparer à $\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)$. Ainsi, on pourra espérer prouver que $\Psi(x,y;\chi,\Phi)$ est très petit par rapport à $\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)$ pour χ non principal. Ceci, en faisant «tendre» le poids lisse vers l'indicatrice de $[0,1]$, donnera l'équirépartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques.

3.4.2 Quelques estimations asymptotiques

Rappelons (69)

$$\Psi_q(x,y) = \prod_{p|q, p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y)}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\bar{u}}+\frac{1}{\log u}\right)\right\}$$

Cette estimation se transpose au cas lissé (le facteur $\frac{1}{\alpha}$ n'étant autre que la transformée de Laplace du poids, en l'occurrence $\mathbf{1}_{[0,1]}$, évaluée en α)
(79)

$$\Psi_q(x,y,\chi_0,\Phi) = \prod_{p|q, p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)\hat{\Phi}(\alpha)}{\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y)}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\bar{u}}+\frac{1}{\log u}\right)\right\}$$

Il s'agit maintenant d'évaluer $\varphi_2(\alpha,y)$ en fonction de x et y

$$\varphi_2(\alpha,y) = \sum_{p\leqslant y}\chi_0(p)\frac{p^\alpha}{(p^\alpha-1)^2}\log^2 p$$

On suppose $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$ dans la suite du raisonnement. On a alors

$$\varphi_2(\alpha,y) \asymp \sum_{p\leqslant y}\chi_0(p)\frac{\log^2 p}{p^\alpha}$$

L'erreur commise en rajoutant les nombres premiers divisant q à la somme est majorée par $\log q\log^2 y \asymp \log^3 y$. Ensuite, on considère séparément les termes $p \leqslant \sqrt{y}$ et ceux compris entre $\sqrt{y}$ et y. Pour ces derniers, le logarithme en numérateur est $\asymp \log^2 y$ donc

$$\varphi_2(\alpha,y) \asymp \log^2 y\sum_{\sqrt{y}<p\leqslant y}\frac{1}{p^\alpha} + O\left(\log^3 y + \log^2 y\sum_{p\leqslant\sqrt{y}}\frac{1}{p^\alpha}\right)$$

d'où, en utilisant (75) pour évaluer les sommes

(80) $$\varphi_2(\alpha,y) \asymp u\log^2 y = \log x\log y$$

En reportant (80) dans (79) on obtient

(81) $$x^\alpha L(\alpha,\chi_0;y) \asymp \sqrt{\log x\log y}\,\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)$$

En reportant ceci dans (78), on trouve ainsi que pour $\log x \leqslant y$

(82) $$\Psi(x,y;\chi,\Phi) = \frac{1}{2\imath\pi}\int_{\alpha-\imath\sqrt{q}}^{\alpha+\imath\sqrt{q}} L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds + O(\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)q^{-10})$$

On aura enfin besoin de l'estimation suivante

(83) $$\log L(\alpha,\chi_0;y) \asymp u$$

Ceci est une conséquence du produit eulérien et de l'estimation (75)

3.4.3 Caractères civilisés, modérés, sauvages, énoncés des théorèmes

À partir de maintenant, et pour tout le reste de ce travail, on supposera que l'on se place dans le domaine défini par

$$y^{(\log\log x)^4} \leqslant x \leqslant \exp\left(y^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)$$

Soient A, D deux constantes absolues, $\sqrt{y} \leqslant q \leqslant y^A$. On définit les caractères civilisés, modérés et sauvages comme suit

Définition 3.4. *Un caractère χ modulo q est dit*
- *civilisé si $\chi \in \Xi(j)$ pour un $j \geqslant 10A\log\log q$*
- *modéré si $\chi \in \Xi(j)$ pour un $j \geqslant 4A\log A + D$ et χ n'est pas civilisé*
- *sauvage si $\chi \in \Xi(j)$ pour un $j < 4A\log A + D$*

Les caractères sauvages sont à leur tour divisés en caractères dits problématiques (ceux d'ordre plus petit que E pour une certaine constante E) et caractères de grand ordre.Selon la classe à laquelle χ appartient parmi les classes ci-dessus on fournira une majoration de $\Psi(x, y; \chi, \Phi)$ et partant une estimation asymptotique de $\Psi(x, y; q, a, \Phi)$ quand $u \to \infty$. Plus précisément

Théorème 3.6. *Si le caractère non-principal χ modulo q est civilisé, alors*

$$\Psi(x, y; \chi, \Phi) \ll \Psi(x, y; \chi_0, \Phi)\left(\frac{e^{-2C_2 j}}{\log^2 x} + \frac{1}{q^2}\right)$$

où j est tel que $\chi \in \Xi(j)$

Théorème 3.7. *Si le caractère non-principal χ modulo q est modéré, alors*

$$\Psi(x, y; \chi, \Phi) \ll \Psi(x, y; \chi_0, \Phi)\left((\log x)e^{-\sqrt{u}/20} + \frac{1}{q^2}\right)$$

Théorème 3.8. *Si le caractère non-principal χ modulo q est de grand ordre, alors*

$$\Psi(x, y; \chi, \Phi) \ll \Psi(x, y; \chi_0, \Phi)\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{q}\right)$$

Théorème 3.9. *Si le caractère non-principal χ modulo q est problématique, et si $A < 4\sqrt{e} - 100\delta$, alors il existe une constante positive c telle que*

$$\Psi(x, y; \chi, \Phi) \ll \Psi(x, y; \chi_0, \Phi)u^{-c\delta}$$

4 Caractères civilisés

Les caractères civilisés, ceux dont les zéros de la fonction L associée sont les plus proches de la droite d'abscisse 1/2, se traitent par des méthodes classiques d'analyse complexe.

4.1 Formule explicite pour $L(s,\chi)$

On établit dans cette section une «formule explicite» pour une somme appelée à intervenir dans la suite du problème, en adaptant légèrement les arguments classiques exposés notamment dans [1], chapitres 17 et 19.

4.1.1 Formule de Perron

Rappelons les formules de Perron : un peu de calcul des résidus permet d'établir

Théorème 4.1. *Pour $\kappa > 0$, pour $z > 0$,*

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\kappa-\imath\infty}^{\kappa+\imath\infty} z^s\frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 & si \quad z>1 \\ \frac{1}{2} & si \quad z=1 \\ 0 & si \quad 0<z<1 \end{cases} \tag{84}$$

Ici la convergence est à entendre «en valeur principale», *i.e.* cette intégrale est définie comme la limite de l'intégrale de $\kappa - \imath T$ à $\kappa + \imath T$ quand T tend vers l'infini.

L'égalité (84) étant difficilement manipulable, on préfère en utiliser la version effective suivante

Théorème 4.2. *Pour $\kappa > 0$, pour $z > 0$, pour $T > 0$, posons*

$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & si \quad z>1 \\ \frac{1}{2} & si \quad z=1 \\ 0 & si \quad 0<z<1 \end{cases} \tag{85}$$

Alors on a

$$\left|\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\kappa-\imath T}^{\kappa+\imath T} z^s\frac{ds}{s} - \delta(z)\right| < \begin{cases} z^\kappa \min\left(1, \frac{1}{T|\log z|}\right) & si \quad z\neq 1 \\ \frac{\kappa}{T} & si \quad z=1 \end{cases} \tag{86}$$

4.1.2 Évaluation du terme d'erreur

Le but ici est d'évaluer la somme

$$\varpi(z,\chi) = \sum_{n\leqslant z}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{\imath t}} - \frac{1}{2}\frac{\Lambda(z)\chi(z)}{z^{\imath t}} \tag{87}$$

le dernier terme étant à entendre comme nul si z n'est pas entier.

En utilisant la formule de Perron (86) on écrit pour $1 < \kappa < 2$ et $|\tau| \leqslant \frac{T}{2}$

$$\varpi(z,\chi) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{2\pi n^{\imath\tau}}\int_{\kappa-\imath T}^{\kappa+\imath T}\left(\frac{z}{n}\right)^s\frac{ds}{s} + R \tag{88}$$

où

$$R \ll \sum_{n \neq z} \Lambda(n) \left(\frac{z}{n}\right)^{\kappa} \min\left(1, \frac{1}{T\left|\log\left(\frac{z}{n}\right)\right|}\right) + \frac{\kappa \log z}{T} \tag{89}$$

La contribution dans (89) des $n \leqslant \frac{3}{4}z$ est majorée par $\frac{z^\kappa}{T}\sum \frac{\Lambda(n)}{n^\kappa} \leqslant -\frac{z^\kappa}{T}\frac{\zeta'}{\zeta}(\kappa)$. Il en est de même pour les $n \geqslant \frac{5}{4}z$. Les entiers restants sont un peu plus difficiles à traiter.

Soit z_1 la plus grande puissance de nombre premier plus petite (strictement) que z. On a

$$\log\frac{z}{z_1} = -\log\frac{z_1 - z + z}{z} = -\log\left(1 - \frac{z - z_1}{z}\right) \geqslant \frac{z - z_1}{z} \tag{90}$$

Ainsi la contribution de ce terme à $\varpi(z,\chi)$ sera-t-elle majorée par

$$\Lambda(z_1)\min\left(1, \frac{z}{T(z - z_1)}\right) \leqslant \log z \min\left(1, \frac{z}{T(z - z_1)}\right) \tag{91}$$

Pour $\frac{3}{4}z < n < z_1$, on a de même

$$\log\frac{z}{n} \geqslant \log\frac{z_1}{n} \geqslant \frac{z_1 - n}{z_1} \tag{92}$$

et la contribution de ces termes est majorée par

$$\sum_{0 < v < \frac{1}{4}z} \Lambda(z_1 - v)\frac{z_1}{vT} \leqslant \frac{z_1}{T}\log z \sum_{v=1}^{\frac{z}{4}} \frac{1}{v} \ll \frac{z\log^2 z}{T} \tag{93}$$

On obtient des évaluations similaires pour les termes plus grands que z, en répétant le même raisonnement à partir de z_2, plus grande puissance d'un nombre premier strictement plus grande que z. Notons $\langle z\rangle$ la distance de z à la puissance d'un nombre premier la plus proche de z, en rassemblant les résultats précédents on a

$$R \ll \frac{z^\kappa}{T}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\kappa)\right| + \frac{z\log^2 z}{T} + \log z \min\left(1, \frac{z}{T\langle z\rangle}\right) \tag{94}$$

Faisons le choix $\kappa = 1 + \frac{1}{\log z}$ qui donne $z^\kappa = ez$ et $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\kappa) \ll \log z$

$$R \ll \frac{z\log^2 z}{T} + \log z \min\left(1, \frac{z}{T\langle z\rangle}\right) \tag{95}$$

En faisant le choix de $T = q - \eta < z$, $\eta \in [0,1]$, la majoration du terme d'erreur devient plus simplement

$$R \ll \frac{z\log^2 z}{q} \tag{96}$$

4.1.3 La formule explicite

La somme (88), après interversion de la sommation et de l'intégrale (comme $\kappa > 1$, la série en question converge absolument), s'écrit plus simplement

$$(97) \qquad \varpi(z,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\kappa-\imath(q-\eta)}^{\kappa+\imath(q-\eta)} -\frac{L'}{L}(s+\imath\tau,\chi)z^s\frac{ds}{s} + O\left(z\frac{\log^2 z}{q}\right)$$

Prolongeons le segment vertical sur lequel se fait l'intégration en un contour rectangulaire $\mathcal{C}$ de sommets $\kappa+\imath q \pm \imath\tau$, $-U+\imath q\pm\imath\tau$, où U est un entier impair si $\mathfrak{a}=0$, pair si $\mathfrak{a}=1$. Nous allons appliquer la formule des résidus à ce contour

$$(98)\ \varpi(z,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sqsubset} -\frac{L'}{L}(s+\imath\tau,\chi)z^s\frac{ds}{s} + \sum_{|\Im\rho-\tau|\leqslant q}\frac{z^{\rho-\imath\tau}}{\rho-\imath\tau} + O\left(z\frac{\log^2 z}{q}\right)$$

le symbole $\sqsubset$ représentant le contour d'intégration parcouru dans le sens indirect, en omettant le segment vertical de droite, et la contribution des résidus en les zéros triviaux étant absorbée dans le terme d'erreur.

L'intégrande est majoré par

- $\log q|s|\frac{z^{-U}}{U} \ll \frac{\log q+\log U}{Uz^U}$ sur le segment vertical
- $\int_2^\infty z^{-v}\log qv\frac{dv}{v} \ll \log q$ sur la partie à gauche de l'abscisse-2 des segments horizontaux
- $\frac{z}{q}\log^2 q$ sur le restant des segments horizontaux

Les deux premières majorations proviennent directement de la majoration (29) et sont indépendantes d'η. La dernière est plus subtile, et dépend directement du choix du paramètre η. Comme la densité des zéros de $L(s,\chi)$ aux alentours des ordonnées $q-\tau$ et $-q+\tau$ est majorée par $\log q\tau \ll \log q$ (théorème 2.9) on peut choisir η et une constante absolue $c>0$ tels qu'aucun zéro de $L(s+\imath\tau,\chi)$ ne soit à moins de $\frac{c}{\log q}$ de la ligne d'intégration. En utilisant le corollaire 2.11.1

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|\gamma-\tau|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho} + O(\log \mathfrak{q})$$

et en majorant trivialement les termes par $\log q$, on majore $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ par $\log q$ sur les segments horizontaux entre -2 et 1, d'où le résultat. En faisant tendre U vers $+\infty$ on en déduit le

Théorème 4.3 (Formule explicite)**.**

$$\varpi(z,\chi) = \sum_{|\Im\rho-\tau|\leqslant q}\frac{z^{\rho-\imath\tau}}{\rho-\imath\tau} + O\left(\frac{z}{q}\log^2(qz)\right)$$

4.2 Domination de $\log|L(\sigma+\imath\tau,\chi;y)|$

Les caractères χ considérés seront supposés «civilisés», *i.e.* ils n'auront pas de zéros trop éloignés de la droite $\Re(s)=1/2$ au sens suivant : on suppose que $\chi\in\Xi(j)$ pour un $j\geqslant 10A\log\log q$.

Alors on souhaite montrer que, pour $\sigma\geqslant\alpha-B\frac{j}{\log x}-3\frac{\log\log x}{\log x}$, où $B=2C_2$, l'on dispose de la domination suivante

$$\log|L(\sigma+\imath\tau,\chi;y)|=o(u) \tag{99}$$

4.2.1 Petits nombres premiers

Remarquons d'abord qu'à l'aide du produit eulérien l'on peut écrire

$$\log|L(\sigma+\imath\tau,\chi;y)|=\sum_{p\leqslant y}\log\left|1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right|^{-1} \tag{100}$$

Séparons cette somme en deux, selon que les nombres premiers impliqués sont plus petits ou plus grands qu'un paramètre P à fixer ultérieurement

$$\sum_{p\leqslant P}\log\left|1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right|^{-1}\ll\sum_{p\leqslant P}p^{-\alpha+B\frac{j}{\log x}+3\frac{\log\log x}{\log x}} \tag{101}$$

(tout se fait dans un voisinage de 1 de diamètre $<1/2$, donc le logarithme peut être approché uniformément par l'argument moins 1).

Choisissons $P=q^{\frac{5\log\log q}{j}}$. Alors

$$\log\left(p^{\frac{Bj}{\log x}+3\frac{\log\log x}{\log x}}\right)\leqslant\frac{5\log q\log\log q}{j}\left(\frac{Bj}{\log x}+3\frac{\log\log x}{\log x}\right) \tag{102}$$

$\log q$ est inférieur à $A\log y$ et $j\geqslant 10A\log\log q$ donc

$$\log\left(p^{\frac{Bj}{\log x}+3\frac{\log\log x}{\log x}}\right)\ll\frac{\log\log y+\log\log x}{u} \tag{103}$$

L'hypothèse $u\geqslant\log\log x$ suffit donc à assurer que l'erreur commise est $\ll 1$. On se ramène ainsi à l'inégalité

$$\sum_{p\leqslant P}\log\left|1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right|^{-1}\ll\sum_{p\leqslant P}p^{-\alpha}\ll\sqrt{u}=o(u) \tag{104}$$

(par (75))

4.2.2 Grands nombres premiers

Pour les «grands» nombres premiers, on procède différemment. Le reste de la somme à étudier est

$$\sum_{P\leqslant p\leqslant y} \log\left|1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right|^{-1} = -\frac{1}{2}\sum_{P\leqslant p\leqslant y} \log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right)+\log\left(1-\frac{\bar{\chi}(p)}{p^{\sigma-\imath\tau}}\right)$$

En substituant au logarithme son développement de Taylor

$$\sum_{P\leqslant p\leqslant y} \log\left|1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right|^{-1} = \sum_{P\leqslant p\leqslant y} \Re\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}} + O\left(\sum_{P\leqslant p\leqslant y}\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)$$

On peut perturber la somme en lui ajoutant des termes aux puissances de nombres premiers, la différence étant alors absorbée par le terme d'erreur

$$\sum_{P\leqslant p\leqslant y} \log\left|1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+\imath\tau}}\right|^{-1} = \sum_{P\leqslant n\leqslant y} \Re\left(\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{\sigma+\imath\tau}\log n}\right) + O\left(\sum_{P\leqslant p\leqslant y}\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)$$

Cette dernière somme s'exprime comme l'intégrale de Stieltjes

$$\int_P^y \frac{d\varpi(z)}{z^\sigma \log z}$$

qui par sommation par parties est égale à

$$\frac{\varpi(y)}{y^\sigma\log y}-\frac{\varpi(P)}{P^\sigma\log P}+\int_P^y \varpi(z)\frac{1+\sigma\log z}{z^{\sigma+1}\log^2 z}dz \tag{105}$$

La formule explicite $\varpi(z,\chi)=\sum_{|\Im\rho-\tau|\leqslant q}\frac{z^{\rho-\imath\tau}}{\rho-\imath\tau}+O\left(\frac{z}{q}\log^2(qz)\right)$ permet de majorer $\varpi(z,\chi)$, en séparant les zéros selon leur partie imaginaire : comme il y a $O(\log qn)$ zéros de partie imaginaire comprise entre $n-1$ et n, la somme intervenant dans la formule explicite est dominée par $\sum_{n=1}^{q}\frac{z^r}{n}\log q \ll z^r\log^2 q$, où $\Re(\rho)\leqslant r$ pour tous les zéros ρ impliqués. Si $\chi\in\Xi(j)$, on peut choisir pour r la valeur $1-\frac{j}{\log q}$

$$\varpi(z)\ll z^{1-\frac{j}{\log q}}\log^2 q+\frac{z}{q}\log^2(qz)$$

En s'aidant de cette dernière majoration on montre le

Lemme 4.4. *Pour $P\leqslant z\leqslant y$ et $u\geqslant B$ on a*

$$\frac{\varpi(z)}{z^{\sigma+1}}\ll\frac{1}{z^\alpha\log^3 q}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{\varpi(z)}{z^{\sigma+1}} &\ll \left(z^{1-\frac{j}{\log q}}\log^2 q+\frac{z}{q}\log^2(qz)\right)z^{-\alpha-1}z^{B\frac{j}{\log x}}z^{3\frac{\log\log x}{\log x}}\\
&\ll z^{-\alpha}\left(P^{-\frac{j}{\log q}}+\frac{1}{q}\right)\log^2 q\; y^{\frac{Bj}{\log x}}\\
&\ll z^{-\alpha}\left(\frac{1}{q}+e^{-5\log\log q}\right)\log^2 q\; q^{B\frac{A\log q}{\log x}}\\
&\ll \frac{z^{-\alpha}}{\log^3 q}q^{\frac{B}{u}}
\end{aligned}$$

d'où la majoration pour $u \geqslant B$, qui nous suffit car B est une constante absolue. □

En utilisant le lemme conjointement à (105), les termes restants dans la somme sont majorés par

$$\frac{y^{1-\alpha}}{\log^4 y}+\frac{P^{1-\alpha}}{\log^3 q\log P}+\frac{1}{\log^3 q}\int_P^y\frac{dz}{z^\alpha\log z}$$

En majorant brutalement l'intégrande par $z^{-\alpha}$ et en utilisant (71) et (70) on en déduit finalement que le reste est majoré par $1+\frac{u}{\log q}=o(u)$ sur notre domaine.

4.3 Démonstration du théorème 3.6

Rappelons l'égalité (82), pour un caractère non-principal

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi)=\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\alpha-\imath\sqrt{q}}^{\alpha+\imath\sqrt{q}}L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds+O(x^\alpha\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)q^{-10})$$

L'intégrande n'a pas de pôles sur le demi-plan $\Re(s)>0$. L'intégrale sur le rectangle de sommets $\alpha\pm\imath\sqrt{q}$ et $\alpha-\frac{Bj}{\log x}-\frac{3\log\log x}{\log x}\pm\imath\sqrt{q}$ sera donc nulle dès qu'elle sera définie, ce qui est le cas pour u plus grand qu'une constante absolue (la différence entre les abscisses tendant vers 0 quand $u\to\infty$).

L'intégrale sur les segments horizontaux de ce rectangle est majorée, par décroissance rapide de $\hat{\Phi}$, par

$$\frac{x^\alpha}{q^2}\int_{\alpha-\frac{Bj}{\log x}-\frac{3\log\log x}{\log x}}^{\alpha}L(\sigma,\chi_0;y)d\sigma\ll\frac{\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)}{q^2}\tag{106}$$

Sur le segment vertical de gauche, on utilise la domination (99)

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha-\frac{Bj}{\log x}-\frac{3\log\log x}{\log x}-\imath\sqrt{q}}^{\alpha-\frac{Bj}{\log x}-\frac{3\log\log x}{\log x}+\imath\sqrt{q}} L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds \\
\ll e^{o(u)}x^\alpha \frac{e^{-Bj}}{\log^3 x}\int_{\alpha-\frac{Bj}{\log x}-\frac{3\log\log x}{\log x}-\imath\sqrt{q}}^{\alpha-\frac{Bj}{\log x}-\frac{3\log\log x}{\log x}+\imath\sqrt{q}} \frac{ds}{s^2} \\
\ll e^{o(u)}x^\alpha \frac{e^{-Bj}}{\log^3 x}
\end{aligned}$$

Comme $\log L(\alpha,\chi_0;y) \asymp u$ cette intégrale est dominée par

$$x^\alpha L(\alpha,\chi_0;y)\frac{e^{-2C_2 j}}{\log^3 x}$$

d'où, en utilisant (81), une domination de l'intégrale par

$$\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\frac{1}{\log^2 x} \tag{107}$$

En combinant (106) et (107) on obtient le théorème 3.6

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi) \ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{e^{-2C_2 j}}{\log^2 x}+\frac{1}{q^2}\right)$$

5 Caractères modérés

5.1 Distance entre caractères

5.1.1 Définition de la distance

Suivant Granville et Soundararajan [5], on définit la distance entre deux fonctions multiplicatives f et g par

$$\mathbb{D}_\alpha(f,g;y)^2 = \sum_{p\leqslant y}\frac{1-\Re(f(p)\bar{g}(p))}{p^\alpha} \tag{108}$$

Proposition 5.1. *On a l'inégalité triangulaire suivante pour f,g à valeurs dans le cercle unité*

$$\mathbb{D}_\alpha(1,f\times g;y) \leqslant \mathbb{D}_\alpha(1,f;y)+\mathbb{D}_\alpha(1,g;y) \tag{109}$$

Démonstration.

Lemme 5.2. *Soit $\eta_p(z)=\sqrt{\frac{1-\Re(z)}{p^\alpha}}$. On a $\eta_p(z\times w)\leqslant\eta_p(z)+\eta_p(w)$ pour $|z|=|w|=1$.*

En effet, on a $1-\Re(e(\theta)) = 2\sin^2(\pi\theta)$, soit $\eta_p(e(\theta)) = \frac{|\sin(\pi\theta)|}{\sqrt{2}p^\alpha}$; or $|\sin(\pi(\theta+\varphi))| \leqslant |\sin(\pi\theta)\cos(\pi\varphi)|+|\sin(\pi\varphi)\cos(\pi\theta)| \leqslant |\sin(\pi\theta)|+|\sin(\pi\varphi)|$, d'où l'on déduit le lemme. En réécrivant $\mathbb{D}_\alpha(1,f;y)^2 = \sum_{p\leqslant y}\eta_p(f(p))^2$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_\alpha(1,f\times g;y)^2 &= \sum_{p\leqslant y}\eta_p(f(p)g(p))^2 \\
&\leqslant \sum_{p\leqslant y}(\eta_p(f(p))+\eta_p(g(p)))^2 \\
&\leqslant \mathbb{D}_\alpha(1,f;y)^2+\mathbb{D}_\alpha(1,g;y)^2+2\sum_{p\leqslant y}\eta_p(f(p))\eta_p(g(p)) \\
&\leqslant \mathbb{D}_\alpha(1,f;y)^2+\mathbb{D}_\alpha(1,g;y)^2+2\mathbb{D}_\alpha(1,f;y)\mathbb{D}_\alpha(1,g;y) \\
&= (\mathbb{D}_\alpha(1,f;y)+\mathbb{D}_\alpha(1,g;y))^2
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant une inégalité de Cauchy-Schwarz □

5.1.2 Distance et fonctions L

Utilisons cette fonction distance pour comparer des fonctions L partielles

Lemme 5.3.

$$|L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)| \ll |L(\alpha,\chi_0;y)|\exp\left(-\mathbb{D}_\alpha(\chi,n^{\imath\tau};y)^2\right)$$

Démonstration. On note dans la suite $f(p)=\chi(p)p^{-\imath\tau}$. En utilisant le produit eulérien pour les fonctions L considérées on se ramène à montrer que

$$\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}}\exp\left(\frac{f(p)-1}{p^\alpha}\right)\left(\frac{p^\alpha}{p^\alpha-1}\right)\left(1-2\frac{f(p)}{p^\alpha}+\frac{1}{p^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \gg 1$$

Comme $e^x \geqslant 1+x$ il suffit de montrer

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}}\left(1+\frac{f(p)-1}{p^\alpha}\right)\left(\frac{p^\alpha}{p^\alpha-1}\right)\left(1-2\frac{f(p)}{p^\alpha}+\frac{1}{p^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} &\gg 1 \\
\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}}\left(1+\frac{f(p)}{p^\alpha-1}\right)\left(1-2\frac{f(p)}{p^\alpha}+\frac{1}{p^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} &\gg 1
\end{aligned}$$

On effectue un développement limité à l'ordre 3 des deux facteurs

$$\left(1+\frac{f(p)}{p^\alpha-1}\right)\left(1-2\frac{f(p)}{p^\alpha}+\frac{1}{p^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$\left(1+\frac{f(p)}{p^\alpha}+\frac{f(p)}{p^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{p^{3\alpha}}\right)\right)\left(1-\frac{f(p)}{p^\alpha}+\frac{1-f(p)^2}{2p^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{p^{3\alpha}}\right)\right) =$$
$$\left(1+\frac{1+2f(p)-3f(p)^2}{2p^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{p^{3\alpha}}\right)\right) \geqslant 1-\frac{2}{p^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{p^{3\alpha}}\right)$$

Le produit infini sur tous les facteurs premiers est donc convergent, d'où le résultat, sous la condition supplémentaire $\alpha > 1/2$. Pour obtenir l'uniformité, il convient de fixer $\epsilon > 0$ et d'imposer $\alpha > 1/2 + \epsilon$. $\square$

Il faut donc fixer un domaine pour x et y sur lequel $\alpha > \frac{1}{2} + \epsilon$. Premièrement, on a par définition du paramètre α

$$\log x = \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} \geqslant \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{y^\alpha - 1} \geqslant \frac{\theta(y)}{y^\alpha - 1}$$

où θ est la fonction de Tchebycheff, dont on sait qu'elle vérifie $\theta(t) \geqslant ct$ pour une certaine constante c. On en déduit

$$\alpha \geqslant \frac{\log(1 + \frac{cy}{\log x})}{\log y}$$

et donc α sera strictement supérieur à $1/2 + \epsilon$ dès que

$$1 + \frac{cy}{\log x} > \sqrt{y} y^\epsilon \tag{110}$$

$$\log x < \frac{cy}{\sqrt{y} y^\epsilon - 1} < 2c\sqrt{y} y^{-\epsilon} \tag{111}$$

L'hypothèse $\alpha > 1/2 + \epsilon$ est donc vérifiée sur le domaine

$$\begin{cases} x, y & \geqslant 2 \\ y & > \frac{1}{4c^2} (\log x)^{\frac{2}{1-2\epsilon}} \end{cases}$$

On peut se ramener au domaine suivant

$$\begin{cases} x, y & \geqslant 2 \\ y & > (\log x)^{2+\epsilon} \end{cases}$$

En majorant trivialement l'intégrale intervenant dans (82) on obtient

$$\Psi(x, y; \chi, \Phi) \ll x^\alpha \max_{|\tau| \leqslant \sqrt{q}} |L(\alpha + \imath\tau, \chi; y)| + \frac{1}{q^2} \Psi(x, y; \chi_0, \Phi) \tag{112}$$

En introduisant la majoration du lemme 5.3

$$\begin{aligned} \Psi(x, y; \chi, \Phi) &\ll x^\alpha L(\alpha, \chi_0; y) \exp\left\{ - \min_{|\tau| \leqslant \sqrt{q}} \mathbb{D}_\alpha \left(\chi, n^{\imath\tau}; y\right)^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{q^2} \Psi(x, y; \chi_0, \Phi) \\ &\ll \Psi(x, y; \chi_0, \Phi) \left(\frac{1}{q^2} + \log x \exp\left\{ - \min_{|\tau| \leqslant \sqrt{q}} \mathbb{D}_\alpha \left(\chi; n^{\imath\tau}; y\right)^2 \right\} \right) \end{aligned}$$

Si l'on minore la quantité $\mathbb{D}_\alpha \left(\chi; n^{\imath\tau}\right)$ on obtient donc une majoration de $\Psi(x, y; \chi, \Phi)$.

5.2 Minoration de la distance

5.2.1 Approximation lisse

Pour obtenir une telle minoration, on lisse la somme définissant $\mathbb{D}_\alpha$ par une fonction continue. Définissons $W(t)$ par

$$W(t) = \begin{cases} \log \frac{t}{\sqrt{y}} & \text{si } \sqrt{y} \leqslant t \leqslant y^{3/4} \\ \log \frac{y}{t} & \text{si } y^{3/4} \leqslant t \leqslant y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{113}$$

Un peu d'analyse réelle élémentaire permet de se convaincre que $\frac{4W}{\log y}$ est une fonction continue, qu'elle est un minorant continu de $\mathbf{1}_{[\sqrt{y},y]}$, et que son maximum est atteint en $y^{3/4}$ où elle vaut 1. Cette fonction a une expression sympathique comme transformée de Mellin

Proposition 5.4. *Pour tout $c > 0$*

$$W(t) = \frac{1}{2\imath\pi}\int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty} t^{-w}\left(\frac{y^{w/2}-y^{w/4}}{w}\right)^2 dw$$

Revenons à l'évaluation de $\mathbb{D}_{\alpha,y}\left(\chi, n^{-\imath\tau}\right)$

$$\mathbb{D}_{\alpha,y}\left(\chi, n^{-\imath\tau}\right)^2 = \sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}} \frac{1-\Re\frac{\chi(p)}{p^{\imath\tau}}}{p^\alpha} \tag{114}$$

$$\geqslant \frac{y^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\log y}\sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}} \frac{1-\Re\frac{\chi(p)}{p^{\imath\tau}}}{p^\alpha}\log p \tag{115}$$

$$\geqslant 4\frac{y^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\log^2 y}\sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}} \frac{1-\Re\frac{\chi(p)}{p^{\imath\tau}}}{p}W(p)\log p \tag{116}$$

Évaluons les deux sommes

$$\sum_{\sqrt{y}\leqslant p\leqslant y}\frac{\log p}{p}W(p)$$

$$\sum_{\sqrt{y}\leqslant p\leqslant y}\frac{\log p}{p^{1+\imath\tau}}\chi(p)W(p)$$

5.2.2 Évaluation des termes positifs

En posant $S(t) = \sum_{p \leqslant t} \frac{\log p}{p}$ on peut écrire la première somme à estimer comme l'intégrale de Stieltjes

$$\sum_{\sqrt{y} \leqslant p \leqslant y} \frac{\log p}{p} W(p) = \int_{\sqrt{y}}^{y} W(t) dS(t)$$

d'où après intégration par parties et dérivation de W

$$\sum_{\sqrt{y} \leqslant p \leqslant y} \frac{\log p}{p} W(p) = -\int_{\sqrt{y}}^{y^{3/4}} \frac{S(t)}{t} dt + \int_{y^{3/4}}^{y} \frac{S(t)}{t} dt \tag{117}$$

Rappelons le premier théorème de Mertens

Théorème 5.5.

$$S(t) = \sum_{p \leqslant t} \frac{\log p}{p} = \log t + O(1)$$

En introduisant cette estimation dans l'expression (117) on obtient

$$\sum_{\sqrt{y} \leqslant p \leqslant y} \frac{\log p}{p} W(p) = -\int_{\sqrt{y}}^{y^{3/4}} \frac{\log t}{t} dt + \int_{y^{3/4}}^{y} \frac{\log t}{t} dt + O(\log y)$$

En observant que l'intégrande est la dérivée de $\frac{1}{2} \log^2$, on a

$$\sum_{\sqrt{y} \leqslant p \leqslant y} \frac{\log p}{p} W(p) = \frac{\log^2 y}{16} + O(\log y) \tag{118}$$

On a compté en trop les nombres premiers $\geqslant \sqrt{y}$ divisant q, mais comme $q \leqslant y^A$ il y en a au plus $2A$, et l'erreur commise est donc majorée par $\frac{A}{2} \frac{\log^2 y}{\sqrt{y}} = O(1)$. Le résultat reste donc vrai quand on «oublie» ces nombres.

5.2.3 Majoration des termes oscillants

Traitons maintenant la deuxième somme

$$S_2 = \sum_{\sqrt{y} \leqslant p \leqslant y} \frac{\log p}{p^{1+\imath\tau}} \chi(p) W(p)$$

Montrons le

Lemme 5.6. *Il existe une constante absolue D telle que, si $\chi \in \Xi(j)$ pour $j \geqslant 4A \log A + D$, alors pour $|\tau| \leqslant \sqrt{q}$*

$$\Re\left(\sum_{p} \frac{\chi(p) \log p}{p^{1+\imath\tau}} W(p) \right) \leqslant \frac{\log^2 y}{100}$$

Le même raisonnement que ci-dessus permet de voir que l'erreur commise en rajoutant les nombres premiers divisant q est bornée. La différence avec la somme précédente est que la somme ici est tordue par $\frac{\chi(n)}{n^{\imath\tau}}$, on s'attend donc à ce que les oscillations ainsi induites la rendent négligeable devant $\log^2 y$. Cette somme s'exprime comme une transformée de Mellin, pour cela il faut la «régulariser» en

$$S_2' = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\imath\tau}}\chi(n)W(n)$$

L'erreur commise en procédant à cette substitution est majorée par

$$\sum_{p\leqslant y} \log p \left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right) = \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p(p-1)} \ll -\zeta'(2)$$

La somme ainsi régularisée s'écrit simplement comme une transformée de Mellin

$$\begin{aligned} S_2' &= \frac{1}{2\imath\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\imath\tau}}\chi(n)\int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty} n^{-w}\left(\frac{y^{w/2}-y^{w/4}}{w}\right)^2 dw \\ &= \frac{1}{2\imath\pi}\int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\imath\tau-w}}\chi(n)\left(\frac{y^{w/2}-y^{w/4}}{w}\right)^2 dw \\ &= \frac{-1}{2\imath\pi}\int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty}\frac{L'}{L}(1+\imath\tau-w,\chi)\left(\frac{y^{w/2}-y^{w/4}}{w}\right)^2 dw \end{aligned}$$

On écrit cette intégrale en fonction des résidus en les pôles de la fonction L : c'est une formule explicite du même type que celle intervenant dans la section 4. On utilise pour montrer la formule suivante les mêmes majorations que pour la première formule explicite, le contour, lui, n'est pas exactement le même.

Intégrons sur le contour rectangulaire de sommets $c\pm\imath T$, $-U\pm\imath T$ où U est un entier de parité contraire à celle de $\mathfrak{a}$. L'intégrande est majoré par $\frac{y^{\Re w}}{T}\log(q(U+T))$ sur les segments horizontaux avant -1, $\frac{y^c}{T}\log^2 qT$ entre -1 et c, et $\frac{y^{-U/2}}{U}\log(q(U+T))$ sur le segment vertical de gauche. En faisant tendre T et U vers l'infini avec $U=T$, on ne garde que les résidus en les pôles et un terme borné, d'où

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{2\imath\pi}\int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty}\frac{L'}{L}(1+\imath\tau+w,\chi)\left(\frac{y^{w/2}-y^{w/4}}{w}\right)^2 dw \\ &\qquad = -\sum_{\rho}\left(\frac{y^{\frac{\rho-1-\imath\tau}{2}}-y^{\frac{\rho-1-\imath\tau}{4}}}{\rho-1-\imath\tau}\right)^2 + O(1) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 2.9 et le fait que les fonctions L n'admettent pas de zéros de partie rélle > 1 on majore la contribution à cette somme des zéros de partie imaginaire plus grande que q en valeur absolue par

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \ll 1$$

Pour un zéro de partie imaginaire plus petite que q en valeur absolue, le numérateur du terme associé dans la somme ci-dessus est plus petit que $y^{-\frac{j}{2\log q}}$, et ainsi

$$\sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\imath\tau}} W(p) \ll 1 + y^{-\frac{j}{2\log q}} \sum_{|\Im\rho|\leqslant q} \frac{1}{|1+\imath\tau-\rho|^2} \tag{119}$$

On décale l'abscisse des termes de la somme d'$\frac{1}{\log q}$: comme $j \geqslant 4A\log A + D$ (D est pour l'instant une constante positive dépendant de A que l'on déterminera par la suite), $1-\beta \asymp 1-\beta+\frac{1}{\log q}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|1+\imath\tau-\rho|^2} &\ll \frac{1}{\left|1+\frac{1}{\log q}+\imath\tau-\rho\right|^2} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{\log q}-\beta} \Re\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\log q}+\imath\tau-\rho}\right) \\
&\leqslant \frac{\log q}{j} \Re\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\log q}+\imath\tau-\rho}\right)
\end{aligned}$$

Rappelons la formule (2.1.5), conséquence du produit de Hadamard pour $L(s,\chi)$

$$\sum_\rho \Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \Re\frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{q}{\pi}\right) + \Re\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)$$

En appliquant en $1+\frac{1}{\log q}+\imath\tau$, et en majorant $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ par $\frac{\zeta'}{\zeta}(\Re(s)) \ll \frac{1}{\Re(s)-1}$ et $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ par la formule de Stirling

$$\sum_\rho \Re\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\log q}+\imath\tau-\rho}\right) \ll \log q$$

En combinant ces résultats on a donc

$$\sum_{|\Im\rho|\leqslant q} \frac{1}{|1+\imath\tau-\rho|^2} \ll \frac{\log^2 q}{j}$$

En tenant compte du fait que $q \leqslant y^A$, (119) donne

$$\sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\imath\tau}} W(p) \ll 1 + e^{-\frac{4A\log A+D}{2A}} A^2 \log^2 y$$

d'où le lemme, pour D choisi assez grand.

5.3 Démonstration du théorème 3.7

En reportant (118) et le lemme 5.6 dans (116), on obtient pour y assez grand

$$\mathbb{D}_\alpha(chi, n^{-\imath\tau}; y)^2 \geqslant 4\frac{y^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\log^2 y}\left(\frac{\log^2 y}{32} - \frac{\log^2 y}{100}\right) = \frac{y^{\frac{1-\alpha}{2}}}{17}$$

Enfin, l'estimation asymptotique (71) donne $y^{1-\alpha} \gg u$ d'où la

Proposition 5.7.

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{-\imath\tau}; y)^2 \geqslant \frac{\sqrt{u}}{20}$$

Combiné au lemme 5.3, ce résultat donne pour χ un caractère modéré le théorème 3.7

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi) \ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left((\log x)e^{-\sqrt{u}/20} + \frac{1}{q^2}\right)$$

6 Caractères sauvages

Les seuls caractères qui n'ont pas été traités dans les deux sections précédentes sont ceux ayant des zéros de «grande» partie imaginaire, à savoir qu'ils appartiennent à $\Xi(j)$ pour $j < 4A\log A + D$. On appelle dans la suite de tels caractères des caractères sauvages. Par la «log-free zero density estimate», le nombre de caractères sauvages est borné par une constante absolue E. Comme ces caractères sont susceptibles de causer de fortes oscillations dans $\Psi(x,y;\chi,\Phi)$, on définit dans la suite un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ sur lequel ces caractères contribueront peu à $\Psi(x,y;q,a,\Phi)$. Pour cela, commençons par séparer les caractères sauvages en deux classes

Définition 6.1. *Un caractère sauvage est dit* problématique *s'il est d'ordre inférieur ou égal à E. On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères problématiques.*

Les autres caractères sauvages sont dits «caractères de grand ordre». Le but de la partie suivante est de montrer que la contribution de ces caractères à $\Psi(x,y;q,a,\Phi)$ n'est pas trop grande.

6.1 Caractères de grand ordre

On montre dans cette partie le théorème 3.8 si χ est de grand ordre alors

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi) \ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{1}{\log^2 x}+\frac{1}{q}\right)$$

Traitons d'abord les petites parties imaginaires

Lemme 6.1. *Si χ est de grand ordre et $|\tau| \leqslant \frac{\sqrt{q}}{2E}$*

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{-\imath\tau}; y)^2 \geqslant \frac{\sqrt{u}}{40E^2}$$

Démonstration. On procède par contraposée. Supposons qu'il existe un τ_χ de valeur absolue inférieure à $\frac{\sqrt{q}}{2E}$ tel que

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{-\imath\tau_\chi}; y)^2 < \frac{\sqrt{u}}{40E^2}$$

Soit, en appliquant k fois l'inégalité triangulaire

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{-\imath k\tau_\chi}; y)^2 < \frac{k^2\sqrt{u}}{40E^2}$$

Mais alors, en invoquant la proposition 5.7, ces inégalités impliquent que $\chi,\dots,\chi^{E+1}$ ne sont pas civilisés ou modérés : ils sont donc tous sauvages. Comme il y a au plus E caractères sauvages, il existe deux indices $a \neq b$ compris entre 1 et $E+1$ tels que $\chi^a = \chi^b$: χ est donc d'ordre plus petit que E, il est donc problématique. $\square$

Évaluons l'intégrale intervenant dans (82) en deux étapes

$$\int_{\alpha-\imath\sqrt{q}}^{\alpha+\imath\sqrt{q}} L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds =$$

$$x^\alpha \int_{|\tau|\leqslant\frac{\sqrt{q}}{2E}} L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)x^{\imath\tau}\hat{\Phi}(\alpha+\imath\tau)d\tau$$

$$+x^\alpha \int_{\frac{\sqrt{q}}{2E}\leqslant|\tau|\leqslant\sqrt{q}} L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)x^{\imath\tau}\hat{\Phi}(\alpha+\imath\tau)d\tau$$

On fait appel aux lemmes 5.3 et 6.1 pour majorer la fonction L qui intervient dans la première de ces deux intégrales

$$x^\alpha \int_{|\tau|\leqslant\frac{\sqrt{q}}{2E}} L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)x^{\imath\tau}\hat{\Phi}(\alpha+\imath\tau)d\tau \ll x^\alpha\sqrt{q}L(\alpha,\chi_0;y)e^{-\frac{\sqrt{u}}{40E^2}}$$

puis par (81) cette intégrale est dominée par

$$\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\sqrt{\log x\log y}\sqrt{q}\; e^{-\frac{\sqrt{u}}{40E^2}}$$

Pour la deuxième intégrale, par décroissance rapide de $\hat{\Phi}$ (plus rapide que s^{-10} par exemple), on peut majorer l'intégrande par $x^\alpha L(\alpha, \chi_0; y)\tau^{-10}$ d'où une majoration de l'intégrale par $q^{-\frac{11}{2}}\Psi(x, y; \chi_0, \Phi)$. En combinant ces deux dominations on obtient bien le théorème 3.8, en remarquant que $u \gg (\log\log x)^4$ sur le domaine choisi pour x et y.

6.2 Caractères problématiques

Les caractères problématiques sont plus difficiles à traiter. On peut obtenir des minorations de leur distance à $n^{\imath\tau}$ pour $\tau \leqslant y$, dont la finesse dépend de l'ordre du caractère.

Lemme 6.2. *Soit χ un caractère d'ordre $k > 1$. Pour $|\tau| \leqslant \frac{1}{k\log y}$*

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y)^2 \gg \max\left(\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, \chi; y)^2, |\tau|^2 \log x \log y\right)$$

Pour $\frac{1}{k\log y} \leqslant |\tau| \leqslant \frac{1}{ky}$

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y)^2 \gg \frac{u}{k^2\log^2 u}$$

6.2.1 Petites parties imaginaires

Par inégalité triangulaire, comme χ est d'ordre k

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y) \geqslant \frac{1}{k}\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, n^{\imath k\tau}; y) \tag{120}$$

Traitons le cas des petites parties imaginaires : $|\tau| \leqslant \frac{1}{k\log y}$. On a

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, n^{\imath k\tau})^2 = \sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}} \frac{1-\Re(p^{-\imath k\tau})}{p^\alpha} = \sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}} \frac{1-\cos(kt\log p)}{p^\alpha}$$

Par hypothèse sur la taille de τ, $1-\cos(k\tau\log p) \asymp (k\tau\log p)^2$ uniformément pour $p \leqslant y$. On en déduit

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, n^{\imath k\tau})^2 \asymp (k\tau)^2 \sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}} \frac{\log^2 p}{p^\alpha} \asymp (k\tau)^2\varphi_2(\alpha, y) \asymp (k\tau)^2 \log x \log y$$

On déduit de cet encadrement et de (120) que $\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, n^{\imath k\tau}; y)^2 \gg \tau^2 \log x \log y$. L'inégalité triangulaire donne

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y) + \mathbb{D}_\alpha(n^{\imath\tau}, \chi_0; y) \geqslant \mathbb{D}_\alpha(\chi_0, \chi; y)$$

En menant le même raisonnement que ci-dessus, si $|\tau| \leqslant \frac{1}{\log y}$ alors $\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, n^{\imath\tau})^2 \asymp \tau^2 \log x \log y$, et ainsi

$$\mathbb{D}_\alpha(1, \chi; y)^2 \ll \tau^2 \log x \log y + \mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y)^2$$

et en particulier, pour $|\tau| \leqslant \frac{1}{k \log y}$ et en combinant avec le premier résultat

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y)^2 \gg \max(\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, \chi; y)^2, \tau^2 \log x \log y)$$

6.2.2 Grandes parties imaginaires

Traitons maintenant le cas des grandes parties imaginaires $\frac{1}{k \log y} \leqslant |\tau| \leqslant \frac{1}{ky}$. On a alors

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi_0, n^{\imath k\tau}; y)^2 \geqslant \frac{1}{\log y} \Re \left(\sum_{\substack{p \leqslant y \\ (p,q)=1}} \frac{1 - p^{-\imath k\tau}}{p^\alpha} \log p \right)$$

Cette somme se sépare naturellement en une somme de termes positifs, pour laquelle on utilise (75)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leqslant y \\ (p,q)=1}} \frac{\log p}{p^\alpha} &= \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha} + O(\log^2 y) \\ &\asymp \log y \sum_{\sqrt{y} \leqslant p \leqslant y} \frac{1}{p^\alpha} + O\left(\log^2 y + \log y \sum_{p \leqslant \sqrt{y}} \frac{1}{p^\alpha} \right) \\ &\asymp \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} \end{aligned}$$

et une somme oscillante

$$\Re \left(\sum_{\substack{p \leqslant y \\ (p,q)=1}} \frac{-\log p}{p^{\alpha + \imath k\tau}} \right)$$

En enlevant la condition $(p, q) = 1$ on perturbe cette somme de $O(\log y \log q)$. En rajoutant les puissances de nombres premiers, comme $\alpha \geqslant \frac{1}{2} + \epsilon$ l'erreur commise est bornée. Ainsi on se ramène à l'étude de

$$-\sum_{n \leqslant y} \frac{\Lambda(n)}{n^{\alpha + \imath k\tau}}$$

En utilisant les formules de Perron de la même manière que pour la démonstration de la formule explicite dans la section 4 il vient

$$-\sum_{n\leqslant y}\frac{\Lambda(n)}{n^{\alpha+\imath k\tau}}=\frac{1}{2\imath\pi}\int_{c-\imath T}^{c+\imath T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\alpha+\imath k\tau)y^s\frac{ds}{s}+O\left(y\frac{\log^2 y}{T}\right)$$

On choisit alors $T=\exp(\sqrt{\log y})$, $c=1-\alpha+\frac{1}{\log y}$, et on exploite la région sans zéros pour ζ ($\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la région définie par $\sigma\geqslant 1-\frac{r}{\log|\tau|}$ pour une certaine constante r) en complétant la ligne d'intégration en un contour entourant le pôle de ζ en 1 : ce sera le contour rectangulaire de sommets $c\pm\imath T$ et $1-\alpha-\frac{r}{\log(T+k|\tau|)}\pm\imath T$. L'intégrale est majorée par $\frac{\log y}{e^{\sqrt{\log y}}}$ sur les segments horizontaux, $y^{1-\alpha}\log^2 y\exp(-r\sqrt{\log y})$ sur le segment vertical de gauche. Ainsi, par la formule des résidus appliquée à ce contour

$$-\sum_{n\leqslant y}\frac{\Lambda(n)}{n^{\alpha+\imath k\tau}}=\frac{y^{1-\alpha-\imath k\tau}}{1-\alpha-\imath k\tau}+o(y^{1-\alpha})$$

On en déduit que

$$\sum_{\substack{p\leqslant y\\(p,q)=1}}\frac{p^{-\imath k\tau}}{p^\alpha}\log p\ll\frac{y^{1-\alpha}}{|1-\alpha-\imath k\tau|}$$

Ainsi,

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi_0,n^{-\imath k\tau};y)^2\gg\frac{1}{\log y}\left(\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{y^{1-\alpha}}{|1-\alpha+\imath k\tau|}\right)$$

En utilisant (71), pour $\frac{1}{k\log y}\leqslant|\tau|\leqslant\frac{y}{k}$ cette minoration implique

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi_0,n^{-\imath k\tau};y)^2\gg\frac{u}{k^2\log^2 u}$$

6.3 Distances pour $A<4\sqrt{e}$

Dans le cas particulier où $\frac{1}{A}=\frac{1}{4\sqrt{e}}+\delta$, on dispose d'une minoration de la distance entre un caractère problématique χ et la fonction constante égale à 1.

Lemme 6.3. *Soit χ un caractère problématique d'ordre k. Alors*

$$\mathbb{D}_\alpha(1,\chi;y)^2\geqslant\frac{\delta}{2k}\log u+\frac{1}{k}\log\delta+O(1)$$

6.3.1 Une fonction auxiliaire

On pose $z = y^{\sqrt{e}-\delta}$. Alors $z > q^{\frac{1}{4}+\delta}$. On définit une fonction totalement multiplicative f par

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant y \\ \chi(p) & \text{si } y < p \leqslant z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f admet l'écriture suivante pour $n \leqslant z$

$$f(n) = 1 - \sum_{p|n}(1 - f(p)) \tag{121}$$

En effet, les deux membres sont trivialement égaux si n n'admet pas de facteur premier plus grand que y. Sinon, soit ℓ le plus grand facteur premier de n : $y < \ell \leqslant z$. Comme $e < 4$, $z < y^2$ donc $\frac{n}{\ell} \leqslant y$: $f(n) = \chi(\ell)$ et le résultat est évident. En s'aidant de cette écriture

$$\begin{aligned} \Re \sum_{n \leqslant z} f(n) &= z - z \sum_{y \leqslant p \leqslant z} \Re \frac{1 - \chi(p)}{p} + o(z) \\ &\geqslant z \left(1 - 2 \sum_{y \leqslant p \leqslant z} \frac{1}{p} + o(1) \right) \\ &= z \left(1 - 2 \log \frac{\log z}{\log y} + o(1) \right) \end{aligned}$$

par le théorème des nombres premiers, et ainsi, comme $1 - 2\log\frac{\log z}{\log y} = 1 - 2\log(\sqrt{e} - \delta) \asymp \delta$:

$$\left| \sum_{n \leqslant z} f(n) \right| \gg \delta z \tag{122}$$

La fonction f admet également l'écriture

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \chi\left(\frac{n}{d}\right)$$

où g est la fonction totalement multiplicative définie par

$$g(p) = \begin{cases} 1 - \chi(p) & \text{si } p \leqslant y \\ 0 & \text{si } y < p \end{cases}$$

alors

$$\sum_{n \leqslant z} f(n) = \sum_{n \leqslant z} \sum_{d|n} g(d) \chi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \leqslant z} g(d) \sum_{m \leqslant \frac{z}{d}} \chi(m)$$

6.3.2 Sommes de caractères

Cette dernière égalité fait apparaître des sommes de valeurs d'un caractère. Burgess a démontré le théorème suivant, précisé par Heath-Brown [8] dans le cas où l'ordre du caractère est borné

Théorème 6.4. *Soit χ un caractère modulo q d'ordre borné par une constante absolue. Soit $t > q^{\frac{1}{4}+\eta}$. Alors*

$$\sum_{n \leqslant t} \chi(n) \ll \frac{t}{\log^3 t}$$

Utilisons ce théorème pour traiter les termes $d \leqslant y^{\frac{\delta}{2}}$

$$\sum_{d \leqslant y^{\frac{\delta}{2}}} g(d) \sum_{m \leqslant \frac{z}{d}} \chi(m) \ll \frac{z}{\log^3 z} \sum_{d \leqslant y^{\frac{\delta}{2}}} \frac{|g(d)|}{d} \ll \frac{z}{\log^3 z} \sum_{d \leqslant z} \frac{2^{\Omega(d)}}{d} = o(z)$$

où $\Omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d, comptés avec multiplicité. Majorons la contribution des termes $d > y^{\frac{\delta}{2}}$ à la somme en majorant trivialement la somme de caractères

$$z \sum_{y^{\frac{\delta}{2}} \leqslant d \leqslant z} \frac{|g(d)|}{d} \leqslant \frac{z}{y^{\frac{\delta}{2}(1-\alpha)}} \frac{|g(d)|}{d^\alpha} \ll \frac{z}{y^{\frac{\delta}{2}(1-\alpha)}} \exp\left(\sum_{p \leqslant y} \frac{|1-\chi(p)|}{p^\alpha} \right)$$

Comme χ est d'ordre k, on aura $|1-\chi(p)| \leqslant k(1-\Re\chi(p))$, et en utilisant encore une fois $y^{1-\alpha} \asymp u$ le restant de la somme est finalement majoré par

$$\frac{z}{u^{\frac{\delta}{2}}} \exp\left(k\mathbb{D}_\alpha(1,\chi;y)^2\right)$$

En combinant la minoration (122) avec les majorations démontrées ci-dessus, on en déduit

$$\delta \ll \frac{1}{z} \left| \sum_{n \leqslant z} f(n) \right| \ll o(1) + u^{-\frac{\delta}{2}} \exp\left(k\mathbb{D}_\alpha(1,\chi;y)^2\right)$$

En considérant le logarithme de cette inégalité

$$\log(\delta + o(1)) \asymp \log \delta \leqslant -\frac{\delta}{2} \log u + k\mathbb{D}_\alpha(1,\chi;y)^2 + O(1)$$

d'où l'on déduit $\mathbb{D}_\alpha(1,\chi;y)^2 \geqslant \frac{\delta}{2k} \log u + \frac{\log \delta}{k} + O(1)$

6.4 Formule intégrale pour $\Psi(x,y;\chi,\Phi)$

Les minorations de la distance d'un caractère problématique au caractère principal données dans les parties précédentes permettent de donner avec un bon terme d'erreur une formule intégrale pour $\Psi(x,y;\chi,\Phi)$. Pour $A<4\sqrt{e}$ le terme d'erreur en question sera même assez bon pour donner l'équirépartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques.

Proposition 6.5. *Soit χ un caractère problématique modulo q. Alors il existe une constante positive C telle que pour tout $U\in[1,\sqrt{u}]$*

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;\chi,\Phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|\leqslant\frac{U}{\sqrt{\log x\log y}}} x^{\alpha+\imath\tau}L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)\hat{\Phi}(\alpha+\imath\tau)d\tau\\ &+ O\left(\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{\log^2 x}+e^{-CU^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons la formule (82)

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi)=\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\alpha-\imath\sqrt{q}}^{\alpha+\imath\sqrt{q}}L(s,\chi;y)x^s\hat{\Phi}(s)ds+O(\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)q^{-10})$$

Par décroissance rapide de $\hat{\Phi}$, pour $\frac{y}{E}\leqslant|\tau|\leqslant\sqrt{q}$ la contribution à cette intégrale est majorée par $x^\alpha L(\alpha,\chi_0;y)q^{-\frac{k}{A}}$. En choisissant $k\geqslant 2A$, la contribution sera donc majorée par $\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)q^{-2}$.

Pour $\frac{1}{\log y}\leqslant|\tau|\leqslant\frac{y}{E}$ on fait appel au lemme 6.2. Sur ce domaine, $\mathbb{D}_\alpha(\chi,n^{\imath\tau};y)\gg\frac{u}{E^2\log^2 u}\gg\frac{u}{\log^2 u}$, donc le lemme 5.3 donne

$$L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)\ll L(\alpha,\chi_0;y)e^{-C\frac{u}{\log^2 u}}$$

donc l'intégrale sera majorée par $\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\sqrt{\log x\log y}e^{-C\frac{u}{\log^2 u}}$. Comme $u\gg(\log\log x)^4$ cette contribution est majorée par $\frac{1}{\log^2 x}\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)$.

Pour $\frac{U}{\sqrt{\log x\log y}}\leqslant|\tau|\leqslant\frac{1}{\log y}$ on utilise encore le lemme 6.2 : le raisonnement est le même que ci-dessus mis à part que la distance est cette fois minorée par $\tau^2\log x\log y$, ce qui donne une contribution à l'intégrale majorée par

$$x^\alpha L(\alpha,\chi_0;y)\frac{e^{-cU^2}}{\sqrt{\log x\log y}}\ll\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)e^{-cU^2}$$

En rassemblant ces trois majorations, on obtient la proposition. □

On peut maintenant montrer en corollaire de cette proposition le théorème 3.9

Si $A<4\sqrt{e}-100\delta$ alors il existe une constante $c>0$ telle que

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi)\ll\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)u^{-c\delta}$$

Démonstration. Choisissons $U = \sqrt{\frac{\log u}{c}}$. Alors pour $|\tau| \leqslant \frac{U}{\sqrt{\log x \log y}}$ le lemme 6.2 donne

$$\mathbb{D}_\alpha(\chi, n^{\imath\tau}; y)^2 \gg \mathbb{D}_\alpha(1, \chi)^2$$

Le lemme 6.3 donne quant à lui

$$\mathbb{D}_\alpha(1, \chi)^2 \gg \frac{\delta}{4E} \log u \gg \delta \log u$$

Ainsi, l'intégrande est majoré par

$$x^\alpha L(\alpha, \chi_0; y) e^{-c\delta \log u} \asymp \Psi(x, y; \chi, \Phi) \sqrt{\log x \log y}\; u^{-c\delta}$$

et comme l'intégration se fait sur un intervalle de longueur $2\sqrt{\frac{\log u}{c \log x \log y}}$, en remplaçant c par $\frac{c}{2}$, on en déduit le corollaire. $\square$

7 Deux théorèmes d'équirépartition

7.1 Équirépartition pour $q < y^{4\sqrt{e}}$

On dispose maintenant des outils pour démontrer le

Théorème 7.1. *Sur le domaine défini par* $y^{(\log \log x)^4} \leqslant x \leqslant \exp\left(y^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)$, *on a*

$$\Psi(x, y; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \Psi_q(x, y) \left(1 + o(1)\right)$$

sous la contrainte $q \leqslant y^{4\sqrt{e}-100\delta}$, *quand* $x \to \infty$.

Démonstration.

7.1.1 Évaluation des quatre contributions

On décompose $\Psi(x, y; q, a, \Phi)$ selon les caractères modulo q (76)

$$\Psi(x, y; q, a, \Phi) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \Psi(x, y; \chi, \Phi)$$

On divise cette somme en quatre sommes, selon la nature du caractère χ : on somme séparément sur les caractères civilisés, modérés, sauvages de grand ordre et sauvages problématiques. Sur les caractères civilisés, en invoquant le théorème 3.6

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\chi \text{ civilisé}} \bar{\chi}(a)\Psi(x,y;\chi,\Phi)\right| &\ll \sum_{\chi \text{ civilisé}} |\Psi(x,y;\chi,\Phi)| \\
&\ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi) \sum_{j=10A\log\log q}^{\frac{\log q}{2}} \sum_{\chi\in\Xi(j)} \left(\frac{e^{-2C_2 j}}{\log^2 x} + \frac{1}{q^2}\right) \\
&\ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\log q \frac{e^{-10C_2 A\log\log q}}{\log^2 x} + \frac{\varphi(q)}{q^2}\right) \\
&\ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

où on a exploité la «log-free zero density estimate» pour borner la taille de $\Xi(j)$, et plus simplement la cardinalité du groupe des caractères pour faire apparaître le $\varphi(q)$. Traitons maintenant les caractères modérés, à l'aide du théorème 3.7

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\chi \text{ modéré}} \bar{\chi}(a)\Psi(x,y;\chi,\Phi)\right| &\ll \sum_{\chi \text{ modéré}} |\Psi(x,y;\chi,\Phi)| \\
&\ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi) \sum_{\chi \text{ modéré}} \left((\log x)e^{-\sqrt{u}/20} + \frac{1}{q^2}\right)
\end{aligned}$$

Le nombre de caractères modérés étant majoré par $(\log q)^{10AC_2}$, et comme $u \gg (\log\log x)^4$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\chi \text{ modéré}} \bar{\chi}(a)\Psi(x,y;\chi,\Phi)\right| &\ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left((\log x)^{10AC_2+1-c\log\log x} + \frac{\varphi(q)}{q^2}\right) \\
&\ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

Les caractères de grand ordre sont encore plus simples à traiter : vu qu'ils ont le bon goût d'être en nombre borné, le théorème 3.8

$$\Psi(x,y;\chi,\Phi) \ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{q}\right)$$

donne la même majoration pour la somme sur les caractères de grand ordre

$$\sum_{\chi \text{ de grand ordre}} \bar{\chi}(a)\Psi(x,y;\chi,\Phi) \ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{q}\right)$$

Restent enfin les caractères problématiques, que le théorème 3.9 nous permet de traiter

$$\sum_{\chi \text{ problématique}} \bar{\chi}(a)\Psi(x,y;\chi,\Phi) \ll \Psi(x,y;\chi_0,\Phi)u^{-c\delta}$$

En recollant tous ces résultats, on obtient une version lissée du théorème 7.1

$$\Psi(x,y;q,a,\Phi)=\frac{1}{\varphi(q)}\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^2 x}+\frac{1}{q}+u^{-c\delta}\right)\right)$$

Il s'agit maintenant d'en déduire le théorème.

7.1.2 Délissage des sommes

Nous allons maintenant choisir la fonction Φ. Fixons $\nu<1$, et imposons à Φ d'être égale à 1 sur $[0,\nu]$ et nulle au-delà de 1. Alors

$$\Psi(x,y;q,a,\Phi)\leqslant\Psi(x,y;q,a)$$

et la formule précédente donne

$$\frac{1}{\varphi(q)}\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^2 x}+\frac{1}{q}+u^{-c\delta}\right)\right)\leqslant\Psi(x,y;q,a)$$

Or $\Psi_q(\nu x,y)\leqslant\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\leqslant\Psi_q(x,y)$

On utilise alors le résultat suivant, concernant le comportement local de Ψ_q, énoncé dans [2] (2.22)

Proposition 7.2. *Pour* $y\geqslant(\log x)^{1+\epsilon},\omega(q)\ll y,d\leqslant y^{O(1)}$

$$\Psi_q(x/d,y)=\frac{\Psi_q(x,y)}{d^\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{\bar{u}+\frac{\log y}{\log(u+2)}}+\frac{\log d+\log^{1-\frac{\epsilon}{1+2\epsilon}}y}{u\log y}\right)\right)$$

Ici on a $d=1/\nu$, la proposition se simplifie en

$$\Psi_q(x\nu,y)=\frac{\Psi_q(x,y)}{\nu^{-\alpha}}\left(1+O\left(\frac{1}{\bar{u}}\right)\right)$$

On utilise l'encadrement $\Psi_q(x\nu,y)\leqslant\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\leqslant\Psi_q(x,y)$, joint à la proposition précédente et au fait que quand $u\to\infty$, $\alpha\to1$. On montre ainsi sous les hypothèses que l'on a sur q,x et y le

Théorème 7.3. *Pour tout* $\nu<1$

$$\Psi(x,y;q,a)\geqslant\frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x,y)\nu(1+o_\nu(1))\left(1+O\left(\frac{1}{\log^2 x}+\frac{1}{q}+u^{-c\delta}\right)\right)$$

On a l'inégalité réciproque par un raisonnement similaire pour tout $\nu>1$. Le théorème en est la conséquence. □

7.2 Équirépartition modulo un sous-groupe

Si $A \geqslant 4\sqrt{e}$, on ne dispose plus du théorème 3.9, en conséquence de quoi la démonstration d'un théorème d'équirépartition modulo q semble hors de portée. On peut cependant trouver un résultat plus faible d'équirépartition modulo un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$

Théorème 7.4. *Soit $A > 0$, on se place sous la condition $q \leqslant y^A$, $y^{(\log\log x)^4} \leqslant x \leqslant \exp\left(y^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)$. Alors il existe une constante $C(A)$ et un sous-groupe H de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ tels que, pour tous éléments a et b de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ avec $a/b \in H$, on ait*

$$\Psi(x,y;q,a) = \Psi(x,y;q,b) + O\left(\frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x,y)\right)$$

Démonstration. On définit H comme étant l'intersection des noyaux des caractères problématiques : $H = \{h \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \forall \chi \in \mathcal{E}, \chi(h) = 1\}$. Comme $\mathcal{E}$ contient au plus E caractères d'ordre au plus E, l'indice de H dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est au plus E^E.

En procédant comme lors de la preuve du théorème d'équirépartition, le théorème 3.9 en moins, on a

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;q,a,\Phi) &= \frac{1}{\varphi(q)}\Psi(x,y;\chi_0,\Phi)\left(1 + O\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\log^2 x}\right)\right)\\ &\quad + \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\in\mathcal{E}}\overline{\chi(a)}\Psi(x,y;\chi,\Phi)\end{aligned}$$

En choisissant les fonctions Φ comme dans la preuve précédente, on obtient directement par le calcul

$$\hat{\Phi}(\alpha + \imath\tau) = \frac{1}{\alpha + \imath\tau} + O(|1-\nu|)$$

On conclut alors de la formule précédente et de la proposition 6.5 appliquée pour $U = \frac{1}{|1-\nu|}$ que

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;q,a) &= \frac{1}{\varphi(q)}\frac{x^\alpha L(\alpha,\chi_0;y)}{\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y)}} + O\left(\frac{\sqrt{|1-\nu|}}{\varphi(q)}\Psi(x,y;\chi_0)\right)\\ &\quad + \frac{1}{\psi(q)}\sum_{\chi\in\mathcal{E}}\frac{\overline{\chi(a)}}{2\pi}\int_{|\tau|\leqslant\frac{1}{\sqrt{|1-\nu|\log x\log y}}} x^{\alpha+\imath\tau}L(\alpha+\imath\tau,\chi;y)\frac{d\tau}{\alpha+\imath\tau}\end{aligned}$$

Si $a/b \in H$, par construction de H l'expression ci-dessus aura la même valeur pour a et b. Le théorème en découle. □

Références

[1] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory.* Springer-Verlag, deuxième edition, 1980.

[2] Régis de la Bretèche et Gérald Tenenbaum. Integers without large prime factors. *The Ramanujan Journal*, 9, 2005.

[3] Henryk Iwaniec et Emmanuel Kowalski. *Analytic Number Theory*, volume 53. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 2004.

[4] Adolf Hildebrand et Gérald Tenenbaum. Integers without large prime factors. *Journal de thórie des nombres de Bordeaux*, 5(2), 1993.

[5] A. Granville et K. Soundararajan. Pretentious multiplicative functions and an inequality for the zeta-function. *Proceedings of the Anatomy of Integers conference, Montreal.*

[6] S. Graham. An asymptotic estimate related to selberg's sieve. *J. Number Theory*, 10, 1978.

[7] Andrew Granville. Integers, without prime factors, in arithmetic progressions. II. *Phil. Transc. R. Soc. Lond.*, 345, 1993.

[8] D.R. Heath-Brown. Zero-free regions for dirichlet l-functions, and the least prime in an arithmetic progression. *Proc. London Math.Soc.*, 345, 1992.

[9] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 2003.